Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria della Sicurezza Industriale e Nucleare

Matematica II

Pisa, 21 novembre 2002

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1

Trovare una base del nucleo e dell'immagine dell'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. calcolare la dimensione di $\mathrm{span}(\{v_1, v_2, v_3\})$;
2. esprimere i vettori $w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3.
3. calcolare la dimensione di $\mathrm{span}(\{w_1, v_2, v_3\})$.

Esercizio 3

Dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 2k-1 \\ k-1 \\ k \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ k+1 \\ -1 \end{pmatrix}$ determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ risulta $v_3 \in \mathrm{span}(\{v_1, v_2\})$.

Esercizio 4

Dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ completarli a una base di $\mathbb{R}^3$.

Soluzioni del compito del 21 novembre 2002

Esercizio 1

Eseguendo una riduzione a scala della matrice A si ottiene la matrice

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo ora che $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(S)$ e che quest'ultimo è determinato dalle equazioni:

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

che hanno come soluzione la retta $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quindi una base di $\mathrm{Ker}(A)$ è il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice S ha rango 2 e i soli pivot sono nella prima e seconda colonna, quindi i vettori che formano le prime due colonne di A sono una base dell'immagine di A.

Esercizio 2

1. 2. Se indichiamo con A la matrice che ha per colonne i vettori v_1, v_2, v_3, il punto 2 consiste nel risolvere i due sistemi di equazioni $Ax = w_1$ e $Ax = w_2$. Aggiungiamo ad A le due colonne w_1 e w_2 e applichiamo la riduzione a scala ottenendo la matrice:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 4 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{13}{12} \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Quindi il sistema $Ax = w_1$ è equivalente a

$$\begin{cases} 4x_1 = 4 \\ \frac{1}{4}x_2 = -\frac{1}{2} \\ 3x_3 = 0 \end{cases}$$

che ha per soluzione $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 0$. Ne segue che $w_1 = v_1 - 2v_2$. Analogamente $Ax = w_2$ è equivalente a

$$\begin{cases} 4x_1 = -4 \\ \frac{1}{4}x_2 = \frac{13}{12} \\ 3x_3 = 2 \end{cases}$$

che ha per soluzione $x_1 = -1, x_2 = \frac{13}{3}, x_3 = \frac{2}{3}$. Ne segue che $w_2 = -v_1 + \frac{13}{3}v_2 + \frac{2}{3}v_3$. Dalla riduzione a scala di A si deduce anche che $\mathrm{rh}(A) = 3$ quindi la dimensione di $\mathrm{span}(\{v_1, v_2, v_3\})$ è 3.

3. Osserviamo che $w_1 = v_1 - 2v_2$ quindi

$$\mathrm{span}(\{w_1, v_2, v_3\}) = \mathrm{span}(\{v_1 - 2v_2, v_2, v_3\}) = \mathrm{span}(\{v_1, v_2, v_3\}) = \mathbb{R}^3.$$

Esercizio 3

Indichiamo con A le cui colonne sono i vettori v_1 e v_2. Si tratta quindi di risolvere il sistema $Ax = v_3$ con $x \in \mathbb{R}^2$. Costruiamo quindi la matrice associata al sistema

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2k-1 & 3 & 1 \\ k-1 & 1 & k+1 \\ k & 2 & -1 \end{array}\right) \tag{1}$$

e applichiamo una riduzione a scala. Se $k \neq \frac{1}{2}$ la matrice è equivalente a:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2k-1 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{2-k}{2k-1} & \frac{2k^2}{2k-1} \\ 0 & \frac{k-2}{2k-1} & \frac{-3k+1}{2k-1} \end{array}\right) \tag{2}$$

che a sua volta è equivalente a:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2k-1 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{2-k}{2k-1} & \frac{2k^2}{2k-1} \\ 0 & 0 & \frac{2k^2-3k+1}{2k-1} \end{array}\right)$$

Quindi il sistema ha soluzione se e solo se $\frac{2k^2-3k+1}{2k-1} = 0$, cioè $k = 1$ oppure $k = \frac{1}{2}$. La soluzione $k = \frac{1}{2}$ è incompatibile con le condizioni poste, mentre se $k = 1$ il sistema è risolubile e $v_3 \in \operatorname{span}(\{v_1, v_2\})$. Infine se $k = \frac{1}{2}$ sostituiamo nella (1) e otteniamo

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & -1 \end{array}\right)$$

che è equivalente a

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

e anche in quasto caso non c'è soluzione.

Esercizio 4

Aggiungiamo a v_1 e v_2 i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ ottenendo così un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$. Costruiamo la matrice che ha per colonne questi 5 vettori, avendo cura di mettere v_1 e v_2 come prime due colonne e applichiamo la riduzione a scala. La matrice di partenza è quindi:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che dopo la riduzione a scala diventa:

$$S = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{2}{25} & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice ha ovviamente rango 3 e le prime tre colonne sono linearmente indipendenti, quindi anche le prime tre colonne di A lo sono. Allora la base cercata è $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.