Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria della Sicurezza Industriale e Nucleare

Matematica II

Pisa, 3 giugno 2003

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| (Cognome) |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| (Nome) |_|_|_|_|_|_| (Numero di matricola)

Esercizio 1

Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},\ w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Siano $V = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$, $W = \operatorname{span}\{w_1, w_2, w_3\}$. Dimostrare che V e W hanno la stessa dimensione e trovare la matrice che rappresenta, nella base canonica di $\mathbb{R}^3$, l'applicazione lineare $T : V \longrightarrow W$ tale che $T(v_j) = w_i$ per ogni $j = 1, 2, 3$.

Soluzione

Costruiamo le matrici A e B che hanno per colonne rispettivamente i vettori v_j e w_j:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo i determinanti sviluppando nella prima riga:

$$\det(A) = 1(4+3) - 2(3-6) + 1(-3-8) = 2 \neq 0$$

$$\det(B) = 1(-6+8) - 1(-6+6) = 2 \neq 0$$

quindi $\mathrm{rh}(A) = \mathrm{rh}(B) = 3$; ne segue che $\dim(V) = \dim(W) = 3$. Osserviamo ora che $w_j = Be_j$ e $v_j = Ae_j$ per ogni $j = 1, 2, 3$ (dove gli e_j sono i vettori della base canonica). Quindi $w_j = Be_j = B(A^{-1}v_j) = (BA^{-1})v_j$ e, di conseguenza, la matrice che rappresenta T è BA^{-1}. Eseguendo i calcoli si ottiene:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{11}{2} & \frac{5}{2} & -1 \end{pmatrix}, \qquad BA^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 3 & -1 \\ 7 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2

Sia $v = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e sia $A = vv^t - I$ dove I è la matrice identità 3×3. Determinare gli autovalori e gli autovettori di A.

Soluzione

$$vv^t = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi, sottraendo la matrice identica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5 = (1+\lambda)^2(5-\lambda)$$

quindi gli autovalori sono -1 con molteplicità algebrica 2 e 5 con molteplicità algebrica 1. Troviamo gli autovettori relativi all'autovalore -1, che devono risolvere il sistema $Aw = -w$. Deve essere quindi $(A+I)w = 0$, cioè $w \in \mathrm{Ker}(A+I)$. Riduciamo a scala la matrice $A + I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ottenendo $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quindi $w \in \mathrm{Ker}(A+I)$ se e solo se $w_1 + 2w_2 + w_3 = 0$, quindi $w_1 = -2w_2 - w_3$. Ne segue che $\dim(\mathrm{Ker}(A+I)) = 2$ e che una sua base è formata dagli autovettori $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Per quanto riguarda l'autovalore 5, in modo analogo dobbiamo determinare $\mathrm{Ker}(A-5I)$ riducendo a scala la matrice relativa:

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{6}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{12}{5} & -\frac{24}{5} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{6}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $w \in \mathrm{Ker}(A-5I)$ se e solo se

$$\begin{cases} -5w_1 + 2w_2 = -w_3 \\ -\frac{6}{5}w_2 = -\frac{12}{5}w_3 \end{cases}$$

che ha per soluzione $w_1 = w_3,\ w_2 = 2w_3$. L'autovettore relativo all'autovalotre 5 è quindi $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3

Si considerino le rette R_1 e R_2 di $\mathbb{R}^3$ definite implicitamente dai seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_3 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = -3. \end{cases}$$

1. Trovare le equazioni parametriche delle due rette;
2. trovare il punto di intersezione delle due rette;
3. determinare l'equazione del piano che contiene le due rette, sia in forma parametrica che implicita.

Soluzione

Risolviamo i due sistemi applicando l'eliminazione di Gauss:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_3 = 7 \\ -2x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{16}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -\frac{4}{3}x_3 + \frac{7}{3} \\ x_2 = \frac{1}{3}x_3 + \frac{8}{3} \end{cases}$$

quindi, scegliendo x_3 come parametro libero t si ottiene l'equazione parametrica di R_1:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In modo analogo per R_2 abbiamo:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1 \\ \frac{5}{2}x_2 - 10x_3 = -\frac{5}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 4x_1 = 3x_2 - 4x_3 - 1 \\ \frac{5}{2}x_2 = 10x_3 - \frac{5}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 2x_3 - 1 \\ x_2 = 4x_3 - 1 \end{cases}$$

quindi, scegliendo di nuovo x_3 come parametro libero s si ha: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per trovare il punto di intersezione uguagliamo le forme parametriche:

$$\begin{cases} -\frac{4}{3}t + \frac{7}{3} = 2s - 1 \\ \frac{1}{3}t + \frac{8}{3} = 4s - 1 \\ t = s \end{cases}$$

che ha come soluzione $t = s = 1$ corrispondente al punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'equazione parametrica del piano contenente le due rette è quindi:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{4}{3}t + 2s + 1 \\ x_2 = \frac{1}{3}t + 4s + 3 \\ x_3 = t + s + 1 \end{cases}$$

Per trovare l'equazione implicita basta osservare che i vettori generatori del piano e il generico vettore $\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 3 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix}$ devono essere linearmente dipendenti, quindi il determinante della matrice che ha per colonne questi tre vettori deve esssere nullo:

$$0 = \det \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 2 & x_1 - 1 \\ \frac{1}{3} & 4 & x_2 - 3 \\ 1 & 1 & x_3 - 1 \end{pmatrix} = -11x_1 + 10x_2 - 18x_3 - 1$$

che è l'equazione implicita del piano.