Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 28 gennaio 2002

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo solo il risultato nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata vale -1 punti, ogni risposta mancante vale 0 punti.

Domanda 1 Calcolare l'integrale curvilineo $\int_{+\partial T} x^2 \arctan(x^2+y^2)\,dx$ dove

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0\right\}.$$

$\boxed{0}$

Domanda 2 Dire se esiste ed eventualmente calcolare il limite $\lim_{|(x,y)|\to\infty} (x^2+y^2)\cos(x+y)$

$\boxed{\text{NO}}$

Domanda 3 Trovare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y.$$

$\boxed{(0,-1),(0,1),(2,-1),(2,1)}$

Domanda 4 Trovare l'insieme di convergenza puntuale della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-\cos\frac{x}{n}}{x^2+n}$.

$\boxed{\emptyset}$

Domanda 5 Dire se converge uniformemente in $[0,1]$ la seguente successione di funzioni:

$$f_n(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \le x \le 1 - \dfrac{1}{n} \\ -x^2 & \text{se } 1 - \dfrac{1}{n} < x \le 1. \end{cases}$$

$\boxed{\text{NO}}$

Domanda 6 Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + y = 0$

$\boxed{y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}}$

Domanda 7 Trovare l'intervallo massimale di definizione delle soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2}{1-x^2} y \\ y(3) = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{(1, +\infty)}$$

Domanda 8 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_D \frac{x}{y}\, dx\, dy$ dove

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \le x \le 1, x^3 \le y \le x^2 \right\}.$$

$$\boxed{-\frac{1}{8}\log 2 + \frac{3}{16}}$$

Domanda 9 Calcolare l'integrale $\int_D xy\, dx\, dy$ con

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0 \right\}.$$

$$\boxed{\frac{1}{8}}$$

Domanda 10 Scrivere l'equazione parametrica di una curva avente per supporto l'insieme

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 4 \right\}.$$

$$\boxed{x = \cos t,\ y = 2 \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi}$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 28 gennaio 2002

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Svolgere, giustificando le risposte, uno solo dei due esercizi.

Esercizio 1

Si consideri la funzione $f(x, y) = y\sqrt[5]{(x-y)^4}$.

1. Calcolare le derivate parziali di f in $(0,0)$.
2. Dire se f è differenziabile in $(0,0)$.
3. Dire se f è differenziabile in $(1,1)$.
4. Trovare i punti di massimo e di minimo relativo per f.
5. Trovare il massimo e il minimo assoluti di f.

Soluzione

1.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\sqrt[5]{h^4}}{h} = 0.$$

2.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)(x-0)-f_y(0,0)(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sqrt[5]{(x-y)^4}}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\sin\vartheta(\rho\cos\vartheta - \rho\sin\vartheta)^{\frac{4}{5}}}{\rho} = 0$$

dove l'ultimo limite è uniforme rispetto a ϑ. Quindi f è differenziabile in $(0,0)$.

3.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[5]{h^4}}{h}$$

e questo limite non esiste (da destra vale $+\infty$ mentre da sinistra $-\infty$). Ne segue che f non è differenziabile in $(1,1)$.

4. Nei punti dove $x \neq y$ la f è di classe C^1. Calcoliamone le derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4}{5} y (x-y)^{-\frac{1}{5}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = (x-y)^{\frac{4}{5}} + \frac{4}{5} y (x-y)^{-\frac{1}{5}}.$$

   Quindi il gradiente di f non si annulla mai nei punti dove $x \neq y$. Ne segue che gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo possono essere solo sulla retta $x = y$. Risulta $f(x, x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x, y) \geq 0$ se $y \geq 0$ e $f(x, y) \leq 0$ se $y \leq 0$. Ne segue che i punti della retta $x = y$ con $x > 0$ sono di minimo relativo, quelli con $x < 0$ son di massimo realtivo, mentre il punto $(0, 0)$ non è né di massimo né di minimo relativo.

5. Consideriamo la restrizione della f alla retta di equazione $x = 0$. Risulta

$$\lim_{y \to \infty} f(0, y) = \lim_{y \to \infty} y \sqrt[5]{y^4} = \infty$$

$$\lim_{y \to -\infty} f(0, y) = \lim_{y \to \infty} y \sqrt[5]{y^4} = -\infty$$

   quindi f non ha massimo e minimo assoluti.

Esercizio 2

Calcolare $\int_D |y| - 1 \, dx \, dy$ dove D è la regione compresa fra la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 9$ e l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Soluzione

Il dominio D è simmetrico sia rispetto all'asse x che all'asse y. La funzione $f(x, y) = |y|$ è anch'essa simmetrica sia rispetto all'asse x che all'asse y. Ne segue che, ponendo

$$E = \{(x, y) \in D : x \geq 0, y \geq 0\},$$

si ottiene:

$$\int_D |y| \, dx \, dy = 4 \int_E |y| \, dx \, dy.$$

Il dominio E è normale sia rispetto all'asse x che all'asse y. In particolare

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, \ \sqrt{4 - \frac{4}{9} x^2} \leq y \leq \sqrt{9 - x^2} \right\}$$

Quindi:

$$\int_E |y| \, dx \, dy = \int_0^3 dx \int_{\sqrt{4 - \frac{4}{9} x^2}}^{\sqrt{9 - x^2}} y \, dy = \frac{1}{2} \int_0^3 5 - \frac{5}{9} x^2 \, dx = 5.$$

Ne segue che $\int_D |y| \, dx \, dy = 20$. Infine $\int_D -1 \, dx \, dy = -\text{mis}(D) = -(9\pi - 6\pi) = -3\pi$. Quindi $\int_D |y| - 1 \, dx \, dy = 20 - 3\pi$.