Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 8 gennaio 2002

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo solo il risultato nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata vale -1 punti, ogni risposta mancante vale 0 punti.

Domanda 1 Calcolare $\int_D \cos(x-y)\,dx\,dy$ dove $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -\frac{\pi}{2}, y \leq \frac{\pi}{2}, y-x \geq 0\right\}$.

$\boxed{2}$

Domanda 2 Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma 2x+3y+2\,ds$ dove γ è la curva semplice che ha per supporto l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 2, x \leq 0, y \geq 0\}$.

$\boxed{2+\sqrt{2}\pi}$

Domanda 3 Calcolare l'integrale $\int_\gamma 2x\,dy$ dove γ è l'arco della curva $y = e^{2x}$ che congiunge i punti $(0,1)$ e $(1,e^2)$.

$\boxed{e^2+1}$

Domanda 4 Trovare l'insieme di convergenza puntuale della successione di funzioni:

$$f_n(x) = (2-x)x^n.$$

$\boxed{(-1,1] \cup 2}$

Domanda 5 Risolvere l'equazione differenziale $y' = -y\dfrac{\sin x \cos x}{1+\cos(2x)}$.

$\boxed{y = c\sqrt[4]{1+\cos(2x)}}$

Domanda 6 Calcolare $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{1}{1+\sin^2 x+\cos y}$.

$\boxed{+\infty}$

Domanda 7 Dire se è differenziabile in $(0,0)$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{2x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$\boxed{\text{NO}}$

$\boxed{y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + c_3 x e^x}$

Domanda 8 Risolvere l'equazione differenziale $y''' - 3y' + 2y = 0$.

$\boxed{\text{SI}}$

Domanda 9 Dire se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{2+(3n+1)x}}$ converge uniformemente in $[0,+\infty)$.

Domanda 10 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_D x^2 + y^2 \, dx\, dy$ dove

$\boxed{\dfrac{1}{2}}$

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1, y \leq 1, x \geq 1-y \right\}.$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 8 gennaio 2002

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Svolgere, giustificando le risposte, uno solo dei due esercizi.

Esercizio 1

Sia $f(x,y) = \dfrac{3xy}{(x^2+y^2)^3}$.

1. Trovare il massimo e il minimo assoluti di f sull'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.
2. Trovare i punti di massimo e di minimo relativo per f in D.

Esercizio 2

Risolvere l'equazione differenziale $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Soluzioni del compito del 8 gennaio 2002

Esercizio 1

1. La funzione f è continua in D che è un insieme compatto, quindi ammette massimo e minimo assoluti. La f è inoltre di classe C^1 e ne possiamo calcolare le derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3y(y^2 - 5x^2)}{(x^2 + y^2)^4}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3x(x^2 - 5y^2)}{(x^2 + y^2)^4}.$$

Il gradiente di f non si annulla mai, quindi non ci sono punti di massimo o di minimo interni a D. La frontiera di D è formata dall'unione dei supporti di due curve regolari. Parametrizziamo $x^2 + y^2 = 1$ con la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$. La restrizione corrispondente è $\phi(t) = $ $= (f \circ \gamma)(t) = 3 \cos t \sin t = \dfrac{3}{2} \sin(2t)$. Il massino di ϕ è $\dfrac{3}{2}$ mentre il minimo è $-\dfrac{3}{2}$.

L'altra parte di frontiera è l'insieme $x^2 + y^2 = 4$ che parametrizziamo con la curva $\alpha(t) = $ $= \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$. La restirizione di f su questo insieme è dato dalla funzione $\psi(t) = $ $= (f \circ \alpha)(t) = \dfrac{3 \cos t \sin t}{16} = \dfrac{3}{32} \sin(2t)$. Il massino di ψ è $\dfrac{3}{32}$ mentre il minimo è $-\dfrac{3}{32}$.

Quindi il massimo assoluto di f su D è $\dfrac{3}{2}$ mentre il minimo assoluto è $-\dfrac{3}{2}$.

2. Dal punto precedente sappiamo che non esistono punti stazionari interni a D. I punti $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono punti di massimo assoluto quindi anche relativo per f. I punti $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono punti di minimo assoluto quindi anche relativo per f.

Gli altri possibili punti sono quelli stazionari per la restrizione ψ, quindi i punti dove si annulla $\psi'(t)$ che corrispondono a $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.

I primi due sono punti di massimo relativo per la ψ. Consideriamo ora la restrizione "radiale" $g(t) = f(t, t)$, $t \in \left[1, \sqrt{2}\right]$. Risulta $g(t) = \dfrac{1}{8t^4}$, quindi il punto $t = \sqrt{2}$ è di minimo per g. Ne segue che il punto $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ non è né di massimo né di minimo relativo per f su D. Ragionamento analogo per i restanti tre punti. Non ci sono quindi altri punti di massimo o di minimo relativo per f oltre a quelli assoluti.

Osserviamo che si potevano sfruttare le numerose simmetrie della f:

$$f(-x, y) = -f(x, y) = f(x, -y) = -f(-x, -y).$$

Esercizio 2

Risolviamo prima l'equazione omogenea associata: $y'' + 4y = 0$. Il suo polinomio caratteristico è $\lambda^2 + 4$ che ha le radici $\lambda_1 = -2i$, $\lambda_2 = 2i$. Quindi un sistema fondamentale di soluzioni è dato dalle funzioni

$$y_1 = \cos(2x), \qquad y_2 = \sin(2x).$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare con il metodo della variazione delle costanti, quindi cerchiamo una funzione y_0 della forma $y_0 = v_1 y_1 + v_2 y_2$. Risolviamo pertanto il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

La soluzione è data da:

$$v_1' = -\sin x, \qquad v_2' = \cos x - \frac{1}{2\cos x}.$$

Integrando si ottiene (a meno di costanti additive):

$$v_1 = \cos x, \qquad v_2 = -\sin x - \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right|.$$

Quindi la soluzione completa dell'equazione differenziale è:

$$y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \cos(2x) \cos x + \sin(2x) \left(-\sin x - \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right| \right).$$