Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria della Sicurezza Industriale e Nucleare

Matematica II

Pisa, 15 settembre 2003

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1

Trovare l'equazione parametrica e implicita della retta r di $\mathbb{R}^3$ passante per i punti $A = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Trovare inoltre l'equazione implicita del piano π passante per la retta r e parallelo alla retta s di equazione $\begin{cases} 2x + y + z = 9 \\ 2x + 6z = 16. \end{cases}$

Soluzione

Il vettore direzione della retta r è dato da $A - B = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$. Quindi, considerando che la retta passa per il punto A si ottiene l'equazione parametrica:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Risolvendo il sistema appena ottenuto, eliminando il parametro t, si ottiene l'equazione implicita della retta r:

$$\begin{cases} x = -3z + 5 \\ y = -z + 2. \end{cases}$$

Scriviamo ora la retta s in forma parametrica risolvendo la sua forma implicita rispetto alle variabili x, y, z:

$$\begin{cases} x = 8 - 3z \\ y = -7 + 5z \\ z = z \end{cases}$$

quindi, l'equazione parametrica cercata è:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Indichiamo con n un vettore perpendicolare al piano π. Dato che π contiene r ed è parallelo a s, n è perpendicolare ai vettori direzione delle due rette; in termini di prodotto scalare risulta:

$$n \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 0, \qquad n \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Se n_1, n_2, n_3 sono le coordinate di n otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 9n_1 + 3n_2 - 3n_3 = 0 \\ -3n_1 + 5n_2 + n_3 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione

$$\begin{cases} 9n_1 - 3n_3 = 0 \\ n_2 = 0 \end{cases}$$

quindi, assegnando il valore arbitrario $n_1 = 1$, si ottiene $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. L'equazione implicita del piano π sarà quindi: $x + 3z = d$. Per determinare d basta ricordare che il punto A appartiene a π, quindi $5 + 0 = d$. L'equazione cercata è quindi: $x + 3z = 5$.

Esercizio 2

Si consideri il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 4x + 8y + tz = 4 \\ 8x + ty + 32z = -4 \\ 4x + 7y + z = 4\alpha \end{cases}$$

Determinare il numero delle soluzioni al variare dei parametri reali t e α.

Soluzione

Costruiamo la matrice associata al sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 8 & t & 4 \\ 8 & t & 32 & -4 \\ 4 & 7 & 1 & 4\alpha \end{array}\right)$$

e applichiamo una riduzione a scala:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 8 & t & 4 \\ 0 & t-16 & -2t+32 & -12 \\ 0 & -1 & -t+1 & -4+4\alpha \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 8 & t & 4 \\ 0 & -1 & -t+1 & -4+4\alpha \\ 0 & t-16 & -2t+32 & -12 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 8 & t & 4 \\ 0 & -1 & -t+1 & -4+4\alpha \\ 0 & 0 & (16-t)(t+1) & (-4+4\alpha)(t-16)-12 \end{array}\right).$$

Se $t \neq 16$ e $t \neq -1$ la matrice incompleta ha rango 3 (massimo), quindi, per il teorema di Rouché – Capelli il sistema ha soluzione unica. Se $t = 16$ allora la matrice incompleta ha rango 2, mentre, sostituendo, la matrice completa ha rango 3. Di conseguenza il sistema non ha soluzione (per qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}$). Se $t = -1$ la matrice incompleta ha rango 2. Sostituendo nella terza componente del vettore dei termini noti si ottiene $(-4 + 4\alpha)(-17) - 12$. Quindi se $\alpha \neq \frac{14}{17}$ allora la matrice completa ha rango 3 e il sistema non ha soluzione. Se invece $t = -1$ e $\alpha = \frac{14}{17}$ anche la matrice completa ha rango 2 e il sistema ha una retta di soluzioni.

Esercizio 3

Siano u e v due vettori di $\mathbb{R}^3$ linearmente indipendenti. Definiamo $w_1 = 3u + v$ e $w_2 = 4u - v$. Dimostrare che w_1 e w_2 sono linearmente indipendenti. Sia $\xi = 2u+6v$. Scrivere ξ come combinazione lineare di w_1 e w_2.

Soluzione

Supponiamo che una combinazione lineare di w_1 e w_2 sia nulla, cioè che esistano α, β numeri reali tali che $\alpha w_1 + \beta w_2 = 0$. Sostituendo le definizioni di w_1 e w_2 si ha:

$$0 = 3\alpha u + \alpha v + 4\beta u - \beta v = (3\alpha + 4\beta)u + (\alpha - \beta)v$$

quindi, essendo u e v linearmente indipendenti, deve essere:

$$\begin{cases} 3\alpha + 4\beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $\alpha = \beta = 0$. I vettori w_1 e w_2 sono quindi linearmente indipendenti. Cerchiamo ora due coefficienti reali x, y tali che $\xi = xw_1 + yw_2$, cioè $2u+6v = xw_1+yw_2$. Sostituendo nuovamente le defnzioni di w_1 e w_2 si ha che $(2-3x-4y)u+(6-x-y)v = 0$. Sfruttando l'indipendenza lineare di u e v risulta quindi:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $x = 22, y = -16$. In conclusione è quindi:

$$\xi = 22w_1 - 16w_2.$$