Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 2 dicembre 2003

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1

Trovare l'insieme di convergenza puntuale e la funzione limite della successione di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{4n^2x + 4x + 3}{1 + n^2x}$$

definita sulla semiretta $x \geq 0$. Dire inoltre se la successione converge uniformemente sul suo insieme di convergenza puntuale.

Soluzione

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 4 \qquad \forall x > 0$$

$$f_n(0) = 3 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

quindi l'insieme di convergenza putuale è tutta la semiretta $[0, +\infty)$ e la funzione limite è:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x = 0 \\ 4 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

che non è continua, mentre le funzioni della successione lo sono; ne segue che la convergenza non può essere uniforme.

Esercizio 2

Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} x\left(1 - \frac{x}{2}\right)^n.$$

Trovare gli insiemi di convergenza puntuale e assoluta. Dire se la convergenza è totale nell'intervallo $[0, 1]$.

Soluzione

Se $x = 0$ la serie converge assolutamente a zero. Se $x \neq 0$ dividiamo tutto per x e consideriamo solo $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{2}\right)^n$. Ponendo $t = 1 - \frac{x}{2}$ otteniamo che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ converge assolutamente

per $-1 < t < 1$, quindi la serie originale convergerà assolutamente dove $-1 < 1 - \dfrac{x}{2} < 1$, cioè per $0 < x < 4$. Nel punto $x = 4$ la serie non converge perché il termine generale non è infinitesimo. Nel punto $x = 0$ la serie converge assolutamente per quanto detto all'inizio. L'insieme di convergenza assoluta e puntuale è quindi $[0, 4)$.
Se la serie convergesse totalmente sull'intervallo $[0, 1]$, potrei applicare il teorema sullo scambio del limite. La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n$ è una serie geometrica e la sua somma vale $\dfrac{2}{x}$ per ogni $x \in (0, 4)$. Quindi la serie data converge a $x\,\dfrac{2}{x} = 2$ sull'intervallo $(0, 4)$. Dal teorema sullo scambio del limite otterrei:

$$2 = \lim_{x \to 0^+} \sum_{n=0}^{\infty} x \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \to 0^+} x \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$$

e questo è assurdo. Quindi la serie non converge totalmente sull'intervallo $[0, 1]$.

Esercizio 3

Trovare gli insiemi di convergenza puntuale, assoluta, totale e uniforme della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n}$$

Calcolare la somma della serie.

Soluzione

Eseguendo la sostituzione $-\dfrac{x}{2} = t$ otteniamo la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n}$. Essendo $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$ il raggio di convergenza è $R = 1$. Per $t = 1$ abbiamo la serie armonica che diverge, mentre per $t = -1$ otteniamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ che converge per il criterio di Leibniz. L'insieme di convergenza puntuale è quindi $-1 \leq -\dfrac{x}{2} < 1$, cioè $x \in (-2, 2]$. Analogamente la convergenza assoluta sarà sull'insieme $(-2, 2)$. La convergenza totale è sugli insiemi della forma $[-a, a]$ con $0 < a < 2$ e quella uniforme, per il teorema di Abel, in $[b, 2]$ con $-2 < b < 2$.
Per calcolare la somma osserviamo che se $t \neq 0$ si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n} = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \frac{1}{t} \left(-\log(1 - t)\right)$$

se invece $t = 0$ la somma della serie vale 1. Quindi la funzione somma è:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} \log\left(1 + \dfrac{x}{2}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4

Trovare la lunghezza della seguente curva rappresentata in coordinate polari dall'equazione:

$$\rho = e^{2\theta}, \qquad \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right].$$

Soluzione

La curva ha equazione parametrica

$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \rho(\theta)\cos\theta \\ \rho(\theta)\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2\theta}\cos\theta \\ e^{2\theta}\sin\theta \end{pmatrix}.$$

$$\dot\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} 2e^{2\theta}\cos\theta - e^{2\theta}\sin\theta \\ 2e^{2\theta}\sin\theta + e^{2\theta}\cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$|\dot\gamma(\theta)| = \sqrt{5e^{4\theta}} = \sqrt{5}e^{2\theta}$$

quindi la lunghezza della curva è:

$$l(\gamma) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{5}e^{2\theta}\,d\theta = \sqrt{5}\left[\frac{e^{2\theta}}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(e^{\frac{3}{2}\pi} - e^{\frac{\pi}{2}}\right).$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 2 dicembre 2003

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1

Trovare l'insieme di convergenza puntuale e la funzione limite della successione di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{-2n^2x + 3x + 2}{1 + n^2x}$$

definita sulla semiretta $x \geq 0$. Dire inoltre se la successione converge uniformemente sul suo insieme di convergenza puntuale.

