Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 14 settembre 2004

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1

Data la sucessione di funzioni $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2 + (x-1)^{4n}}$ determinarne l'insieme di convergenza puntuale e la funzione limite. Dire inoltre se la convergenza è uniforme sull'insieme $[1, 3]$.

Soluzione

Osserviamo subito che la successione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, dato che il denominatore è somma di due addendi non negativi che non si annullano simultaneamente.
Se $|x-1| < 1$, cioè se $0 < x < 2$, risulta $\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)^{4n} = 0$, quindi $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{x}$. Se invece $|x-1| = 1$, cioè se $x = 0$ oppure $x = 2$, risulta $\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)^{4n} = 1$, quindi $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(2) = \dfrac{2}{5}$. Infine se $|x-1| > 1$, cioè per $x < 0$ oppure $x > 2$, si ha che $\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)^{4n} = +\infty$, quindi $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. L'insieme di convergenza puntale è quindi tutto $\mathbb{R}$. La funzione limite è

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } 0 < x < 2 \\ \dfrac{2}{5} & \text{se } x = 2 \\ 0 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Sull'insieme $[1, 3]$ non ci può essere convergenza uniforme, dato che le funzioni f_n sono continue su tale intervallo mentre la funzione limite non è continua nel punto $x = 2$.

Esercizio 2

Data la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{2x}\right)^n}{n}$ se ne determinino gli insiemi di convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale.

Soluzione

Eseguendo la sostituzione $\sqrt[3]{2x} = t$, la serie data diventa la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$$

che ha raggio di convergenza $R = 1$. Per $t = 1$ la serie è armonica divergente, per $t = -1$ la serie converge per il criterio di Leibnitz. Avremo quindi convergenza puntuale per $-1 \leq t < 1$, assoluta per $-1 < t < 1$ e totale per $-a \leq t \leq a$, con $0 < a < 1$. Per quanto riguarda la convergenza uniforme, il teorema di Abel ce la garantisce in insiemi del tipo $[-1, b]$, con $-1 < b < 1$. In termini di x avremo allora convergenza puntuale in $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, assoluta in $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, uniforme in $\left[-\frac{1}{2}, c\right]$ con $-\frac{1}{2} < c < \frac{1}{2}$ e totale in $[-d, d]$ con $0 < d < \frac{1}{2}$.

Esercizio 3

Calcolare la lunghezza della curva

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\, t\sqrt{t} \end{pmatrix} \qquad t \in \left[\frac{3}{2}\,, 4\right].$$

Soluzione

La velocità della curva è data da

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \sqrt{2t} \end{pmatrix}.$$

Quindi la lunghezza di γ è data da:

$$l(\gamma) = \int_{\frac{3}{2}}^{4} |\dot{\gamma}(t)|\; dt = \int_{\frac{3}{2}}^{4} \sqrt{1+2t}\, dt = \left[\frac{1}{3}(1+2t)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{3}{2}}^{4} = \frac{1}{3}(27-8) = \frac{19}{3}.$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 14 settembre 2004

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 4

Data la forma differenziale lineare $\omega(x,y,z) = \sqrt{z-y^2}\,dx - \dfrac{xy}{\sqrt{z-y^2}}\,dy + \dfrac{x}{2\sqrt{z-y^2}}\,dz$, determinarne l'insieme di definizione e la primitiva che nel punto $(1,0,1)$ vale 4.

Soluzione

La forma differenziale è definita nell'insieme $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > y^2\}$ che è semplicemente connesso, quindi l'eventuale chiusura di ω ne determinerà anche l'esattezza. Eseguiamo le derivate incrociate:

$$X_y = \frac{-y}{\sqrt{z-y^2}} = Y_x, \qquad X_z = \frac{1}{2\sqrt{z-y^2}} = Z_x, \qquad Y_z = \frac{1}{2}xy(z-y^2)^{-\frac{3}{2}} = Z_y.$$

