Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 18 dicembre 2003

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1

Calcolare l'integrale curvilineo

$$\oint_{+\partial T} 3y^2\,dx + 2x^2\,dy$$

dove T è il triangolo di vertici $(0,0)$ $(2,-1)$ $(2,0)$.

Soluzione

La frontiera di T percorsa positivamente è l'unione delle seguenti tre curve regolari:

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ -\dfrac{t}{2} \end{pmatrix} \qquad t \in [0,2]$$

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in [-1,0]$$

$$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 2-t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t \in [0,2]$$

Le velocità delle curve sono:

$$\dot\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \dot\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \dot\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$\oint_{+\partial T} 3y^2\,dx + 2x^2\,dy = \int_0^2 3\frac{t^2}{4} + 2t^2\left(-\frac{1}{2}\right)\,dt + \int_{-1}^0 2\cdot 4\cdot 1\,dt + \int_0^2 0\,dt = \int_0^2 -\frac{1}{4}t^2\,dt + \int_{-1}^0 8\,dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 + \Big[8t\Big]_{-1}^0 = \frac{22}{3}$$

Esercizio 2

Data la forma differenziale lineare $\omega = \left(\frac{y}{x^2+y^2} + 2\log y\right)\, dx + \left(\frac{2x}{y} - \frac{x}{x^2+y^2} + y^3\right)\, dy$ trovare il suo insieme di definizione, il più grande insieme dove è esatta e una primitiva.

Soluzione

La forma differenziale è definita nel semipiano $y > 0$ che è un insieme semplicemente connesso. Quindi la chiusura di ω ne determina anche l'esattezza. Verifichiamo che ω è chiusa:

$$X_y = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2}{y} \qquad Y_x = \frac{2}{y} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Determiniamo ora un potenziale integrando prima rispetto a x.

$$u(x,y) = \int \frac{y}{x^2+y^2} + 2\log y\, dx + \varphi(y) = \int \frac{1}{\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right) y}\, dx + 2x\log y + \varphi(y)$$

e, utilizzando la sostituzione $\frac{x}{y} = t$:

$$u(x,y) = \arctan\frac{x}{y} + 2x\log y + \varphi(y)$$

Per determinare $\varphi(y)$ deriviamo u rispetto a y e confrontiamo con Y:

$$u_y = \frac{-x}{x^2+y^2} + \frac{2x}{y} + \varphi'(y) = Y$$

quindi

$$\varphi'(y) = y^3 \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(y) = \int y^3\, dy + c = \frac{y^4}{4} + c$$

Di conseguenza una qualsiasi primitiva di ω è della forma:

$$u(x,y) = \arctan\frac{x}{y} + 2x\log y + \frac{y^4}{4} + c$$

con c costante arbitraria.

Esercizio 3

Si calcoli l'integrale superficiale

$$\int_{\Sigma} x \cos\frac{z}{3}\, d\sigma$$

dove Σ è la superficie di equazioni parametriche:

$$\varphi(\theta, t) = \begin{pmatrix} 2t\cos\theta \\ 2t\sin\theta \\ 3\theta \end{pmatrix} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le t \le 1.$$

Soluzione

Calcoliamo la matrice Jacobiana di φ:

$$J\varphi(\theta, t) = \begin{pmatrix} -2t\sin\theta & 2\cos\theta \\ 2t\cos\theta & 2\sin\theta \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

e il vettore normale a Σ:

$$N(\theta, t) = \begin{pmatrix} -6\sin\theta \\ 6\cos\theta \\ -4t\sin^2\theta - 4t\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

Quindi $|N| = \sqrt{36 + 16t^2} = 2\sqrt{9 + 4t^2}$. L'integrale cercato è quindi:

$$\int_{\Sigma} x\cos\frac{z}{3}\, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\,\theta \int_0^1 4t\sqrt{9+4t^2}\cos^2\theta\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \left[4\left(9+4t^2\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3}\frac{1}{8}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left((9+4)^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\pi}{3}\left(13^{\frac{3}{2}} - 27\right).$$

Esercizio 4

Calcolare il flusso del campo $F = \begin{pmatrix} x \\ -2y \\ z \end{pmatrix}$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4x^2 + y^2,\ 0 \le z \le 4\right\}$$

Soluzione

La superficie è la parte di un paraboloide a sezione ellittica compresa fra i piani $z = 0$ e $z = 4$. Il piano $x = 4$ interseca la superficie nell'ellisse che si ottiene uguagliando le due equazioni

$$\begin{cases} z = 4x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad 4x^2 + y^2 = 4.$$

