Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 27 gennaio 2004

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1

Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{3 + n^2 x^2}$ sulla semiretta $x > 0$. Trovare l'insieme di convergenza puntuale e la funzione limite. Dire inoltre se la successione converge uniformemente sugli insiemi $(0, +\infty)$ e $[1, +\infty)$.

Soluzione

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 x}{3 + n^2 x^2} = \frac{1}{x} \qquad \forall x > 0$$

quindi l'insieme di convergenza puntuale è $x > 0$ e la funzione limite è $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{n^2 x}{3 + n^2 x^2} - \frac{1}{x} \right| = \frac{3}{x(1 + n^2 x^2)}$$

quindi

$$\sup_{x>0} |f_n(x) - f(x)| \geq \lim_{x\to 0^+} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$$

e la successione non converge uniformemente sulla semiretta $x > 0$. Per la convergenza su $[1, +\infty)$ osserviamo che $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{3}{x(1 + n^2 x^2)}$ è una funzione decrescente, dato che il denominatore è crescente, quindi il massimo viene assunto nell'estremo sinistro della semiretta, cioè per $x = 1$. Quindi

$$\sup_{x\geq 1} |f_n(x) - f(x)| = \frac{3}{1(1 + n^2)} \longrightarrow 0 \qquad \text{per } n \to \infty$$

Ne segue che la successione converge uniformemente sulla semiretta $x \geq 1$.

Esercizio 2

Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+2n)(x+3+n)}$ per $x \geq 0$.

Soluzione

La serie è a termini positivi e per ogni $x \geq 0$ valgono le disuguaglianze:

$$\frac{1}{(x+2n)(x+3+n)} \leq \frac{1}{2n(3+n)} \leq \frac{1}{2n^2}$$

quindi risulta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\geq 0} \left| \frac{1}{(x+2n)(x+3+n)} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

e l'ultima serie è una serie numerica convergente, quindi la serie data converge totalmente su tutta la semiretta $[0, +\infty)$. In tale insieme si ha quindi anche convergenza uniforme e puntuale.

Esercizio 3

Calcolare gli integrali curvilinei $\int_\gamma x\,ds$ e $\int_\gamma y\,ds$ dove γ è la curva che ha per sostegno l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4,\ y \geq |x|\}$.

Soluzione

La curva è un arco di circonferenza di raggio 2, centro $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e ampiezza $\frac{\pi}{2}$. Possiamo parametrizzare γ nel seguente modo:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} \qquad t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right].$$

Quindi

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} \qquad |\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} = 2.$$

Allora

$$\int_\gamma x\,ds = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 2\cos t\,\cdot 2\,dt = 4\Big[\sin t\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = 0$$

$$\int_\gamma y\,ds = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 2\sin t\,\cdot 2\,dt = 4\Big[-\cos t\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = -4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}.$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 27 gennaio 2004

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 4

Si calcoli l'area della superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Soluzione

La superficie è la porzione di un cilindro con base circolare unitaria nel piano $y = 0$ avente per asse l'asse y, delimitata dal cilindro "verticale" $x^2 + y^2 \leq 1$. Se poniamo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, Σ è l'unione di due superfici cartesiane aventi D come dominio di base:

$$\Sigma_1 = \text{graph}(f_1), \qquad f_1(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\Sigma_2 = \text{graph}(f_2), \qquad f_2(x, y) = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Data la simmetria delle due superfici risulta $\text{Area}(\Sigma) = 2\text{Area}(\Sigma_1)$.
Per il calcolo dell'area di Σ_1 utilizziamo la ben nota formula valida per le superfici cartesiane:

$$\text{Area}(\Sigma_1) = \int_D \sqrt{1 + |\nabla f_1|^2}\, dx\, dy$$

Calcoliamo il gradiente di f_1:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$$

quindi

$$\text{Area}(\Sigma_1) = \int_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}\, dx\, dy = \int_D \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}}\, dx\, dy$$

Consideriamo ora D come un dominio normale rispetto all'asse y, cioè:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1,\ -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\right\}$$

Quindi l'integrale precedente risulta:

$$\int_D \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}}\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}}\, dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}}\ 2\sqrt{1 - x^2}\, dx = 4.$$

Ne segue che l'area di Σ è 8.

