Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria della Sicurezza Industriale e Nucleare

Matematica II

Pisa, 19 dicembre 2002

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1

Dire, giustificando le risposte, quali delle seguenti applicazioni da $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$ sono prodotti scalari:

1. $a(x,y) = \left| \sum_{j=1}^{3} x_j y_j \right|$
2. $b(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{3} x_j \right) \left(\sum_{i=1}^{3} y_i \right)$
3. $c(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{3} (x_j + y_j)^2 \right) - \left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2 \right) - \left(\sum_{j=1}^{3} y_j^2 \right).$

Soluzione

1. Scegliamo $x = y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\lambda = -1$. Allora risulta

$$a(\lambda x, y) = |-1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0| = 1 \neq -1(1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) = \lambda a(x,y)$$

quindi a non è omogenea nella prima variabile e non è un prodotto scalare.

2. La b è invece una forma bilineare simmetrica (facile verifica) tuttavia non è definita positiva, infatti, se scegliamo $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ si ottiene che $b(x,x) = (1-1+0)(1-1+0) = 0$ mentre $x \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Osserviamo che:

$$c(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2 + y_j^2 + 2x_j y_j \right) - \left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2 \right) - \left(\sum_{j=1}^{3} y_j^2 \right) = 2 \sum_{j=1}^{3} x_j y_j = 2(x|y)$$

dove $(\cdot|\cdot)$ è il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$. Quindi $c(x,y)$ è un prodotto scalare.

Esercizio 2

Calcolare il determinante delle seguenti applicazioni lineari da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ e, determinarne l'inversa:

1. $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$

2. $L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_3 \\ x_2 + x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 11x_3 \end{pmatrix}.$

Soluzione

1. L'applicazione T è rappresentata nella base canonica dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Per sapere se T è invertibile, devono essere risolubili, con soluzione unica i tre sistemi lineari: $T(x) = e_1, T(x) = e_2, T(x) = e_3$. Dette v_1, v_2 e v_3 le soluzioni, la matrice le cui colonne sono v_1, v_2, v_3 sarà l'inversa di A. Tentiamo quindi di risolvere simultaneamente i tre sistemi riducendo "in forma diagonale" la seguente matrice:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

I passaggi di questa trasformazione sono i seguenti:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Quindi $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Il determinante di T è uguale al determinante della matrice diagonale che compare "a sinistra" nell'ultimo passaggio della diagonalizzazione (non sono stati effettuati scambi di righe). Quindi $\det(T) = 2$.

2. La matrice associata a L nella base canonica è: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 11 \end{pmatrix}$. Calcoliamo il determinante di B svilupandolo nella prima colonna:

$$\det(B) = 1\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1(1 \cdot 11 - 1 \cdot 2) + 3(0 \cdot 1 - 3 \cdot 1) = 0$$

quindi L non è invertibile.

Esercizio 3

Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Data $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da:

$$T(e_3) = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3, \quad T(e_2 + e_3) = e_1, \quad T(e_1 + e_2 + e_3) = e_2 - e_3$$

scrivere le matrici che rappresentano T rispetto alla base canonica e rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione

Determiniamo le immagini secondo T dei vettori della base canonica:

$$T(e_1) = T((e_1 + e_2 + e_3) - (e_2 + e_3)) = (e_2 - e_3) - e_1 = -e_1 + e_2 - e_3;$$

$$T(e_2) = T((e_2 + e_3) - e_3) = e_1 - (2e_1 + 3e_2 + 5e_3) = -e_1 - 3e_2 - 5e_3; \quad T(e_3) = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3.$$

Ne segue che la matrice che rappresenta T nella base canonica è $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$. Consideriamo ora la matrice che ha per colonne i vettori della base $\mathcal{B}$: $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice prodotto AB ha per colonne i vettori $T(v_1), T(v_2), T(v_3)$ espressi nella base canonica. Calcoliamo il prodotto riga per colonna:

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 10 & 2 & -6 \\ 8 & -1 & -10 \end{pmatrix}.$$

Per trovare le coordinate delle colonne di AB nella base $\mathcal{B}$ dobbiamo risolvere i tre sistemi lineari $Bx = (AB)^1$, $Bx = (AB)^2$, $Bx = (AB)^3$ e lo facciamo simultaneamente:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 5 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & 10 & 2 & -6 \\ 5 & 0 & -1 & 8 & -1 & -10 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -1 & -\frac{9}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{20}{3} & \frac{4}{3} & -4 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{26}{3} & -\frac{13}{3} & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{9}{2} & \frac{1}{4} & -4 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{15}{8} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{26}{3} & -\frac{13}{3} & 0 \end{array}\right)$$

quindi, dividendo per gli elementi sulla diagonale si ottiene la matrice che rappresenta T nella base $\mathcal{B}$:

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & \frac{1}{8} & -2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & 1 \\ \frac{13}{4} & \frac{13}{8} & 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che lo stesso risultato si poteva ottenere invertendo la matrice B e considerando il prodotto $B^{-1}AB = A'$.

Esercizio 4

Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$\overline{z}\ |z| = 3i.$$

Soluzione

Calcoliamo il modulo di entrambi i mebri dell'equazione:

$$|\ \overline{z}\ |z|| = |3i|$$

quindi $|z|^2 = 3$ e, di conseguenza $|z| = \sqrt{3}$. Valutando gli argomenti si ottiene:

$$\arg(\overline{z}\ |z|) = \arg(3i) + 2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

quindi

$$-\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Longrightarrow \operatorname{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2}.$$

La soluzione è quindi $z = -\sqrt{3}\, i$.