La superficie è di tipo cartesiano e la sua proiezione sul piano x, y è appunto l'ellisse di equazione $4x^2 + y^2 \leq 4$. Parametrizziamo Σ utilizzando le coordinate ellittiche nel piano x, y, cioè:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = 2\rho\sin\theta \\ z = 4x^2 + y^2 = 4\rho^2 \end{cases} \qquad 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Quindi $\Sigma = \varphi(D)$ dove $\varphi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ 2\rho\sin\theta \\ 4\rho^2 \end{pmatrix}$ e $D = [0,1] \times [0, 2\pi]$. La matrice Jacobiana di φ risulta:

$$J\varphi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2\rho\cos\theta \\ 8\rho & 0 \end{pmatrix}$$

e il vettore normale:

$$N(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} -16\rho^2\cos\theta \\ -8\rho^2\sin\theta \\ 2\rho \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\int_\Sigma F \cdot n\, d\sigma = \int_D F(\varphi(\rho,\theta)) \cdot N(\rho,\theta)\, d\rho\, d\theta = \int_D -16\rho^3\cos^2\theta + 32\rho^3\sin^2\theta + 8\rho^3\, d\rho\, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(-16\cos^2\theta + 32\sin^2\theta + 8\right)\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 d\theta = \frac{1}{4}(-16\pi + 32\pi + 16\pi) = 8\pi.$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 18 dicembre 2003

| | | | | | | | | | | | | | | | | (Cognome) | | | | | | | | | | | (Nome) | | | | | | | (Numero di matricola)

Esercizio 1

Calcolare l'integrale curvilineo

$$\oint_{+\partial T} 3y^2\,dx - x^2\,dy$$

dove T è il triangolo di vertici $(0,0)$ $(-2,0)$ $(-2,-1)$.

Soluzione

La frontiera di T percorsa positivamente è l'unione delle seguenti tre curve regolari:

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t \in [0,2]$$

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ -t \end{pmatrix} \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} t-2 \\ \dfrac{t}{2} - 1 \end{pmatrix} \qquad t \in [0,2]$$

Le velocità delle curve sono:

$$\dot\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \dot\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \dot\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$\oint_{+\partial T} 3y^2\,dx - x^2\,dy = \int_0^2 0\,dt + \int_0^1 -(-2)^2(-1)\,dt + \int_0^2 3\left(\frac{t}{2}-1\right)^2 - (t-2)^2\,\frac{1}{2}\,dt =$$

$$= \int_0^1 4\,dt + \int_0^2 \frac{t^2}{4} - t + 1\,dt = 4 + \left[\frac{t^3}{12} - \frac{t^2}{2} + t\right]_0^2 = \frac{14}{3}$$

Esercizio 2

Data la forma differenziale lineare $\omega = \left(\frac{3y}{x} - \frac{y}{x^2+y^2}\right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} + 3\log x + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) dy$ trovare il suo insieme di definizione, il più grande insieme dove è esatta e una primitiva.

Soluzione

La forma differenziale è definita nel semipiano $y > 0$ che è un insieme semplicemente connesso. Quindi la chiusura di ω ne determina anche l'esattezza. Verifichiamo che ω è chiusa:

$$X_y = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2}{y} \qquad Y_x = \frac{2}{y} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Determiniamo ora un potenziale integrando prima rispetto a x.

$$u(x,y) = \int \frac{y}{x^2+y^2} + 2\log y \, dx + \varphi(y) = \int \frac{1}{\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right) y} \, dx + 2x\log y + \varphi(y)$$

e, utilizzando la sostituzione $\frac{x}{y} = t$:

$$u(x,y) = \arctan\frac{x}{y} + 2x\log y + \varphi(y)$$

Per determinare $\varphi(y)$ deriviamo u rispetto a y e confrontiamo con Y:

$$u_y = \frac{-x}{x^2+y^2} + \frac{2x}{y} + \varphi'(y) = Y$$

quindi

$$\varphi'(y) = y^3 \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(y) = \int y^3 \, dy + c = \frac{y^4}{4} + c$$

Di conseguenza una qualsiasi primitiva di ω è della forma:

$$u(x,y) = \arctan\frac{x}{y} + 2x\log y + \frac{y^4}{4} + c$$

con c costante arbitraria.