Esercizio 5

Dire se la forma differenziale lineare

$$\omega = (\cos y \cos x + \cos(z-x))\ dx + (\sin(y+z) - \sin y \sin x)\ dy + (\sin(y+z) - \cos(z-x) + \log z)\ dz$$

è esatta e, in caso affermativo, determinarne una primitiva.

Soluzione

La forma differenziale $\omega = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ è definita nel semispazio $z > 0$. Calcoliamo le derivate incrociate:

$$X_y = -\sin y \cos x = Y_x$$

$$X_z = -\sin(z-x) = Z_x$$

$$Y_z = \cos(y+z) = Z_y$$

quindi ω è chiusa e, dato che il suo insieme di definizione è semplicemente connesso, ω è anche esatta. Cerchiamo una primitiva:

$$u(x,y,z) = \int \cos y \cos x + \cos(z-x)\,dx + \varphi(y,z) = \cos y \sin x - \sin(z-x) + \varphi(y,z)$$

con $\varphi(y,z)$ funzione da determinare. Derivando rispetto a y l'equazione precedente si ottiene:

$$u_y = -\sin y \sin x + \varphi_y$$

e, ponendo $u_y = Y$ si ha:

$$\varphi_y = \sin(y+z)$$

quindi

$$\varphi(y,z) = \int \sin(y+z)\,dy + g(z) = -\cos(y+z) + g(z)$$

con g funzione da determinare. Sostituiamo il risultato ottenuto nell'equazione che definisce u e deriviamo rispetto a z:

$$u(x,y,z) = \cos y \sin x - \sin(z-x) + \varphi(y,z) = \cos y \sin x - \sin(z-x) - \cos(y+z) + g(z)$$

$$u_z = -\cos(z-x) + \sin(y+z) + g'(z).$$

Sostituendo il risultato ottenuto nell'equazione $u_z = Z$ si ha:

$$g'(z) = \log z$$

quindi

$$g(z) = \int \log z\,dz + c = \frac{1}{z} + c, \qquad z > 0$$

con c costante arbitraria. Una primitiva di ω è quindi la funzione

$$u(x,y,z) = \cos y \sin x - \sin(z-x) - \cos(y+z) + \frac{1}{z} + c.$$

Esercizio 6

Trovare l'area del segmento ellittico $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4,\ x \geq 1\}$ facendo uso delle formule di Gauss–Green.

Soluzione

Dalle fornule di Gauss–Green abbiamo:

$$\text{area}(E) = \int_E 1\, dx\, dy = \int_{+\partial E} x\, dy$$

Parametrizziamo quindi la frontiera di E che risulta formata da due curve regolari: un segmento di retta parallela all'asse y e un arco di ellisse. Le due curve si intersecano nei punti dove l'ellisse interseca la retta $x = 1$, quindi ricaviamo la y dal sistema

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ x = 1 \end{cases} \qquad \Longrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Parametrizziamo il segmento come una curva $\gamma_1(t)$ che sarà percorsa "verso il basso" per orientare positivamente la frontiera, quindi risulta

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix} \qquad t \in \left[\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

L'ellisse invece ha una parametrizzazione data da

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

ma resta da determinare l'intervallo di variazione della t. Per fare questo basta osservare che nei punti iniziali e finali della curva la x vale 1. Basta quindi risolvere l'equazione $2\cos t = 1$ che ha per soluzione i due valori $t = \pm\frac{\pi}{3}$; abbiamo allora che $t \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$. Calcoliamo ora le velocità delle due curve:

$$\dot{\gamma}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \dot{\gamma}_2(t) = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Possiamo ora determinare l'area di E:

$$\text{area}(E) = \int_{+\partial E} x\, dy = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 1(-1)\, dt + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 2\cos t \cos t\, dt = -\sqrt{3} + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 1 + \cos(2t)\, dt =$$

$$= -\sqrt{3} + \left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$