Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 10 febbraio 2004

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1

Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = 3nx\left(3-x^2\right)^n$. Trovare l'insieme di convergenza puntuale e la funzione limite. Dire inoltre se la successione converge uniformemente sull'insieme di convergenza puntuale.

Soluzione

Osserviamo che $f_n(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ quindi nel punto $x = 0$ la successione converge. Risulta

$$\lim_{n\to\infty} 3nx\left(3-x^2\right)^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |3-x^2| < 1 \text{ oppure } x = 0 \\ +\infty & \text{se } 3-x^2 \geq 1 \end{cases}$$

negli altri casi il limite non esiste. L'insieme di convergenza puntuale sarà quindi quello dove $|3-x^2| < 1$ oppure $x = 0$, cioè $I_{cp} = \left(-2, -\sqrt{2}\right) \cup \{0\} \cup \left(\sqrt{2}, 2\right)$. La funzione limite è la funzione identicamente nulla (definita su I_{cp}). La convergenza su I_{cp} non è uniforme perché non vale il teorema sullo scambio del limite nel punto $x = \sqrt{2}$; infatti:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\sqrt{2}^+} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 3n = \infty$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^+} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\sqrt{2}^+} 0 = 0.$$

Esercizio 2

Trovare gli insiemi di convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}$$

Soluzione

La serie non è definita per $x = -2$. Eseguendo il cambiamento di variabile $\dfrac{1}{x+2} = t$ otteniamo la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n$. Dato che $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$, il criterio di Cauchy–Hadamard ci garantisce che il raggio di convergenza è 1. Quindi avremo convergenza assoluta almeno quando $\left|\dfrac{1}{x+2}\right| < 1$, cioè se $|x+2| > 1$, che corrisponde all'unione delle soluzioni delle due disuguaglianze $x > -1$ e $x < -3$. Verifichiamo la convergenza puntuale per $t = \pm 1$ cioè per $x = -1$ e $x = -3$. Se $x = -1$ otteniamo la serie armonica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che diverge. Se $x = -3$ otteniamo la serie a segni alterni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge per il criterio di Leibnitz. L'insieme di convergenza puntuale è quindi $(-\infty, -3] \cup (-1, +\infty)$ e quello di convergenza assoluta è $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$. Per la convergenza totale e uniforme osserviamo che la serie di potenze nella variabile t converge totalmente se $t \in [-a, a]$ con $0 < a < 1$ e uniformemente se $t \in [-1, b]$, con $-1 < b < 1$, per il teorema di Abel. Ne segue che la serie data converge totalmente quando $\left|\dfrac{1}{x+2}\right| \leq a$, cioè se $x \geq \dfrac{1}{a} - 2$ oppure se $x \leq -2 - \dfrac{1}{a}$. In definitiva avremo convergenza totale su insiemi del tipo $(-\infty, b] \cup [c, +\infty)$ con $b < -3$ e $c > -1$. La convergenza uniforme sarà invece sulla semiretta $(-\infty, -3] \cup [c, +\infty)$.

Esercizio 3

Calcolare la lunghezza della curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t - 1 + \cos t \\ t - \sin t + 1 - \cos t \end{pmatrix}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Dire inoltre se la curva è regolare.

Soluzione

Calcoliamo la velocità della curva:

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t - \sin t \\ 1 - \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

$$|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{1 + \cos^2 t + \sin^2 t - 2\cos t + 1 + \cos^2 t + \sin^2 t - 2\cos t} = 2\sqrt{1 - \cos t}.$$

Quindi la lunghezza di gamma è:

$$\int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{1 - \cos t}\, dt = 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = 2\sqrt{2}\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8\sqrt{2}.$$

La curva γ è regolare se e solo se $|\dot{\gamma}(t)| \neq 0$ per ogni $t \in [0, 2\pi]$. Ma per $t = 0$ e $t = 2\pi$ risulta $2\sqrt{1 - \cos t} = 0$, quindi γ non è regolare.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 10 febbraio 2004

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 4

Calcolare l'area della superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4,\ (x-1)^2+z^2 \le 1\}$.

Soluzione

La superficie in questione è la porzione di una sfera con centro nell'origine e raggio 2 contenuta nel cilindro con asse parallelo all'asse y e sezione nel piano x, z data dal cerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1 (tale superficie prende il nome di "Finestra di Viviani"). La superficie è l'unione di due superfici cartesiane simmetriche; infatti possiamo ricavare y in funzione di x e z ottenendo $y = \pm\sqrt{4-x^2-z^2}$. Poniamo quindi $f(x,z) = \sqrt{4-x^2-z^2}$ e indichiamo con Σ_1 il suo grafico sul dominio $D = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2+z^2 \le 1\}$. Calcoliamo il gradiente di f:

$$f_x = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-z^2}}, \qquad f_z = \frac{-z}{\sqrt{4-x^2-z^2}}.$$