Esercizio 3

Si calcoli l'integrale superficiale

$$\int_\Sigma x\sin\frac{y}{2}\, d\sigma$$

dove Σ è la superficie di equazioni parametriche:

$$\varphi(\theta,t) = \begin{pmatrix} 3t\sin\theta \\ 2\theta \\ 3t\cos\theta \end{pmatrix} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le t \le 1.$$

Soluzione

Calcoliamo la matrice Jacobiana di φ:

$$J\varphi(\theta,t)=\begin{pmatrix}3t\cos\theta & 3\sin\theta\\ 2 & 0\\ -3t\sin\theta & 3\cos\theta\end{pmatrix}$$

e il vettore normale a Σ:

$$N(\theta,t)=3\begin{pmatrix}2\cos\theta\\ -3t\\ -2\sin\theta\end{pmatrix}$$

Quindi $|N|=3\sqrt{4+9t^2}$. L'integrale cercato è quindi:

$$\int_\Sigma x\sin\frac{y}{2}\,d\sigma=\int_0^{2\pi}d\,\theta\int_0^1 9t\sqrt{4+9t^2}\sin^2\theta\,dt=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta\left[9\left(4+9t^2\right)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}\frac{1}{18}\right]_0^1=$$

$$=\frac{\pi}{3}\left((9+4)^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{\pi}{3}\left(13^{\frac{3}{2}}-8\right).$$

Esercizio 4

Calcolare il flusso del campo $F=\begin{pmatrix}2x\\ -y\\ z\end{pmatrix}$ attraverso la superficie

$$\Sigma=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: y=9x^2+z^2,\ 0\le y\le 9\right\}$$

Soluzione

La superficie è la parte di un paraboloide a sezione ellittica compresa fra i piani $y=0$ e $y=9$. Il piano $y=9$ interseca la superficie nell'ellisse che si ottiene uguagliando le due equazioni

$$\begin{cases}y=9x^2+z^2\\ y=9\end{cases}\qquad\Longrightarrow\qquad 9x^2+z^2=9.$$

La superficie è di tipo cartesiano e la sua proiezione sul piano x,z è appunto l'ellisse di equazione $9x^2+z^2\le 9$. Parametrizziamo Σ utilizzando le coordinate ellittiche nel piano x,z, cioè:

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=9\rho^2\\ z=3\rho\sin\theta\end{cases}\qquad 0\le\rho\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi.$$

Quindi $\Sigma=\varphi(D)$ dove $\varphi(\rho,\theta)=\begin{pmatrix}\rho\cos\theta\\ 9\rho^2\\ 3\rho\sin\theta\end{pmatrix}$ e $D=[0,1]\times[0,2\pi]$. La matrice Jacobiana di φ risulta:

$$J\varphi(\rho,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta\\ 18\rho & 0\\ 3\sin\theta & 3\rho\cos\theta\end{pmatrix}$$

e il vettore normale:

$$N(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} 54\rho^2 \cos\theta \\ -3\rho \\ 18\rho^2 \sin\theta \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = \int_D F(\varphi(\rho,\theta)) \cdot N(\rho,\theta) \, d\rho \, d\theta = \int_D 108\rho^3 \cos^2\theta + 27\rho^3 + 54\rho^3 \sin^2\theta \, d\rho \, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(108\cos^2\theta + 27 + 54\sin^2\theta\right) \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 d\theta = \frac{1}{4}(108\pi + 54\pi + 54\pi) = \frac{216}{4}\pi = 54\pi.$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 18 dicembre 2003

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1

Calcolare l'integrale curvilineo

$$\oint_{+\partial T} 5y^2\,dx + 4x^2\,dy$$

dove T è il triangolo di vertici $(0,0)$ $(1,3)$ $(0,3)$.

Soluzione

La frontiera di T percorsa positivamente è l'unione delle seguenti tre curve regolari:

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 3t \end{pmatrix} \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 3 \end{pmatrix} \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3-t \end{pmatrix} \qquad t \in [0,3]$$

Le velocità delle curve sono:

$$\dot\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \dot\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \dot\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$\oint_{+\partial T} 5y^2\,dx + 4x^2\,dy = \int_0^1 45t^2 + 12t^2\,dt + \int_0^1 -45\,dt = \int_0^1 57t^2 - 45\,dt = 57 + \left[\frac{t^3}{3} - 45t\right]_0^1 = -26$$

Esercizio 2

Data la forma differenziale lineare $\omega = \left(\frac{y}{4x^2+y^2} - \log y\right)dx + \left(-\frac{x}{4x^2+y^2} - \frac{x}{y} + e^{3y}\right)dy$ trovare il suo insieme di definizione, il più grande insieme dove è esatta e una primitiva.

