Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria della Sicurezza Industriale e Nucleare

Matematica II

Pisa, 10 febbraio 2003

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1

Si consideri il sottospazio vettoriale V generato dai due seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determinare:

1. la dimensione di V;
2. la dimensione del sottospazio vettoriale W ortogonale di V rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^4$;
3. una base di W.

Soluzione

1. Consideriamo la matrice che ha per colonne i vettori v_1 e v_2:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -1 \\ -2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il determinante del minore ottenuto prendendo le prime due righe di A:

$$\det \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0$$

quindi la matrice A ha rango 2. Ne segue che $V = \operatorname{span}(\{v_1, v_2\})$ ha dimensione 2.

2. La dimensione dell'ortogonale a V è la dimensione complementare a quella di V in $\mathbb{R}^4$ cioè $\dim(W) = 4 - \dim(V) = 2$.

3. Sia $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}$ un generico vettore di W. Allora deve risultare $(w|v_1) = (w|v_2) = 0$, quindi

$$\begin{cases} -4w_1 - 3w_2 - 2w_3 - 2w_4 = 0 \\ -w_1 - w_2 = 0 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema riducendo a scala la matrice associata:

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice ha ovviamente rango 2 e, di conseguenza, disponiamo di due parametri liberi che in questo caso sono w_3 e w_4. Infatti risolvendo rispetto a w_1 e w_2 otteniamo:

$$\begin{cases} w_1 = -2w_3 - 2w_4 \\ w_2 = 2w_3 + 2w_4 \end{cases}$$

Il generico vettore di W sarà quindi della forma:

$$w = \begin{pmatrix} -2w_3 - 2w_4 \\ 2w_3 + 2w_4 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = w_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ne segue che una base di W è data dai vettori $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2

Si consideri l'applicazione $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $T(x) = \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ x_5 + 3x_2 \end{pmatrix}$. Determinare il rango di T e una base del nucleo e dell'immagine.

Soluzione

La matrice A associata a T nelle basi canoniche è:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A è una matrice a scala con due pivot, quindi ha rango 2. L'immagine di T ha quindi dimensione 2, pertanto è tutto $\mathbb{R}^2$ (l'applicazione è surgettiva); una base dell'immagine sarà una qualsiasi base di $\mathbb{R}^2$ come ad esempio la base canonica oppure quella formata dalle prime due colonne della matrice A.
Per quanto riguarda il nucleo, basta risolvere il sistema lineare $Ax = 0$ rispetto alle variabili x_1 e x_2 tenendo le altre come parametri liberi:

$$\begin{cases} -x_1 = -x_3 \\ 3x_2 = -x_5 \end{cases}$$

che ha come soluzione:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ -\frac{1}{3}x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una base del nucleo di T è quindi formata dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3

Si considerino le seguenti applicazioni da $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$:

1. $a(x, y) = 5x_2^2 + 5x_3y_3 + 3y_1^2$
2. $b(x, y) = 5x_2y_2 + 5x_2y_3 + 5x_3y_2 - 5x_3y_3 + 3x_2y_1 + 3x_1y_2 - 5x_1y_1$
3. $c(x, y) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_2 - 2x_2y_1 + x_3y_3$.

Determinare quali applicazioni sono bilineari, nel caso lo siano trovare la matrice associata (cioè la matrice tale che, ad esempio, $b(x, y) = y^t Ax$) e determinarne il segno (definita positiva, negativa, semidefinita ...).

Soluzione

L'applicazione a non è bilineare perchè, ad esempio, non è omogenea rispetto alla prima variabile. Infatti:

$$a(2e_2, e_1) = 5 \cdot 2^2 + 5 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1^2 = 23$$

mentre

$$2a(e_2, e_1) = 2(5 \cdot 1^2 + 5 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1^2) = 16.$$

L'applicazione b è invece bilineare in quanto è della forma $\sum_{i,j=1}^{3} b_{ij}x_iy_j$. Per determinare la matrice associata, cioè quella matrice tale che risulti $b(x, y) = y^t Ax$, basta osservare che $b_{ij} = b(e_i, e_j) = a_{ji}$. Quindi nel nostro caso la matrice diventa:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Determiniamo ora il segno di $b(x, x) = -5x_1^2 + 5x_2^2 - 5x_3^2 + 6x_1x_2 + 10x_2x_3$. Ci basta osservare che $b(e_2, e_2) = 5$ mentre $b(e_1, e_1) = -5$ quindi la forma b è indefinita.
Anche la $c(x, y)$ è bilineare per lo stesso motivo di b. La matrice associata in questo caso è:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La c è definita positiva infatti:

$$c(x, x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_3^2 = 2(x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$$

e se $c(x, x) = 0$ allora

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0.$$

Esercizio 4

Trovare due matrici a coefficienti reali 3×3 simmetriche il cui prodotto non sia simmetrico.

Soluzione

Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le matrici A e B sono simmetriche ma il loro prodotto:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

non lo è.