Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 10 settembre 2001

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo solo il risultato nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata vale -1 punti, ogni risposta mancante vale 0 punti.

Domanda 1 Trovare la primitiva della forma differenziale $\omega = (x-y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy$ che vale 2 nel punto $(1,0)$.

$$\boxed{U(x,y) = \frac{1}{3}(x-y)^3 + \frac{5}{3}}$$

Domanda 2 Calcolare la lunghezza della curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\sin^3 t \\ 2\cos^3 t \end{pmatrix}$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\boxed{3}$$

Domanda 3 Dire se la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \log\left(1 + \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se } 1 + \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

è continua nel punto $(0,0)$.

$$\boxed{\text{SI}}$$

Domanda 4 Scrivere la matrice jacobiana della funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(3x) \\ e^{3x} + y^4 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} -3\sin(3x) & 0 \\ 3e^{3x} & 4y^3 \end{pmatrix}}$$

Domanda 5 Risolvere l'equazione differenziale $y' e^{x^2} - x = xy^2$.

$$\boxed{y(x) = \tan\left(c - \frac{e^{-x^2}}{2}\right)}$$

Domanda 6 Risolvere l'equazione differenziale $y'' + y = 3\cos x$

$$\boxed{y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{3}{2} x \sin x}$$

Domanda 7 Dire se l'insieme $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2y + 2x + \cos(xy) + 1 - 2e^y = 0\}$ è localmente un grafico in un intorno del punto $(0,0)$.

$\boxed{\text{SI}}$

Domanda 8 Calcolare $\int\limits_D x^2 - y \, dx \, dy$ dove $D = [0,1] \times [0,1]$.

$\boxed{-\frac{1}{6}}$

Domanda 9 Dire se la forma differenziale $\omega = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2y^2}} \, dx + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+2y^2}} \, dy$ è esatta sul suo insieme di definizione.

$\boxed{\text{NO}}$

Domanda 10 Trovare l'insieme di convergenza puntuale della successione

$f_n(x) = \dfrac{n^2(x+1)}{x^n}$, definita per $x > 0$.

$\boxed{(1, +\infty)}$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 10 settembre 2001

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Svolgere, giustificando le risposte, uno solo dei due esercizi.

Esercizio 1

Data l'equazione differenziale $y'' - 6y' + 10y = 0$

1. determinarne l'integrale generale
2. risolvere l'equazione con le condizioni $y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
3. scrivere il sistema lineare del primo ordine associato all'equazione.

Esercizio 2

Sia $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq x\}$.

1. Disegnare l'insieme T.
2. Disegnare l'insieme T' trasformato di T in coordinate polari.
3. Calcolare $\displaystyle\int_T \frac{y}{x}\, dx\, dy$.

Soluzioni del compito del 10 settembre 2001

Esercizio 1

1. L'equazione carratteristica associata all'equazione differenziale è $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$ che ha come radici $\lambda_1 = 3 - i, \lambda_2 = 3 + i$. Quindi l'integrale generale dell'equazione è
$$y(x) = e^{3x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x).$$

2. Calcolando la soluzione in $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$ si ottiene $y(0) = c_1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_2 e^{\frac{3}{2}\pi}$, quindi si deve risolvere il sistema:
$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 e^{\frac{3}{2}\pi} = 1 \end{cases}$$
che ha come soluzione $c_1 = 0,\ c_2 = e^{-\frac{3}{2}\pi}$. La soluzione cercata è quindi
$$y(x) = e^{3x - \frac{3}{2}\pi} \sin x.$$

3. Aggiungendo la variabile $u = y'$ si ottiene $u' = y''$ e il sistema di equazioni differenziali:
$$\begin{cases} u' = 6u - 10y \\ y' = u. \end{cases}$$

Esercizio 2

1. L'insieme T è un settore di corona circolare di raggi 1 e 2 e di angolo compreso fra 0 e $\frac{\pi}{4}$.

2. L'insieme T' è un rettangolo con ρ compreso fra 1 e 2 e ϑ compreso fra 0 e $\frac{\pi}{4}$.

3.
$$\int_T \frac{y}{x}\, dx\, dy = \int_{T'} \frac{\rho \sin\vartheta}{\rho\cos\vartheta} \rho\, d\rho\, d\vartheta = \int_1^2 \rho\, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\, d\vartheta = \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^2 \Big[-\log|\cos\vartheta|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{4}\log 2.$$