

Esercizio 2

Si consideri il seguente sistema lineare dipendente dal parametro $s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + (s-1)x_2 - x_3 = s-1 \\ (s-1)x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

1. Determinare i valori di s per cui il sistema ha soluzione unica;
2. Determinare i valori di s per cui il sistema non ha soluzione;
3. Determinare i valori di s per cui il sistema ha una retta di soluzioni e trovarne l'equazione.

Soluzione

Consideriamo la matrice associata al sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & s-1 & -1 & s-1 \\ s-1 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

ed effettuiamo una riduzione a scala:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & s-5 & 5 & s+3 \\ 0 & 1-2s & -1+3s & 1+2s \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & s-5 & 5 & s+3 \\ 0 & 0 & \frac{3s(s-2)}{s-5} & \frac{4(s^2-s-2)}{s-5} \end{array} \right)$$

nel caso che sia $s \neq 5$. Se $s = 5$ la matrice diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & -9 & 14 & 11 \end{array} \right)$$

e, scambiando la terza e la seconda riga, otteniamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -9 & 14 & 11 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \end{array} \right)$$

che ha rango 3, quindi il sistema ha soluzione unica. Nel caso sia $s \neq 5$ consideriamo il terzo pivot della matrice: $\frac{3s(s-2)}{s-5}$ che si annulla per $s = 0$ o per $s = 2$. Se $s \neq 0$ e $s \neq 2$ allora il sistema ha soluzione unica. Se $s = 0$ la matrice diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{5} \end{array} \right)$$

e il sistema non ha soluzione, visto che la matrice incompleta ha rango 2 mentre quella completa ha rango 3. Nel caso $s = 2$ la matrice è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

In questo caso il sistema ha una retta di soluzioni. Risolvendo le prime 2 equazioni si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}x_3 + \frac{4}{3} \\ x_2 = \frac{5}{3}x_3 - \frac{5}{3} \end{cases}$$

quindi l'equazione vettoriale della retta è:

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3

Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la retta r_α di equazione

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \alpha \\ 3 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

appartiene al piano generato dai vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soluzione

Il generico vettore della retta r_α è $v_\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2 + \alpha - t \\ 3 + \alpha t \\ \alpha - 1 + 2t \end{pmatrix}$. Condizione necessaria e sufficiente perché questo vettore appartenga al piano è che la matrice che ha per colonne i due generatori del piano e $v_\alpha(t)$ abbia rango 2. Poniamo quindi

$$A_\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 + \alpha - t \\ 1 & 2 & 3 + \alpha t \\ -1 & 1 & \alpha - 1 + 2t \end{pmatrix}$$

e calcoliamone il determinante:

$$\det(A_\alpha(t)) = 3t(1 - \alpha) + 6\alpha - 6.$$

Se $\det(A_\alpha(t)) = 0$ allora la matrice ha rango minore di 3, ma ha anche sicuramente rango maggiore o uguale di 2, in quanto i due generatori del piano sono linearmente indipendenti. Se vogliamo che la retta r_α sia interamente contenuta nel piano, $\det(A_\alpha(t))$ deve essere nullo per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quindi deve essere $\alpha = 1$.

Esercizio 4

Trovare gli autovalori della matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ \frac{3}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dire se la matrice è diagonalizzabile e, in tal caso, trovare una base di \mathbb{R}^3 formata da autovettori di A .

Soluzione

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A :

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 = (3 - \lambda)(\lambda - 1)^2$$

quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 3$ con molteplicità algebrica 1. Troviamo gli autovettori relativi a λ_1 che sono i generatori del nucleo di $A - \lambda_1 I = A - I$. Risolviamo quindi il sistema $(A - I)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ \frac{3}{2} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi la matrice ha rango 1 e le soluzioni sono: $x_1 = \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3$. Una base delle soluzioni è quindi dato dai due autovettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Per quanto riguarda l'autovettore relativo a λ_2 , dobbiamo trovare $\text{Ker}(A - 3I)$ quindi risolvere il sistema $(A - 3I)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ \frac{3}{2} & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha la soluzione

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

quindi un autovettore relativo a λ_2 è $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La matrice A è quindi diagonalizzabile e una base di

autovettori è $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.