La forma ω è quindi chiusa ed esatta in Ω. Toviamo ora una primitiva:

$$U(x,y,z) = \int \sqrt{z-y^2}\,dx + \phi(y,z) = x\sqrt{z-y^2} + \phi(y,z).$$

Derivando rispetto a y e ricordando che deve essere $U_y = Y$:

$$U_y = \frac{-xy}{\sqrt{z-y^2}} + \phi_y = Y = \frac{-xy}{\sqrt{z-y^2}}$$

quindi $\phi_y = 0$ e $\phi(y,z) = g(z)$. Allora

$$U(x,y,z) = x\sqrt{z-y^2} + g(z).$$

Deriviamo infine rispetto a z e uguagliamo a Z:

$$U_z = \frac{x}{2\sqrt{z-y^2}} + g'(z) = Z = \frac{x}{2\sqrt{z-y^2}}.$$

Ne segue che $g'(z) = 0$ e $g(z) = c$. Quindi

$$U(x,y,z) = x\sqrt{z-y^2} + c$$

con c da determinare sapendo che la primitiva assume il valore 4 nel punto $(1,0,1)$:

$$4 = U(1,0,1) = 1 + c \implies c = 3.$$

La soluzione del problema è quindi:

$$U(x,y,z) = x\sqrt{z-y^2} + 3.$$

Esercizio 5

Calcolare l'integrale superficiale
$$\int_{\Sigma} x^6 \arctan \frac{z}{y}\, d\sigma$$
dove Σ è la superfice descritta da
$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \frac{-1}{\sqrt{y^2 + z^2}},\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \frac{1}{9} \leq y^2 + z^2 \leq 1 \right\}.$$

Soluzione

Parametrizziamo la superficie nel seguente modo:
$$\begin{cases} x = \dfrac{-1}{\sqrt{\rho^2 \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\theta}} = -\dfrac{1}{\rho} \\ y = \rho\cos\theta \\ z = \rho\sin\theta \end{cases}$$
sul dominio $D = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{3} \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$. La matrice jacobiana della trasformazione è:
$$J(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$
il vettore normale alla superficie risulta:
$$N(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta \\ -\left(\dfrac{1}{\rho^2}\rho\cos\theta - 0\right) \\ -\dfrac{1}{\rho^2}\rho\sin\theta - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ -\dfrac{\cos\theta}{\rho} \\ -\dfrac{\sin\theta}{\rho} \end{pmatrix}$$
e il suo modulo:
$$|N| = \sqrt{\rho^2 + \frac{\cos^2\theta}{\rho^2} + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}} = \rho\sqrt{1 + \frac{1}{\rho^4}}.$$
Quindi
$$\int_{\Sigma} x^6 \arctan\frac{z}{y}\, d\sigma = \int_{D} \frac{1}{\rho^6} \arctan\left(\frac{\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta}\right) \rho\sqrt{1 + \frac{1}{\rho^4}}\, d\rho\, d\theta = \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{\rho^6}\rho\sqrt{1 + \frac{1}{\rho^4}}\, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\, d\theta$$
eseguiamo ora la sostituzione $t = \dfrac{1}{\rho^4}$ e l'integrale precedente diventa:
$$\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{81}^{1} -\frac{1}{4}\sqrt{1+t}\, dt = \frac{\pi^2}{32}\left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_{81}^{1} = -\frac{\pi^2}{48}\left((1+1)^{\frac{3}{2}} - (1+81)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\pi^2}{24}\left(41\sqrt{82} - \sqrt{2}\right).$$

Esercizio 6

Sia $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ il campo di vettori $F(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}} \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}} \end{pmatrix}$. Calcolare il lavoro compiuto dal campo lungo la curva che costituisce la frontiera del triangolo T di vertici $(3,1),\ (3,-5),\ (5,-2)$.

Soluzione

Dette X, Y le componenti del campo F, osserviamo che

$$X_y = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = Y_x$$

quindi il campo è conservativo in ogni dominio semplicemente connesso di $\mathbb{R}^2$. L'insieme di definizione di F è tutto il piano privato del disco di centro l'origine e raggio 1. Il triangolo T è contenuto nell'insieme di definizione, che tuttavia non è semplicemente connesso. Basta però osservare che T è contenuto anche nel semipiano $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 2\}$ che è un insieme semplicemente connesso. Ne consegue che il lavoro compiuto sulla frontiera di T, che è una curva chiusa regolare a tratti, è nullo.