Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 21 giugno 2004

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1

Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = \dfrac{3n^2x^2}{5+2n^2x^2}$ determinandone l'insieme di convergenza puntuale e la funzione limite. Dire se la convergenza è uniforme sull'insieme di convergenza puntuale. Dire se la convergenza è uniforme sulla semiretta $(-\infty, -1]$.

Soluzione

Risulta

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

quindi l'insieme di convergenza puntuale è $\mathbb{R}$ e la funzione limite è

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

La convergenza in $\mathbb{R}$ non è uniforme perché le funzioni f_n sono continue mentre la funzione limite non è continua in 0. Vediamo la convergenza in $(-\infty, -1]$:

$$\sup_{x\le -1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\le -1} \left| \frac{3n^2x^2}{5+2n^2x^2} - \frac{3}{2} \right| = \sup_{x\le -1} \frac{15}{10+4n^2x^2} = \frac{15}{10+4n^2}$$

e questa quantità tende a 0 quando n tende a infinito. Ne segue che la successione di funzioni converge uniformemente sulla semiretta $(-\infty, -1]$.

Esercizio 2

Data la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, e^{-nx}$ trovarne gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme.

Soluzione

Eseguendo la sostituzione $y = e^{-x}$ la serie diventa la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, y^n$. Dato che $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1$, utilizzando il criterio di Cauchy – Hadamard si ottiene che il raggio di convergenza è 1. La serie quindi converge assolutamente almeno per $-1 < y < 1$, quindi per $x > 0$. Se $x = 0$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$ che diverge. L'insieme di convergenza puntuale (e assoluta) è quindi $(0, +\infty)$. La serie nella variabile y converge totalmente in ogni intervallo del tipo $[-\alpha, \alpha]$ con $0 < \alpha < 1$, quindi la serie originale converge totalmente (e uniformemente) sulle semirette del tipo $[a, +\infty)$ con $a > 0$.

Esercizio 3

Calcolare la lunghezza della curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\sin(3t) \\ 2\cos(3t) \\ 4t^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$ con $t \in [3, 8]$.

Soluzione

La velocità di γ è

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 6\cos(3t) \\ -6\sin(3t) \\ 6\sqrt{t} \end{pmatrix}$$

quindi

$$|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{36\cos^2(3t) + 36\sin^2(3t) + 36t} = 6\sqrt{1+t}.$$

La lunghezza di γ è quindi:

$$l(\gamma) = \int_3^8 6\sqrt{1+t}\,dt = 6\left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_3^8 = 4\left(9^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) = 76.$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 21 giugno 2004

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 4

Siano ω la forma differenziale $\omega(x,y) = \dfrac{2y}{x^2+4y^2}\,dx - \dfrac{2x}{x^2+4y^2}\,dy$ e γ la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $t \in [0, 2\pi]$. Calcolare $\int_\gamma \omega$.

Soluzione

Poniamo $X = \dfrac{2y}{x^2+4y^2}$, $Y = -\dfrac{2x}{x^2+4y^2}$ ed eseguiamo le derivate incrociate:

$$X_y = 2\,\frac{x^2-4y^2}{(x^2+4y^2)^2} = Y_x$$

la forma differenziale è quindi chiusa. L'insieme di definizione di ω è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ che non è semplicemente connesso, quindi non possiamo concludere che ω sia esatta (come in effetti non è). Possiamo tuttavia calcolare l'integrale invece che su γ, su un'altra curva che giri intorno all'origine una volta sola, come ad esempio l'ellisse di equazioni parametriche $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $t \in [0, 2\pi]$. In questo modo i calcoli risultano molto più facili, infatti:

$$\dot{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

quindi

$$\int_\gamma \omega = \int_\alpha \omega = \int_0^{2\pi} \frac{2\sin t}{4\cos^2 t + 4\sin^2 t}\,(-2\sin t) + \frac{4\cos t}{4\cos^2 t + 4\sin^2 t}\,\cos t\,dt =$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{-4\sin^2 t - 4\cos^2 t}{4}\,dt = -2\pi.$$

Esercizio 5

Calcolare l'integrale superficiale $\int\limits_{\Sigma} yz\, d\sigma$ dove Σ è il grafico della funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ relativo al dominio triangolare T di vertici $(0,0),\ (1,2),\ (1,-1)$.

Soluzione

Dato che Σ è una superficie cartesiana risulta:

$$\int\limits_{\Sigma} yz\, d\sigma = \int\limits_{T} y\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dxdy.$$

Calcoliamo quindi il gradiente di f:

$$\nabla f = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \qquad \sqrt{1+|\nabla f|^2} = \sqrt{2}.$$

L'insieme T è un dominio normale rispetto all'asse y, infatti:

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ -x \le y \le 2x\right\}.$$

Quindi l'integrale cercato è dato da:

$$\int\limits_{T} y\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}\, dxdy = \sqrt{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x}^{2x} y\sqrt{x^2+y^2}\, dy = \sqrt{2}\int\limits_0^1 \left[\frac{1}{3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{y=-x}^{y=2x} dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\int\limits_0^1 \left(5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right) x^3\, dx = \frac{\sqrt{2}}{12}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}) = \frac{5}{12}\sqrt{10} - \frac{1}{3}.$$

Esercizio 6

Determinare l'insieme di definizione della forma differenziale

$$\omega(x,y) = \left(2 + \frac{y^3}{x^2}\right) dx + \left(y - \frac{3y^2}{x}\right) dy.$$

Dire se ω è esatta specificando in quali insiemi e determinarne la primitiva che nel punto $(1,2)$ vale 5.

Soluzione

La forma differenziale è definita per $x \neq 0$, quindi nell'unione dei due semipiani

$$\pi_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\},\ \pi_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}.$$

Indicando con X e Y i coefficienti di ω risulta:

$$X_y = \frac{3y^2}{x^2} = Y_x$$

quindi ω è chiusa. L'insieme di definizione non è connesso ma ognuno dei due semipiani è connesso e semplicemente connesso, quindi sia in π_1 che in π_2 la forma è esatta. Dato che il punto $(1,2) \in \pi_1$ cercheremo una primitiva in tale insieme. Cerchiamo $u(x,y)$ tale che $u_x = X$ quindi

$$u(x,y) = \int 2 + \frac{y^3}{x^2}\, dx + \phi(y) = 2x - \frac{y^3}{x} + \phi(y)$$

con ϕ da determinare. Dovendo essere $u_y = Y$ si ha che:

$$u_y = -\frac{3y^2}{x} + \phi'(y) = y - \frac{3y^2}{x} = Y$$

quindi

$$\phi'(y) = y \Longrightarrow \phi(y) = \frac{y^2}{2} + c.$$

Allora

$$u(x,y) = 2x - \frac{y^3}{x} + \frac{y^2}{2} + c$$

con c da determinare utilizzando il valore che u deve assumere nel punto $(1,2)$:

$$5 = u(1,2) = 2 - \frac{8}{1} + \frac{4}{2} + c = -4 + c \qquad \Longrightarrow c = 9.$$

Quindi

$$u(x,y) = 2x - \frac{y^3}{x} + \frac{y^2}{2} + 9.$$