Soluzione

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = -2 \qquad \forall x > 0$$

$$f_n(0) = 2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

quindi l'insieme di convergenza putuale è la semiretta $[0, +\infty)$ e la funzione limite è:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x > 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

che non è continua, mentre le funzioni della successione lo sono; ne segue che la convergenza non può essere uniforme in $[0, +\infty)$.

Esercizio 2

Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-4)\left(\frac{x}{2} - 1\right)^n$$

Trovare gli insiemi di convergenza puntuale e assoluta. Dire se la convergenza è totale nell'intervallo $[3, 4]$.

Soluzione

Se $x = 4$ la serie converge assolutamente a zero. Se $x \neq 4$ dividiamo tutto per $x-4$ e consideriamo solo $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2} - 1\right)^n$. Ponendo $t = \frac{x}{2} - 1$ otteniamo che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ converge assolutamente per $-1 < t < 1$, quindi la serie originale convergerà assolutamente dove $-1 < \frac{x}{2} - 1 < 1$, cioè per

$0 < x < 4$. Nel punto $x = 0$ la serie non converge perché il termine generale non è infinitesimo. Nel punto $x = 4$ la serie converge assolutamente per quanto detto all'inizio. L'insieme di convergenza assoluta e puntuale è quindi $(0, 4]$.
Se la serie convergesse totalmente sull'intervallo $[3, 4]$, potrei applicare il teorema sullo scambio del limite. La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}-1\right)^n$ è una serie geometrica e la sua somma vale $\frac{2}{4-x}$ per ogni $x \in (0, 4)$. Quindi la serie data converge a $(x-4)\,\frac{2}{4-x} = 2$ sull'intervallo $(0, 4)$. Dal teorema sullo scambio del limite otterrei:

$$2 = \lim_{x\to 4^-}\sum_{n=0}^{\infty}(x-4)\left(\frac{x}{2}-1\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to 4^-}(x-4)\left(\frac{x}{2}-1\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$$

e questo è assurdo. Quindi la serie non converge totalmente sull'intervallo $[3, 4]$.

Esercizio 3

Trovare gli insiemi di convergenza puntuale, assoluta, totale e uniforme della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{x^n}{n+1}$$

Calcolare la somma della serie.

Soluzione

Eseguendo la sostituzione $\frac{x}{2} = t$ otteniamo la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n+1}$. Essendo $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = 1$ il raggio di convergenza è $R = 1$. Per $t = 1$ abbiamo la serie armonica che diverge, mentre per $t = -1$ otteniamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ che converge per il criterio di Leibniz. L'insieme di convergenza puntuale è quindi $-1 \leq \frac{x}{2} < 1$, cioè $x \in [-2, 2)$. Analogamente la convergenza assoluta sarà sull'insieme $(-2, 2)$. La convergenza totale è sugli insiemi della forma $[-a, a]$ con $0 < a < 2$ e quella uniforme, per il teorema di Abel, in $[-2, b]$ con $-2 < b < 2$.
Per calcolare la somma osserviamo che se $t \neq 0$ si ha:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n+1} = \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{t}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^m}{m} = \frac{-\log(1-t)}{t}$$

se invece $t = 0$ la somma della serie vale 1. Quindi la funzione somma è:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-2\log\left(1-\dfrac{x}{2}\right)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4

Trovare la lunghezza della seguente curva rappresentata in coordinate polari dall'equazione:

$$\rho = e^{-\frac{\theta}{2}}, \qquad \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Soluzione

La curva ha equazione parametrica

$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \rho(\theta)\cos\theta \\ \rho(\theta)\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\theta}{2}}\cos\theta \\ e^{-\frac{\theta}{2}}\sin\theta \end{pmatrix}$$

quindi

$$\dot\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{-\frac{\theta}{2}}\cos\theta - e^{-\frac{\theta}{2}}\sin\theta \\ -\frac{1}{2}e^{-\frac{\theta}{2}}\sin\theta + e^{-\frac{\theta}{2}}\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$|\dot\gamma(\theta)| = \sqrt{\frac{5}{4}e^{-\theta}} = \frac{\sqrt{5}}{2}e^{-\frac{\theta}{2}}$$

quindi la lunghezza della curva è:

$$l(\gamma) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sqrt{5}}{2}e^{-\frac{\theta}{2}}\,d\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}\left[-2e^{-\frac{\theta}{2}}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sqrt{5}\left(e^{-\frac{\pi}{4}} - e^{-\frac{\pi}{2}}\right).$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 2 dicembre 2003

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1

Trovare l'insieme di convergenza puntuale e la funzione limite della successione di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{2x - 3 + 3n^2 x}{n^2 x + 1}$$

definita sulla semiretta $x \geq 0$. Dire inoltre se la successione converge uniformemente sul suo insieme di convergenza puntuale.

