Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 31 maggio 2004

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1

Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = \dfrac{e^{-2nx}}{n^2x^2+3}$. Trovare l'insieme di convergenza puntuale e la funzione limite. Dire se la successione converge uniformemente sull'insieme di convergenza puntuale e sull'insieme $[3, +\infty)$.

Soluzione

Risulta

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{1}{3} & \text{se } x = 0 \\ +\infty & \text{se } x < 0 \end{cases} .$$

quindi l'insieme di convergenza puntuale è $I = [0, +\infty)$. La funzione limite è

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{1}{3} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Le funzioni f_n sono continue in I, la funzione limite non lo è, quindi non c'è convergenza uniforme in I.

$$\sup_{x\geq 3} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\geq 3} f_n(x) = \sup_{x\geq 3} \frac{e^{-2nx}}{n^2x^2+3}$$

che è decrescente, quindi il massimo viene assunto nel punto $x = 3$. Dato che $\lim_{n\to\infty} f_n(3) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{e^{-6n}}{9n^2+3} = 0$ c'è convergenza uniforme in $[3, +\infty)$.

Esercizio 2

Trovare gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x + 3)}{n^2 + 3}.$$

Determinare inoltre l'insieme di convergenza puntuale della serie delle derivate.

Soluzione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\sin(n^2 x + 3)}{n^2 + 3} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

quindi la serie converge totalmente (e anche uniformemente e puntualmente) in tutto $\mathbb{R}$. La serie delle derivate risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cos(n^2 x + 3)}{n^2 + 3}$$

che non converge per nessun valore di x poiché il termine generale non è infinitesimo.

Esercizio 3

Trovare il versore tangente alla curva

$$\gamma = \begin{pmatrix} e^{t+2} + 1 \\ \log(3+t) + 2t \end{pmatrix}$$

nel punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Soluzione

Determiniamo per quale valore di t la curva γ passa per il punto P risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} e^{t+2} + 1 = 2 \\ \log(3+t) + 2t = -4 \end{cases}$$

che ha come soluzione $t = -2$. La velocità di γ è data da:

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} e^{t+2} \\ \\ \dfrac{1}{3+t} + 2 \end{pmatrix}$$

che, calcolata nel punto $t = -2$, risulta $\dot{\gamma}(-2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Il suo modulo è: $|\dot{\gamma}(-2)| = \sqrt{10}$, quindi il versore tangente a γ in P è $\tau = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ \dfrac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 31 maggio 2004

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 4

Calcolare l'integrale superficiale:

$$\int_S x + y + z \, d\sigma$$

dove $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, \ y \geq 0\}$.

Soluzione

La superficie è di tipo cartesiano. Infatti, ponendo $D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 \leq 4\}$ e $f(x, z) = \sqrt{4 - x^2 - z^2}$, possiamo vedere S come grafico di f su D. Risulta $f_x = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - z^2}}$, $f_z = \dfrac{-z}{\sqrt{4 - x^2 - z^2}}$, quindi $\sqrt{1 + |\nabla f|^2} = \dfrac{2}{\sqrt{4 - x^2 - z^2}}$. Allora:

$$\int_S x + y + z \, d\sigma = \int_D \left(x + \sqrt{4 - x^2 - z^2} + z \right) \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - z^2}} \, dx \, dz = 2 \int_D \frac{x + z}{\sqrt{4 - x^2 - z^2}} + 1 \, dx \, dz =$$

$$= 2 \text{ misura}(D) + 2 \int_D \frac{x + z}{\sqrt{4 - x^2 - z^2}} \, dx \, dz.$$

L'ultimo integrale si calcola facilmente trasformandolo in coordinate polari:

$$\int_D \frac{x + z}{\sqrt{4 - x^2 - z^2}} \, dx \, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \frac{\rho \cos \theta + \rho \sin \theta}{\sqrt{4 - \rho^2}} \rho \, d\rho = 0$$

quindi

$$\int_S x + y + z \, d\sigma = 2 \text{ misura}(D) = 8\pi.$$

Esercizio 5

Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale $F(x,y) = \begin{pmatrix} \log(x+y) + \dfrac{x}{x+y} \\ \dfrac{x}{x+y} \end{pmatrix}$ lungo la curva che ha per sostegno l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0\}$.

Soluzione

Calcoliamo le derivate incrociate di F:

$$X_y = \frac{y}{(x+y)^2} = Y_x$$

Quindi, poiché l'insieme di definizione è il semipiano $x + y > 0$, che è un dominio semplicemente connesso, risulta che F è un campo conservativo. La curva in questione è una circonferenza di raggio 1 con centro nel punto $(3,0)$ che è tutta contenuta nel dominio di F. Ne segue che l'integrale di F sulla curva vale zero.

Esercizio 6

Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{x^2+y}{\sqrt{5+4z^2}}\,ds$$

dove γ è la curva definita da $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2-2 \\ t \end{pmatrix}$ $t \in [-1,2]$.

Soluzione

Calcoliamo il modulo della velocità di γ:

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |\dot\gamma(t)| = \sqrt{5+4t^2}.$$

$$\int_\gamma \frac{x^2+y}{\sqrt{5+4z^2}}\,ds = \int_{-1}^{2} \frac{4t^2+t^2-2}{\sqrt{5+4t^2}}\sqrt{5+4t^2}\,dt = \left[\frac{5t^3}{3} - 2t\right]_{-1}^{2} = \frac{5}{3}8 - 4 - \left(-\frac{5}{3}+2\right) = 9.$$