Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 10 gennaio 2005

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1

Studiare la convergenza puntuale e uniforme sulla semiretta $[3, +\infty)$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{nx+4}$$

Soluzione

Dato che $x > 0$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad \forall x \in [3, +\infty).$$

Quindi l'insieme di convergenza puntuale è $[3, +\infty)$ e la funzione limite è la funzione identicamente nulla $f(x) = 0$. Per la convergenza uniforme dobbiamo valutare

$$\sup_{x\geq 3} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\geq 3} f_n(x).$$

Calcoliamo la derivata di $f_n(x)$:

$$f_n'(x) = \frac{e^{-nx}(-n^2x^2 - 4nx + 4)}{(nx+4)^2}$$

e il suo segno è positivo quando $\frac{2-2\sqrt{2}}{n} < x < \frac{2+2\sqrt{2}}{n}$. La funzione è quindi decrescente per $x > \frac{2+2\sqrt{2}}{n}$. Basta ora osservare che per $n \geq 2$ il punto $\frac{2+2\sqrt{2}}{n}$ non appartiene alla semiretta $[3, +\infty)$, quindi f_n è decrescente su tutto l'insieme. Ne segue che il suo estremo superiore è il valore che la funzione assume nel punto 3. Quindi:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq 3} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} f_n(3) = 0$$

che prova la convergenza uniforme della succesione sulla semiretta $[3, +\infty)$.

Esercizio 2

Determinare per quali valori del paramentro reale α la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n \sin^2 x + 3}}{(n+1)^\alpha}$$

converge totalmente in $\mathbb{R}$.

Soluzione

Osserviamo che

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\sqrt{n \sin^2 x + 3}}{(n+1)^\alpha} = \frac{\sqrt{n+3}}{(n+1)^\alpha}.$$

Per valutare la convergenza totale dovremo quindi decidere se converge o meno la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{(n+1)^\alpha}$. Se $\alpha \leq 0$ il termine generale della serie non è infinitesimo quindi non c'è convergenza. Se invece $\alpha > 0$ il termine generale è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$ e la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$$

converge se e solo se $\alpha - \dfrac{1}{2} > 1$. Ne segue che la serie data converge totalmente se e solo se $\alpha > \dfrac{3}{2}$.

Esercizio 3

Calcolare la lunghezza della curva $\begin{pmatrix} -3t \\ 6t+1 \\ -3t+6 \end{pmatrix}$, $t \in [1,6]$, specificando di che tipo di curva si tratta.

Soluzione

La curva è un segmento di retta. Calcoliamo la velocità:

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad |\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{9+36+9} = 3\sqrt{6}.$$

Quindi la lunghezza della curva risulta:

$$l(\gamma) = \int_1^6 3\sqrt{6}\, dt = 5 \cdot 3\sqrt{6} = 15\sqrt{6}.$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 10 gennaio 2005

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 4

Calcolare l'integrale della forma differenziale lineare $\omega(x,y) = (y^2+x)\,dx - \sqrt{x}\,dy$ lungo il grafico della funzione $y = x^3$ che congiunge i punti $(0,0)$ e $(2,8)$.

Soluzione

Come curva che ha per sostegno il grafico possiamo scegliere $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}$, $t \in [0,2]$. Allora la velocità di γ è:

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\int_\gamma \omega = \int_0^2 (t^6+t) - \sqrt{t}\,3t^2\,dt = \left[\frac{t^7}{7} + \frac{t^2}{2} - 3\frac{2}{7}t^{7/2}\right]_0^2 = \frac{128}{7} + 2 - \frac{6}{7}2^{7/2} = \frac{142-48\sqrt{2}}{7}.$$

Esercizio 5

Dire se la forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = \left(\sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}\right)\,dx + \left(-\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y} - 4\right)\,dy$$

è esatta, specificando in quale insieme e trovarne la primitiva che nel punto $(\pi, 4)$ vale -3.

Soluzione

ω è una forma di classe C^1 definita nei due semipiani $\Omega^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, $\Omega^- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$. Indicando con X e Y i coefficienti di ω risulta

$$X_y = \frac{-2x}{y^2}\cos\frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^3}\cos\frac{x}{y} = Y_x.$$

La forma differenziale è quindi chiusa, pertanto è esatta sia in Ω^+ che in Ω^- che sono insiemi semplicemente connessi. Cerchiamo ora una primitiva u integrando prima rispetto a y:

$$u(x,y) = \int -\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y} - 4\,dy + \phi(x) = x\sin\frac{x}{y} - 4y + \phi(x)$$

con ϕ funzione da determinare derivando rispetto a x:

$$u_x = \sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y} + \phi'(x).$$

Ma $u_x = X$ quindi:

$$\sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y} + \phi'(x) = \sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}.$$

Ne segue che $\phi'(x) = 0$ e $\phi(x) = c$. Allora $u(x,y) = x\sin\frac{x}{y} - 4y + c$. Ricaviamo c sapendo che deve essere $u(\pi, 4) = -3$. Quindi:

$$-3 = u(\pi, 4) = \pi\frac{\sqrt{2}}{2} - 16 + c, \qquad c = 13 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e la primitiva cercata è:

$$u(x,y) = x\sin\frac{x}{y} - 4y + 13 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Esercizio 6

Calcolare l'area della porzione di paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$ compresa fra i piani $z = 1$ e $z = 2$.

Soluzione

Il paraboloide è una superficie cartesiana di equazione $f(x, y) = x^2 + y^2$ definita sulla corona circolare $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$. Per calcolare l'area della superfice richiesta basterà quindi valutare l'integrale

$$\int_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, dx\, dy.$$

Risulta

$$f_x = 2x,\ \ f_y = 2y,\ \ |\nabla f|^2 = 4(x^2 + y^2)$$

quindi

$$\int_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, dx\, dy = \int_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dx\, dy.$$

Calcoliamo l'integrale passando alle coordinate polari. L'insieme D viene trasformato nel rettangolo $R = \left\{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \rho \leq \sqrt{2},\ \ 0 \leq \theta < 2\pi\right\}$. Allora

$$\int_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dx\, dy = \int_R \rho\sqrt{1 + 4\rho^2}\, d\rho\, d\theta = 2\pi \left[\frac{1}{12}(1 + 4\rho^2)^{3/2}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{6}(27 - 5^{3/2}).$$