Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 24 settembre 2001

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo solo il risultato nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata vale -1 punti, ogni risposta mancante vale 0 punti.

Domanda 1 Trovare l'insieme di convergenza puntuale della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{|2x|^n}{\sqrt{1+4nx^2}}$$

$\boxed{|x| \leq \frac{1}{2}}$

Domanda 2 Calcolare $\int_D xy\,dx\,dy$ dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

$\boxed{\frac{1}{8}}$

Domanda 3 Sia $F(x,y,z) = x^3+y^2+z^2-\sin(x+y)$. L'equazione $F(x,y,z)=0$ definisce implicitamente nell'intorno di $P=(-1,1,0)$ una funzione $x = x(y,z)$. Calcolare $\frac{\partial x}{\partial y}(P)$.

$\boxed{-\frac{1}{2}}$

Domanda 4 Trovare una primitiva locale della forma differenziale

$$\omega = \left(x^2 - \frac{3x}{y}\right) dx + \left(3 + \frac{3x^2}{2y^2}\right) dy$$

$\boxed{U(x,y) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2y} + 3y + c}$

Domanda 5 Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$2y'' + 2y' - 1 = 0$$

$\boxed{y = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{x}{2}}$

Domanda 6 Dire se esiste unica la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \cos(x^2 y) \\ y(0) = 2 \end{cases} \quad \text{sull'intervallo } [-1,1].$$

$\boxed{\text{SI}}$

$\boxed{\mathbb{R}}$

Domanda 7 Trovare l'insieme di convergenza puntuale della serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n^2} x^n$.

Domanda 8 Trovare gli estremi superiore in e inferiore in $\mathbb{R}^2$ della funzione

$\boxed{\sup f = +\infty, \ \inf f = 1}$

$$f(x, y) = x^2 + y^4 + 1.$$

Domanda 9 Trovare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2$ sull'insieme

$\boxed{\min_D f = 12, \ \max_D f = 48}$

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 0, \ 2 \leq y \leq 4\right\}.$$

Domanda 10 Trovare la lunghezza della curva

$\boxed{\frac{\sqrt{26}}{5}\left(e^{-10} - e^{-10\pi}\right)}$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^{-5t} \sin t \\ e^{-5t} \cos t \end{pmatrix} \quad t \in [2, 2\pi]$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 24 settembre 2001

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Svolgere, giustificando le risposte, uno solo dei due esercizi.

Esercizio 1

Sia $f(x,y) = \dfrac{x^2 + 27y + xy^2}{xy}$.

1. Trovare l'insieme di definizione di f.
2. Trovare massimo e minimo assoluto di f.
3. Trovare i punti di massimo e di minimo relativo per f.
4. Trovare i punti di sella di f.

Esercizio 2

Si consideri l'equazione differenziale $y' = x^5 y(1-y)$.

1. Dire per quali valori iniziali vale il teorema di esistenza e unicità.
2. Trovare l'integrale generale.
3. Trovare la soluzione con la condizione iniziale $y(0) = -\dfrac{1}{2}$.

Soluzioni del compito del 24 settembre 2001

Esercizio 1

1. La f è definita sull'insieme $D = \mathbb{R}^2 \setminus (\{x = 0\} \cup \{y = 0\})$.

2. Considerando la restrizione alla retta $y = 1$ (con $x \neq 0$) si ottiene

$$\lim_{x\to\infty} f(x,1) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x,1) = -\infty$$

quindi

$$\sup_D f = +\infty, \qquad \inf_D f = -\infty.$$

3. 4. L'insieme D è aperto, quindi nei punti di massimo e di minimo relativo si annulla il gradiente di f.

$$f_x = \frac{x^2 - 27y}{xy}, \qquad f_y = \frac{y^2 - x}{y^2}.$$

Il gradiente si annulla nel solo punto $P = (9,3)$. Valutiamo la matrice hessiana:

$$f_{xx} = \frac{x^2 + 27y}{yx^2}, \qquad f_{xy} = -\frac{x}{y^2}, \qquad f_{yy} = \frac{2x}{y^3}$$

quindi $Hf(P) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Essendo $\det Hf(P) = -\frac{5}{9} < 0$ la forma quadratica hessiana è indefinita e il punto P è un punto di sella. Non ci sono punti di massimo o di minimo relativo.

Esercizio 2

1. Poniamo $f(x,y) = x^5 y(1-y)$. Risulta $f_y = x^5(1-2y)$ che è una funzione continua in tutto $\mathbb{R}^2$ quindi il teorema di esistenza e unicità vale in forma locale per ogni possibile coppia di valori iniziali.

2. L'equazione è a variabili separabili. Ci sono le soluzioni costanti $y \equiv 0$ e $y \equiv 1$. Nel caso $y \neq 0$ e $y \neq 1$ si integra l'equazione:

$$\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int x^5\, dx + c$$

che ha come soluzione

$$\log\left|\frac{y}{1-y}\right| = \frac{x^6}{6} + c$$

e di conseguenza, se $0 < y < 1$

$$y = \frac{e^{\frac{x^6}{6}+c}}{1 + e^{\frac{x^6}{6}+c}}.$$

Se invece $y < 0$ oppure $y > 1$

$$y = \frac{e^{\frac{x^6}{6}+c}}{e^{\frac{x^6}{6}+c} - 1}.$$

3. Imponendo la condizione iniziale $y(0) = -\frac{1}{2}$ e tenedo conto del fatto che per il teorema di esistenza e unicità $y < 0$, si ha $e^c = \frac{1}{3}$ quindi

$$y = \frac{e^{\frac{x^6}{6}}}{e^{\frac{x^6}{6}} - 3}.$$