Quindi l'area di Σ_1 è data da:

$$\int_D \sqrt{1+|\nabla f|^2}\,dx\,dz = \int_D \frac{2\,dx\,dz}{\sqrt{4-x^2-z^2}}.$$

Eseguendo il passaggio alle coordinate polari: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ z = \rho\sin\theta \end{cases}$ il dominio D si strasforma nel dominio $D^* = \left\{(\rho,\theta) : -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le 2\cos\theta\right\}$. Quindi l'integrale precedente diventa:

$$\int_{D^*} \frac{2\rho\,d\rho\,d\theta}{\sqrt{4-\rho^2}} = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \frac{\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}\,d\rho = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big[-\sqrt{4-\rho^2}\Big]_0^{2\cos\theta} d\theta = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2-2|\sin\theta|\,d\theta =$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\sin\theta\,d\theta = 8\Big[\theta+\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi-8.$$

Quindi l'area di Σ è uguale a $8\pi-16$.

Esercizio 5

Dire se la forma differenziale lineare

$$\omega(x, y, z) = (-4x^3 - y^2z + z^3)\, dx + (4y^3 + 3y^2z - 2xyz)\, dy + (y^3 - xy^2 + 3xz^2 + \sqrt{z})\, dz$$

è esatta e, in caso affermativo, determinarne una primitiva specificandone l'insieme di definizione.

Soluzione

Indichiamo con $X,\ Y,\ Z$ i coefficienti di ω. Eseguendo le derivate incrociate troviamo:

$$X_y = -2zy = Y_x, \qquad X_z = -y^2 + 3z^2 = Z_x, \qquad Y_z = 3y^2 - 2xy = Z_y$$

quindi la forma differenziale è chiusa. L'insieme di definizione di ω è il semispazio $\{z \geq 0\}$ che è un insieme semplicemente connesso, quindi la forma differenziale è anche esatta. Per trovare una primitiva u integriamo X rispetto alla variabile x:

$$u(x, y, z) = \int -4x^3 - y^2 + z^3\, dx + \phi(y, z) = -x^4 - y^2zx + z^3x + \phi(y, z)$$

con ϕ da determinare derivando rispetto a y e uguagliando a Y:

$$u_y = -2yzx + \phi_y = Y = 4y^3 + 3y^2z - 2xyz$$

quindi

$$\phi_y = 4y^3 + 3y^2z.$$

Integriamo ora rispetto a y:

$$\phi(y, z) = \int 4y^3 + 3y^2z\, dy + g(z) = y^4 + y^3z + g(z)$$

quindi

$$u(x, y, z) = -x^4 - y^2zx + z^3x + y^4 + y^3z + g(z)$$

con $g(z)$ da determinare derivando rispetto a z e uguagliando a Z:

$$u_z = -y^2x + 3z^2x + y^3 + g'(z) = Z = y^3 - xy^2 + 3xz^2 + \sqrt{z}$$

quindi

$$g'(z) = \sqrt{z}, \qquad g(z) = \int \sqrt{z}\, dz + c = \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} + c.$$

Ne segue che una primitiva per ω è la funzione

$$u(x, y, z) = -x^4 - y^2zx + z^3x + y^4 + y^3z + \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} + c$$

con c costante arbitraria.

Esercizio 6

Calcolare l'integrale superficiale $\int_{\Sigma} x^2 + y^2 \, d\sigma$ dove Σ è la superficie di equazioni parametriche $\phi(\theta, \alpha) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\alpha \\ \sin\theta\sin\alpha \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ definita sul dominio $D = \{(\theta, \alpha) : 0 \leq \theta \leq \pi, \ 0 \leq \alpha \leq \pi\}$.

Soluzione

La superficie è una semisfera di raggio 1 centrata nell'origine . Calcoliamo la matrice Jacobiana:

$$J\phi(\theta, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\alpha & -\sin\theta\sin\alpha \\ \cos\theta\sin\alpha & \sin\theta\cos\alpha \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

e il vettore normale:

$$N = \begin{pmatrix} \sin^2\theta\cos\alpha \\ \sin^2\theta\sin\alpha \\ \cos\theta\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Quindi il modulo del vettore normale risulta:

$$|N| = \sqrt{\sin^4\theta\cos^2\alpha + \sin^4\theta\sin^2\alpha + \cos^2\theta\sin^2\theta} = |\sin\theta|\sqrt{\sin^2\theta(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + \cos^2\theta} = |\sin\theta|.$$

Allora:

$$\int_{\Sigma} x^2+y^2 \, d\sigma = \int_{D} (\sin^2\theta\cos^2\alpha+\sin^2\theta\sin^2\alpha)|\sin\theta| \, d\theta \, d\alpha = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin^2\theta|\sin\theta| \, d\alpha = \pi \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta =$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \sin\theta(1-\cos^2\theta) \, d\theta = \pi \int_1^{-1} (1-t^2)(-1) \, dt = \pi \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}\pi.$$