Soluzione

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 3 \qquad \forall x > 0$$

$$f_n(0) = -3 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

quindi l'insieme di convergenza putuale è la semiretta $[0, +\infty)$ e la funzione limite è:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x > 0 \\ -3 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

che non è continua, mentre le funzioni della successione lo sono; ne segue che la convergenza non può essere uniforme in $[0, +\infty)$.

Esercizio 2

Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n (x-3).$$

Trovare gli insiemi di convergenza puntuale e assoluta. Dire se la convergenza è totale nell'intervallo $[2, 3]$.

Soluzione

Se $x = 3$ la serie converge assolutamente a zero. Se $x \neq 3$ dividiamo tutto per $x-3$ e consideriamo solo $\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n$. Ponendo $t = x - 2$ otteniamo che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ converge assolutamente per $-1 < t < 1$, quindi la serie originale convergerà assolutamente dove $-1 < x - 2 < 1$, cioè per

$1 < x < 3$. Nel punto $x = 1$ la serie non converge perché il termine generale non è infinitesimo. Nel punto $x = 3$ la serie converge assolutamente per quanto detto all'inizio. L'insieme di convergenza assoluta e puntuale è quindi $(1, 3]$.
Se la serie convergesse totalmente sull'intervallo $[2, 3]$, potrei applicare il teorema sullo scambio del limite. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n$ è una serie geometrica e la sua somma vale $\frac{1}{3-x}$ per ogni $x \in (1, 3)$. Quindi la serie data converge a $\frac{x-3}{3-x} = -1$ sull'intervallo $(1, 3)$. Dal teorema sullo scambio del limite otterrei:

$$-1 = \lim_{x\to 3^-} \sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n(x-3) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to 3^-} (x-2)^n(x-3) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$$

e questo è assurdo. Quindi la serie non converge totalmente sull'intervallo $[2, 3]$.

Esercizio 3

Trovare gli insiemi di convergenza puntuale, assoluta, totale e uniforme della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, 3^{n-1} \, \frac{x^{n-1}}{n}$$

Calcolare la somma della serie.

Soluzione

Se $x \neq 0$ moltiplichiamo e dividiamo la serie per $3x$ ottenendo:

$$\frac{1}{3x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3x)^n}{n}$$

Eseguendo la sostituzione $-3x = t$ otteniamo la serie di potenze $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$. Essendo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$ il raggio di convergenza è $R = 1$. Per $t = 1$ abbiamo la serie armonica che diverge, mentre per $t = -1$ otteniamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge per il criterio di Leibniz. L'insieme di convergenza puntuale è quindi $-1 \leq -3x < 1$, cioè $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$. Analogamente la convergenza assoluta sarà sull'insieme $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. La convergenza totale è sugli insiemi della forma $[-a, a]$ con $0 < a < \frac{1}{3}$ e quella uniforme, per il teorema di Abel, in $\left[b, \frac{1}{3}\right]$ con $-\frac{1}{3} < b < \frac{1}{3}$.
Per calcolare la somma osserviamo che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = -\log(1-t)$$

Se $x = 0$ la somma della serie vale -1. Quindi la funzione somma è:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-\log(1+3x)}{3x} & \text{se } x \neq 0 \\ -1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4

Trovare la lunghezza della seguente curva rappresentata in coordinate polari dall'equazione:

$$\rho = e^{-3\theta}, \qquad \theta \in [3\pi, 4\pi].$$

Soluzione

La curva ha equazione parametrica

$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \rho(\theta)\cos\theta \\ \rho(\theta)\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3\theta}\cos\theta \\ e^{-3\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$$

quindi

$$\dot\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} -3e^{-3\theta}\cos\theta - e^{-3\theta}\sin\theta \\ -3e^{-3\theta}\sin\theta + e^{-3\theta}\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$|\dot\gamma(\theta)| = \sqrt{10e^{-6\theta}} = \sqrt{10}e^{-3\theta}$$

quindi la lunghezza della curva è:

$$l(\gamma) = \int_{3\pi}^{4\pi} \sqrt{10}e^{-3\theta}\, d\theta = \sqrt{10}\left[-\frac{e^{-3\theta}}{3}\right]_{3\pi}^{4\pi} = \frac{\sqrt{10}}{3}\left(e^{-9\pi} - e^{-12\pi}\right).$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Civile dell'ambiente e territorio

Analisi Matematica III

Pisa, 2 dicembre 2003

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1

Trovare l'insieme di convergenza puntuale e la funzione limite della successione di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{x - 1 - n^2 x}{2 + n^2 x}$$

definita sulla semiretta $x \geq 0$. Dire inoltre se la successione converge uniformemente sul suo insieme di convergenza puntuale.

