Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

# Analisi Matematica III

Pisa, 12 luglio 2004

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

**Esercizio 1**

Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty}\int_3^5 n^2 \sin\frac{1}{2n^2x}\,dx.$$

**Soluzione**

Consideriamo la successione di funzioni $f_n(x) = n^2 \sin\frac{1}{2n^2x}$. Tale successione converge puntualmente nell'intervallo $[3,5]$ alla funzione limite $f(x) = \frac{1}{2x}$. Dimostriamo che la convergenza è anche uniforme. Valutiamo $\sup_{x\in[3,5]} |f(x) - f_n(x)|$. Osserviamo che dalla disuguaglianza $\sin t \le t$, valida per $t \ge 0$, si ottiene che $\frac{1}{2x} \ge n^2 \sin\frac{1}{2n^2x}$, quindi $|f(x) - f_n(x)| = \frac{1}{2x} - n^2\sin\frac{1}{2n^2x}$ e indichiamo quest'ultima funzione con $g_n(x)$. Deriviamo $g_n$ ottenendo:

$$g_n'(x) = \frac{1}{2x^2}\left(\cos\frac{1}{2n^2x} - 1\right) < 0$$

quindi $g_n$ è decrescente e raggiunge il suo massimo nell'estremo sinistro dell'intervallo $[3,5]$. Quindi

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[3,5]}|f(x) - f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} g_n(3) = f(3) - \lim_{n\to\infty} f_n(3) = 0$$

che prova la convergenza uniforme delle $f_n$ sull'intervallo $[3,5]$. Possiamo quindi passare il limite dentro l'integrale ottenendo:

$$\lim_{n\to\infty}\int_3^5 n^2\sin\frac{1}{2n^2x}\,dx = \int_3^5 \lim_{n\to\infty} n^2\sin\frac{1}{2n^2x}\,dx = \int_3^5 \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}[\log x]_3^5 = \frac{1}{2}(\log 5 - \log 3).$$

**Esercizio 2**

Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log x)^n}{n^5}.$$

**Soluzione**

La serie è definita per $x > 0$. Poniamo $t = \log x$ e trasformiamo la serie nella serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n^5}$. Dato che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^5}} = 1$, il criterio di Cauchy – Hadamard ci garantisce che il raggio di convergenza è uguale a 1. Quindi la serie converge assolutamente almeno nell'intrervallo $-1 < t < 1$. Osserviamo ora che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{t\in[-1,1]} \frac{t^n}{n^5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$$

che è una serie armonica generalizzata di esponente 5, quindi convergente. Ne segue che la serie converge totalmente per $t \in [-1, 1]$, quindi la serie originale converge totalmente per $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$. Tutti gli altri tipi di convergenza hanno luogo nello stesso insieme.

**Esercizio 3**

Calcolare la lunghezza della curva

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t\sqrt{t} \\ 3t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,5].$$

**Soluzione**

La velocità della curva risulta:

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{t} \\ \\ 3 \end{pmatrix}$$

e il suo modulo:

$$|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{\frac{9}{4}t + 9} = \frac{3}{2}\sqrt{t+4}.$$

Quindi la lunghezza della curva è:

$$l(\gamma) = \int_0^5 \frac{3}{2}\sqrt{t+4}\,dt = \Big[(t+4)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^5 = 9^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} = 19.$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

# Analisi Matematica III

Pisa, 12 luglio 2004

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

**Esercizio 4**

Data la forma differenziale $\omega(x,y) = \left(8x^2 - \frac{8x}{y}\right) dx + \left(2 + \frac{4x^2}{y^2}\right) dy$, se ne determini il dominio di definizione, si dica se è esatta, specificando in quale insieme, e se ne trovi la primitiva che nel punto $(-3,-2)$ vale 24.

**Soluzione**

La forma differenziale è definita nell'insieme $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$. Tale insieme non è connesso, quindi consideriamo $\omega$ in ciascuna delle sue due componenti connesse: $\Omega^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, $\Omega^- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$. Calcoliamo le derivate incrociate di $\omega$:

$$X_y = \frac{8x}{y^2} = Y_x$$

quindi $\omega$ è chiusa. Dato che sia $\Omega^+$ che $\Omega^-$ sono insiemi semplicemente connessi, si ha che $\omega$ è esatta in ciascuno dei due. Troviamo quindi una primitiva $u$ per $\omega$ in $\Omega^-$, dato che il punto $(-3,-2)$ appartiene a tale insieme.

$$u(x,y) = \int 8x^2 - \frac{8x}{y}\, dx + \phi(y) = \frac{8}{3}x^3 - \frac{4x^2}{y} + \phi(y)$$

con $\phi$ da determinare derivando il risultato rispetto a $y$ e confrontando con $Y$:

$$u_y = \frac{4x^2}{y^2} + \phi'(y) = 2 + \frac{4x^2}{y^2} = Y$$

quindi

$$\phi'(y) = 2 \implies \phi(y) = 2y + c$$

con $c$ da determinare utilizzando il valore assunto nel punto $(-3,-2)$:

$$u(x,y) = \frac{8}{3}x^3 - \frac{4x^2}{y} + 2y + c$$

$$24 = u(-3,-2) = \frac{8}{3}(-27) - \frac{4 \cdot 9}{-2} + 2(-2) + c = 54 + c$$

quindi $c = -30$ e

$$u(x,y) = \frac{8}{3}x^3 - \frac{4x^2}{y} + 2y - 30.$$

**Esercizio 5**

Calcolare l'area della superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1, 0 \le z \le 2+xy\}$.

**Soluzione**

La superficie è una porzione di cilindro circolare con asse coincidente con l'asse $z$ e base data dalla circonferenza unitaria nel piano $x, y$. Parametrizziamo $\Sigma$ attraverso la funzione $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\Phi(\theta, t) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ t \end{pmatrix}$$

dove $D \subset \mathbb{R}^2$ è il dominio che si ricava dalle disuguaglianze imposte sulla $z$:

$$D = \left\{(\theta,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le t \le 2+\cos\theta\sin\theta\right\}.$$

La matrice Jacobiana della funzione $\Phi$ è la seguente:

$$J\Phi(\theta,t) = \begin{pmatrix} -\sin\theta & 0 \\ \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e il vettore normale alla superfice $\Sigma$ è $N = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$. Il modulo di $N$, di conseguenza risulta:

$$|N| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta + 0} = 1.$$

L'area di $\Sigma$ sarà quindi:

$$\int_D 1\, d\theta\, dt = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2+\cos\theta\sin\theta} dt = \int_0^{2\pi} 2+\cos\theta\sin\theta\, d\theta = \left[2\theta - \frac{\cos(2\theta)}{4}\right]_0^{2\pi} = 4\pi.$$

## Esercizio 6

Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale $F(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ \\ x^2y \end{pmatrix}$ lungo la curva che ha per sostegno la frontiera del dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

## Soluzione

Indichiamo con $X$ e $Y$ le componenti del campo. Eseguendo le derivate incrociate si ottiene che $X_y = 2xy = Y_x$. Il dominio di definizione di $F$ è tutto $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso, quindi il campo è conservativo. Il dominio $D$ è la circonferenza unitaria, quindi la sua frontiera è una curva semplice e chiusa, pertanto il lavoro compiuto da $F$ lungo essa è nullo.