Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 8 gennaio 2004

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1

Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = \dfrac{\sqrt[3]{n}x}{1+nx^2}$. Determinare l'insieme di convergenza puntuale, la funzione limite e dire se la convergenza è uniforme sull'insieme di convergenza puntuale.

Soluzione

La successione è definita su tutta la retta reale e per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. L'insieme di convergenza puntuale è quindi $\mathbb{R}$ e la funzione limite è $f(x) = 0$.
Le funzioni f_n sono dispari, è quindi sufficiente studiarle per $x > 0$. Per valutare la convergenza uniforme calcoliamo $\sup_{x>o} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x>0} f_n(x)$. Deriviamo la funzione ottenendo $f_n'(x) = \sqrt[3]{n}\,\dfrac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$. Risulta quindi $f_n'(x) > 0$ se $0 \le x < \sqrt{\dfrac{1}{n}}$, e $f_n'(x) < 0$ se $x > \sqrt{\dfrac{1}{n}}$. Il punto $x = \sqrt{\dfrac{1}{n}}$ è quindi punto di massimo assoluto. Ne segue che $\sup_{x>o} |f_n(x) - f(x)| = f_n\left(\sqrt{\dfrac{1}{n}}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt[6]{n}}$. Quindi, poiché $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2\sqrt[6]{n}} = 0$, la successione converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

Esercizio 2

Studiare la convergenza puntuale uniforme assoluta e totale della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{2n}$. Calcolare la somma della serie.

Soluzione

Effettuando la sostituzione $x^2 = t$ otteniamo la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)t^n$. Poiché $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$ abbiamo che il raggio di convergenza della serie è $R = 1$. Ne segue che la serie converge assolutamente almeno per $-1 < t < 1$, quindi per $-1 < x < 1$. Per $x = \pm 1$ la serie non converge perché il termine generale non è infinitesimo. L'insieme di convergenza puntuale e assoluta è quindi $(-1, 1)$. La convergenza totale e uniforme avviene, per ben noti risultati sulle serie di potenze, in insiemi del tipo $[-a, a]$ con $0 < a < 1$.

Indichiamo ora con $\varphi(t)$ la somma della serie nella variabile t, cioè $\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)t^n$. Per ogni $s \in (0, 1)$ possiamo integrare per serie (data la convergenza uniforme su insiemi del tipo $[-s-\epsilon, s+\epsilon]$ con $s+\epsilon < 1$.) Quindi

$$\int_0^s \varphi(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\int_0^s t^n\, dt = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^s = \sum_{n=1}^{\infty} s^{n+1} = s^2\sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1} = s^2\sum_{m=0}^{\infty} s^m = \frac{s^2}{1-s}.$$

quindi

$$\varphi(s) = \frac{d}{ds}\frac{s^2}{1-s} = \frac{2s-s^2}{(1-s)^2}.$$

La somma della serie si ottiene effettuando la sostituzione $s = x^2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{2n} = \varphi\left(x^2\right) = \frac{2x^2 - x^4}{\left(1-x^2\right)^2}\ .$$

Esercizio 3

Sia γ la curva che ha per sostegno l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma xy\,ds$.

Soluzione

La curva γ è l'arco di ellisse, contenuto nel primo quadrante, con centro nell'origine e semiassi di lunghezza 1 e 2. Possiamo parametrizzare γ nel seguente modo:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Quindi

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} \qquad |\dot\gamma(t)| = \sqrt{1 + 3\cos^2 t}.$$

Allora

$$\int_\gamma xy\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \sin t \sqrt{1 + 3\cos^2 t}\,dt = -\int_1^0 2\xi\sqrt{1+3\xi^2}\,d\xi = 2\left[\left(1+3\xi^2\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3}\frac{1}{6}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{9}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{14}{9}\ .$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 8 gennaio 2004

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 4

Calcolare l'area della superficie

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = 2xy,\ 1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 4 \right\}.$$

Soluzione

La superficie è l'unione di due superfici cartesiane, simmetriche rispetto al piano $z = 0$, di equazione rispettivamente $z = \sqrt{2xy}$, $z = -\sqrt{2xy}$ e dominio di base $D = [1,2] \times [1,4]$. L'area di ciasuna delle due superfici sarà quindi

$$\int_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy.$$

$$z_x = \frac{\sqrt{2y}}{2\sqrt{x}}\ , \qquad z_y = \frac{\sqrt{2x}}{2\sqrt{y}}.$$

