Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria della Sicurezza Industriale e Nucleare

Matematica II

Pisa, 28 gennaio 2003

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1

Sia $\mathbb{R}_4[t]$ l'insieme dei polinomi reali di grado minore o uguale a 4. Si consideri l'applicazione $T : \mathbb{R}_4[t] \longrightarrow \mathbb{R}_4[t]$ definia da $T(p(t)) = p'(2t) + k$ dove k è un numero reale.

1. Determinare i valori di k per i quali T è lineare;
2. per i valori di k trovati al punto precedente scrivere la matrice associata a T nella base canonica di $\mathbb{R}_4[t]$;
3. trovare una base di $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

Soluzione

1. Condizione necessaria perché T sia lineare è che risulti $T(0) = 0$. Ma $T(0) = k$ quindi deve essere $k = 0$. La condizione diventa anche sufficiente a causa della linearità dell'operatore di derivazione.
2. La base canonica di $\mathbb{R}_4[t]$ è costituita dai polinomi $p_1(t) = 1,\ p_2(t) = t,\ p_3(t) = t^2,\ p_4(t) = t^3,\ p_5(t) = t^4$; calcoliamo le immagini secondo T di questi polinomi: $T(p_1) = 0,\ T(p_2) = 1,\ T(p_3) = 4t,\ T(p_4) = 12t^2,\ T(p_5) = 32t^3$. Quindi la matrice associata a T nella base canonica è la seguente:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
3. Per trovare $\mathrm{Ker}(T)$ risolviamo il sistema $Ax = 0$. La soluzione è $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ quindi $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{span}(\{p_1\})$. In altre parole il nucleo di T è formato dai polinomi costanti.

   Un insieme di generatori dell'immagine di T sono le colonne della matrice A, quindi una base è costituita da p_1, p_2, p_3, p_4 (i polinomi di grado minore o uguale a 3.

Esercizio 2

Si consideri il seguente sistema lineare dipendente dal parametro $s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + (s-1)x_2 - x_3 = s-1 \\ (s-1)x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

1. Determinare i valori di s per cui il sistema ha soluzione unica;
2. Determinare i valori di s per cui il sistema non ha soluzione;
3. Determinare i valori di s per cui il sistema ha una retta di soluzioni e trovarne l'equazione.

Soluzione

Consideriamo la matrice associata al sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & s-1 & -1 & s-1 \\ s-1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

ed effettuiamo una riduzione a scala:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & s-5 & 5 & s+3 \\ 0 & 1-2s & -1+3s & 1+2s \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & s-5 & 5 & s+3 \\ 0 & 0 & \frac{3s(s-2)}{s-5} & \frac{4(s^2-s-2)}{s-5} \end{array}\right)$$

nel caso che sia $s \neq 5$. Se $s = 5$ la matrice diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & -9 & 14 & 11 \end{array}\right)$$

e, scambiando la terza e la seconda riga, otteniamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -9 & 14 & 11 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \end{array}\right)$$

che ha rango 3, quindi il sistema ha soluzione unica. Nel caso sia $s \neq 5$ consideriamo il terzo pivot della matrice: $\frac{3s(s-2)}{s-5}$ che si annulla per $s = 0$ o per $s = 2$. Se $s \neq 0$ e $s \neq 2$ allora il sistema ha soluzione unica. Se $s = 0$ la matrice diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{5} \end{array}\right)$$

e il sistema non ha soluzione, visto che la matrice incompleta ha rango 2 mentre quella completa ha rango 3. Nel caso $s = 2$ la matrice è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

In questo caso il sistema ha una retta di soluzioni. Risolvendo le prime 2 equazioni si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}x_3 + \frac{4}{3} \\ x_2 = \frac{5}{3}x_3 - \frac{5}{3} \end{cases}$$

quindi l'equazione vettoriale della retta è:

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3

Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la retta r_α di equazione

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\alpha \\ 3 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

appartiene al piano generato dai vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soluzione

Il generico vettore della retta r_α è $v_\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2+\alpha-t \\ 3+\alpha t \\ \alpha-1+2t \end{pmatrix}$. Condizione necessaria e sufficiente perché questo vettore appartenga al piano è che la matrice che ha per colonne i due generatori del piano e $v_\alpha(t)$ abbia rango 2. Poniamo quindi

$$A_\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2+\alpha-t \\ 1 & 2 & 3+\alpha t \\ -1 & 1 & \alpha-1+2t \end{pmatrix}$$

e calcoliamone il determinante:

$$\det(A_\alpha(t)) = 3t(1-\alpha) + 6\alpha - 6.$$

Se $\det(A_\alpha(t)) = 0$ allora la matrice ha rango minore di 3, ma ha anche sicuramente rango maggiore o uguale di 2, in quanto i due generatori del piano sono linearmente indipendenti. Se vogliamo che la retta r_α sia interamente contenuta nel piano, $\det(A_\alpha(t))$ deve essere nullo per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quindi deve essere $\alpha = 1$.

Esercizio 4

Trovare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ \frac{3}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dire se la matrice è diagonalizzabile e, in tal caso, trovare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

Soluzione

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 = (3-\lambda)(\lambda-1)^2$$

quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 3$ con molteplicità algebrica 1. Troviamo gli autovettori relativi a λ_1 che sono i generatori del nucleo di $A - \lambda_1 I = A - I$. Risolviamo quindi il sistema $(A - I)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ \frac{3}{2} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi la matrice ha rango 1 e le soluzioni sono: $x_1 = \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3$. Una base delle soluzioni è quindi dato dai due autovettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Per quanto riguarda l'autovettore relativo a λ_2, dobbiamo trovare $\mathrm{Ker}(A - 3I)$ quindi risolvere il sistema $(A - 3I)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ \frac{3}{2} & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha la soluzione

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

quindi un autovettore relativo a λ_2 è $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La matrice A è quindi diagonalizzabile e una base di autovettori è $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.