Soluzione

La forma differenziale è definita nel semipiano $y > 0$ che è un insieme semplicemente connesso. Quindi la chiusura di ω ne determina anche l'esattezza. Verifichiamo che ω è chiusa:

$$X_y = \frac{4x^2 - y^2}{(4x^2+y^2)^2} - \frac{1}{y} \qquad Y_x = -\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2} - \frac{1}{y}$$

Determiniamo ora un potenziale integrando prima rispetto a x:

$$u(x,y) = \int \frac{y}{4x^2+y^2} - \log y \, dx + \varphi(y) = \int \frac{1}{\left(\frac{4x^2}{y^2}+1\right) y} \, dx - x \log y + \varphi(y)$$

e, utilizzando la sostituzione $\dfrac{2x}{y} = t$:

$$u(x,y) = \frac{1}{2} \arctan \frac{2x}{y} - x \log y + \varphi(y)$$

Per determinare $\varphi(y)$ deriviamo u rispetto a y e confrontiamo con Y:

$$u_y = \frac{-x}{4x^2+y^2} - \frac{x}{y} + \varphi'(y) = Y$$

quindi

$$\varphi'(y) = e^{3y} \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(y) = \int e^{3y} \, dy + c = \frac{1}{3} e^{3y} + c$$

Di conseguenza una qualsiasi primitiva di ω è della forma:

$$u(x,y) = \frac{1}{2} \arctan \frac{2x}{y} - x \log y + \frac{1}{3} e^{3y} + c$$

con c costante arbitraria.

Esercizio 3

Si calcoli l'integrale superficiale

$$\int_\Sigma z \cos \frac{x}{4} \, d\sigma$$

dove Σ è la superficie di equazioni parametriche:

$$\varphi(\theta, t) = \begin{pmatrix} 4\theta \\ -t \sin\theta \\ t \cos\theta \end{pmatrix} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi, \ 0 \le t \le 1.$$

Soluzione

Calcoliamo la matrice Jacobiana di φ:

$$J\varphi(\theta, t) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -t\cos\theta & -\sin\theta \\ -t\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

e il vettore normale a Σ:

$$N(\theta, t) = \begin{pmatrix} -t \\ -4\cos\theta \\ -4\sin\theta \end{pmatrix}$$

Quindi $|N| = \sqrt{t^2 + 16}$. L'integrale cercato è quindi:

$$\int_\Sigma z \cos\frac{x}{4}\, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 t\sqrt{t^2+16}\cos^2\theta\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \left[\left(t^2+16\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3}\frac{1}{2} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left((17^{\frac{3}{2}} - 16^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{\pi}{3}\left(17^{\frac{3}{2}} - 64\right).$$

Esercizio 4

Calcolare il flusso del campo $F = \begin{pmatrix} 3x \\ y \\ 3z \end{pmatrix}$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \frac{y^2}{4} + z^2,\ 0 \leq x \leq 1 \right\}$$

Soluzione

La superficie è la parte di un paraboloide a sezione ellittica compresa fra i piani $x = 0$ e $x = 1$. Il piano $x = 1$ interseca la superficie nell'ellisse che si ottiene uguagliando le due equazioni

$$\begin{cases} x = \dfrac{y^2}{4} + z^2 \\ \\ x = 1 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y^2}{4} + z^2 = 1.$$

La superficie è di tipo cartesiano e la sua proiezione sul piano y, z è appunto l'ellisse di equazione $\dfrac{y^2}{4} + z^2 \leq 1$. Parametrizziamo Σ utilizzando le coordinate ellittiche nel piano y, z, cioè:

$$\begin{cases} x = \rho^2 \\ y = 2\rho\cos\theta \\ z = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Quindi $\Sigma = \varphi(D)$ dove $\varphi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \rho^2 \\ 2\rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix}$ e $D = [0, 1] \times [0, 2\pi]$. La matrice Jacobiana di φ risulta:

$$J\varphi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} 2\rho & 0 \\ 2\cos\theta & -2\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

e il vettore normale:

$$N(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} 2\rho \\ -2\rho^2\cos\theta \\ -2\rho^2\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_{D} F(\varphi(\rho,\theta)) \cdot N(\rho,\theta) \, d\rho \, d\theta = \int_{D} 6\rho^3 - 4\rho^3 \cos^2\theta - 6\rho^3 \sin^2\theta \, d\rho \, d\theta =$$

$$\int_{0}^{2\pi} \left(6 - 4\cos^2\theta - 6\sin^2\theta\right) \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 d\theta = \frac{1}{4}(12\pi - 4\pi - 6\pi) = \frac{\pi}{2}.$$