Soluzione

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = -1 \qquad \forall x > 0$$

$$f_n(0) = -\frac{1}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

quindi l'insieme di convergenza putuale è la semiretta $[0, +\infty)$ e la funzione limite è:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

che non è continua, mentre le funzioni della successione lo sono; ne segue che la convergenza non può essere uniforme in $[0, +\infty)$.

Esercizio 2

Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)(2-x)^n.$$

Trovare gli insiemi di convergenza puntuale e assoluta. Dire se la convergenza è totale nell'intervallo $[1, 2]$.

Soluzione

Se $x = 1$ la serie converge assolutamente a zero. Se $x \neq 1$ dividiamo tutto per $x - 1$ e consideriamo solo $\sum_{n=0}^{\infty} (2-x)^n$. Ponendo $t = 2 - x$ otteniamo che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ converge assolutamente

per $-1 < t < 1$, quindi la serie originale convergerà assolutamente dove $-1 < 2-x < 1$, cioè per $1 < x < 3$. Nel punto $x = 3$ la serie non converge perché il termine generale non è infinitesimo. Nel punto $x = 1$ la serie converge assolutamente per quanto detto all'inizio. L'insieme di convergenza assoluta e puntuale è quindi $[1, 3)$.
Se la serie convergesse totalmente sull'intervallo $[1, 2]$, potrei applicare il teorema sullo scambio del limite. La serie $\sum_{n=0}^{\infty}(2-x)^n$ è una serie geometrica e la sua somma vale $\frac{1}{x-1}$ per ogni $x \in (1, 3)$. Quindi la serie data converge a $\frac{x-1}{x-1} = 1$ sull'intervallo $(1, 3)$. Dal teorema sullo scambio del limite otterrei:

$$1 = \lim_{x \to 1^+} \sum_{n=0}^{\infty}(x-1)(2-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \to 1^+}(x-1)(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$$

e questo è assurdo. Quindi la serie non converge totalmente sull'intervallo $[1, 2]$.

Esercizio 3

Trovare gli insiemi di convergenza puntuale, assoluta, totale e uniforme della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n+1}$$

Calcolare la somma della serie.

Soluzione

Moltiplicando e dividendo la serie per -1 otteniamo:

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3x)^n}{n+1}$$

Eseguendo la sostituzione $-3x = t$ otteniamo la serie di potenze $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n+1}$. Essendo

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = 1$$

il raggio di convergenza è $R = 1$. Per $t = 1$ abbiamo la serie armonica che diverge, mentre per $t = -1$ otteniamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ che converge per il criterio di Leibniz. L'insieme di convergenza puntuale è quindi $-1 \leq -3x < 1$, cioè $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$. Analogamente la convergenza assoluta sarà sull'insieme $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. La convergenza totale è sugli insiemi della forma $[-a, a]$ con $0 < a < \frac{1}{3}$ e quella uniforme, per il teorema di Abel, in $\left[b, \frac{1}{3}\right]$ con $-\frac{1}{3} < b < \frac{1}{3}$.
Per calcolare la somma osserviamo che, se $t \neq 0$:

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n+1} = -\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} = -\frac{1}{t}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m} = \frac{\log(1-t)}{t}$$

Se $t = 0$ la somma della serie vale -1. Quindi la funzione somma è:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-\log(1+3x)}{3x} & \text{se } x \neq 0 \\ -1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4

Trovare la lunghezza della seguente curva rappresentata in coordinate polari dall'equazione:

$$\rho = e^{\frac{\theta}{4}}, \qquad \theta \in [\pi, \frac{3}{2}\pi].$$

Soluzione

La curva ha equazione parametrica

$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \rho(\theta)\cos\theta \\ \rho(\theta)\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\theta}{4}}\cos\theta \\ e^{\frac{\theta}{4}}\sin\theta \end{pmatrix}$$

quindi

$$\dot{\gamma}(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{\frac{\theta}{4}}\cos\theta - e^{\frac{\theta}{4}}\sin\theta \\ \frac{1}{4}e^{\frac{\theta}{4}}\sin\theta + e^{\frac{\theta}{4}}\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$|\dot{\gamma}(\theta)| = \sqrt{\frac{17}{16}e^{\frac{\theta}{2}}} = \frac{\sqrt{17}}{4}e^{\frac{\theta}{4}}$$

quindi la lunghezza della curva è:

$$l(\gamma) = \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\sqrt{17}}{4}e^{\frac{\theta}{4}}\,d\theta = \frac{\sqrt{17}}{4}\left[4e^{\frac{\theta}{4}}\right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = \sqrt{17}\left(e^{\frac{3}{8}\pi} - e^{\frac{\pi}{4}}\right).$$