Quindi

$$\mathrm{area}(\Sigma) = 2\int_{\mathrm{D}} \sqrt{1 + \frac{2\mathrm{y}}{4\mathrm{x}} + \frac{2\mathrm{x}}{4\mathrm{y}}}\, \mathrm{dx\, dy} = 2\int_{\mathrm{D}} \sqrt{\frac{(\mathrm{x}+\mathrm{y})^2}{2\mathrm{xy}}}\, \mathrm{dx\, dy} = \sqrt{2}\int_1^2 \mathrm{dx} \int_1^4 \frac{\mathrm{x}+\mathrm{y}}{\sqrt{\mathrm{xy}}}\, \mathrm{dy} =$$

$$= \sqrt{2}\int_1^2 \left[2\sqrt{xy} + \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 dx = \sqrt{2}\int_1^2 2\sqrt{x} + \frac{14}{3\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{2}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{28}{3}\sqrt{x} \right]_1^2 = 24 - \frac{32}{3}\sqrt{2}\ .$$

Esercizio 5

Calcolare il lavoro compiuto dal campo $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy \\ y^2 \\ 3z^2 \end{pmatrix}$ dal punto $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ al punto $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3\pi \end{pmatrix}$ lungo l'arco di curva di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 3t \end{cases}$

Soluzione

Quando il punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ si muove da A a B il parametro t varia nell'intrevallo $[0, \pi]$. La curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ 3t \end{pmatrix}$ avrà un vettore velocità $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 3 \end{pmatrix}$. Il lavoro compiuto dal campo lungo γ sarà quindi:

$$\int_\gamma F \cdot \tau \, ds = \int_0^\pi 2(2\cos t \, 2\sin t)(-2\sin t) + 4\sin^2 t \, 2\cos t + 3 \cdot 9t^2 \, 3 \, dt = \int_0^\pi -8\sin^2 t \cos t + 81t^2 \, dt =$$

$$= \left[\frac{-8\sin^3 t}{3} + \frac{81}{3} t^3 \right]_0^\pi = 27\pi^3 \; .$$

Esercizio 6

Si consideri la forma differenziale lineare

$$\omega = \left(3x^2 + 2y^2 + 2xz + 2xz^2\right)\, dx + (4xy + 2yz)\, dy + \left(x^2 + y^2 + 2x^2 z\right)\, dz.$$

Si calcoli $\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^{\sin t} \\ \log\left(\sin^2 t + 1\right) \\ \cos^5 t \end{pmatrix}$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Soluzione

La forma differenziale $\omega = X\, dx + Y\, dy + Z\, dz$ è chiusa infatti:

$$X_y = 4y = Yx, \qquad X_z = 2x + 4xz = Z_x, \qquad Y_z = 2y = Z_y.$$

Dato che ω è definita in tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$, che è un insieme semplicemente connesso, ω è anche esatta. Cerchiamo una primitiva di ω:

$$u(x, y, z) = \int \left(3x^2 + 2y^2 + 2xz + 2xz^2\right)\, dx + \varphi(y, z) = x^3 + 2y^2 x + x^2 z + x^2 z^2 + \varphi(y, z)$$

allora

$$u_y = 4yx + \varphi_y$$

quindi, dato che deve essere $u_y = Y$, risulta:

$$\varphi(y, z) = \int 2yz\, dy + g(z) = y^2 z + g(z).$$

Allora, $u(x, y, z) = x^3 + 2y^2 x + x^2 z + x^2 z^2 + y^2 z + g(z)$ e, derivando rispetto a z:

$$u_z = x^2(1 + 2z) + y^2 + g'(z) = Z = \left(x^2 + y^2 + 2x^2 z\right).$$

Quindi $g'(z) = 0$ e di conseguenza $g(z) = c$ costante arbitraria. Allora

$$u(x, y, z) = x^3 + 2y^2 x + x^2 z + x^2 z^2 + y^2 z$$

è una primitiva per ω. Ne segue che

$$\int_\gamma \omega = u\left(\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - u\left(\gamma(0)\right) = u(e, \log 2, 0) - u(1, 0, 1) = e^3 + 2e(\log 2)^2 - 3.$$