Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 9 luglio 2001

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo solo il risultato nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata vale -1 punti, ogni risposta mancante vale 0 punti.

Domanda 1 Trovare una primitiva della forma differenziale

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2-3}\,dx + \left(\sin(4y) + \frac{y}{x^2+y^2-3}\right)dy.$$

$$\boxed{U(x,y) = \frac{1}{2}\log\left|x^2+y^2-3\right| - \frac{\cos(4y)}{4} + c}$$

Domanda 2 Calcolare l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma \left(x^2+y^2\right)^3 ds$ dove γ è la curva che ha per supporto la circonferenza con centro nell'origine e raggio 2.

$$\boxed{256\pi}$$

Domanda 3 Sia $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{y-4} & \text{se } y \neq 4 \\ 0 & \text{se } y = 4. \end{cases}$

Calcolare le derivate parziali di f nel punto $(0,4)$.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0}$$

Domanda 4 Sia $f(x,y) = \dfrac{y}{x-2} + \log(x^2+1)$. Dire se f ammette massimo assoluto sull'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0,\ y \geq 0,\ x \geq y-1\}$.

$$\boxed{\text{SI}}$$

Domanda 5 Sia $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + y^4 + \sin(x+y^2) = 0\}$. Dire se Γ in un intorno del punto $(0,0)$ è localmente un grafico.

$$\boxed{\text{SI}}$$

Domanda 6 Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$\boxed{y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x}}$$

$$y''' - 2y'' = 0.$$

Domanda 7 Trovare l'intervallo massimale di definizione della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^4}{1+x^5} - \dfrac{\sin x}{x-2}\, y \\ y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 3. \end{cases} \qquad \boxed{(-1, 2)}$$

Domanda 8 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_D \frac{x}{y}\, dx\, dy$ dove

$$\boxed{\frac{3}{4}\log 2}$$

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le x \le y\right\}.$$

Domanda 9 Trovare l'insieme di convergenza puntuale della serie di funzioni

$$\boxed{(-\infty, 0)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(x+1)e^{nx}.$$

Domanda 10 Calcolare la funzione limite della successione $f_n(x) = \dfrac{n^2x^2 + 2n^2}{n^2+1}$. $\boxed{f(x) = x^2 + 2.}$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 9 luglio 2001

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Svolgere, giustificando le risposte, uno solo dei due esercizi.

Esercizio 1

Sia $g_1(x,y) = 11e^{x+y} - 5y + \dfrac{1}{x} + 5$.

1. Determinare massimo e minimo assoluti oppure estremo superiore e inferiore di g_1 sul suo insieme di definizione.

2. Trovare i punti di massimo, di minimo relativo o di sella per g_1.

Data $g_2(x,y) = 11e^{x+y} + 5y - \dfrac{1}{x} - 5$, si consideri l'equazione $g_2(x,y) = 0$.

3. Verificare che in un intorno di $x = 1$ l'equazione $g_2(x,y) = 0$ definisce una funzione implicita $f(x)$ tale che $f(1) = -1$.

4. Trovare il dominio di f.

5. Studiare la monotonia di f.

Esercizio 2

Sia $\omega = \dfrac{2y - 4x}{4x^2 + y^2}\, dx - \dfrac{y + 2x}{4x^2 + y^2}\, dy$.

1. Trovare l'insieme di definizone di ω.

2. Dire se ω è chiusa.

3. Dire se ω ammette potenziale sul suo insieme di esistenza ed eventualmene calcolarlo.

4. Dire se ω ammette potenziale sull'insieme $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$ ed eventualmente calcolarlo.

5. Calcolare l'integrale curvilineo: $\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva definita implicitamente dall'equazione $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \dfrac{1}{4}$.

Soluzioni del compito del 9 luglio 2001

Esercizio 1

La funzione è definita sull'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.
Consideriamo la funzione ristretta alla retta $y = 0$. Risulta

$$\lim_{x\to 0^+} g_1(x,0) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} g_1(x,0) = -\infty$$

quindi la funzione non ammette massimo e minimo assoluti in D.
L'insieme D è aperto, quindi nei punti di massimo o di minimo locali il gradiente di g_1 si annulla.

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = 11e^{x+y} - \frac{1}{x^2}, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial y} = 11e^{x+y} - 5$$

e il gradiente si annulla nei punti $P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \log 5 - \log 11 - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \log 5 - \log 11 + \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.
Calcoliamo le derivate seconde di g_1:

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2} = 11e^{x+y} + \frac{2}{x^3}, \qquad \frac{\partial^2 g_1}{\partial x \partial y} = 11e^{x+y}, \qquad \frac{\partial^2 g_1}{\partial y^2} = 11e^{x+y}.$$

La matrice Hessiana in P risulta: $Hg_1(P) = \begin{pmatrix} 5+10\sqrt{5} & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ che ha determinante positivo. Essendo $\dfrac{\partial^2 g_1}{\partial x^2}(P) > 0$ la forma quadratica associata è definita positiva, quindi il punto P è di minimo relativo.
La matrice Hessiana in Q risulta: $Hg_1(Q) = \begin{pmatrix} 5-10\sqrt{5} & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ che ha determinante negativo. La forma quadratica associata è indefinita, quindi il punto Q è di sella.
Verifichiamo le ipotesi del teorema del Dini nel punto $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
$g_2(1,-1) = 0$, $\dfrac{\partial g_2}{\partial y} = 11e^{x+y} + 5$, $\dfrac{\partial g_2}{\partial y}(1,-1) = 16 \neq 0$, quindi le ipotesi sono verificate e l'equazione $g_2 = 0$ definisce localmente una funzione implicita $y = f(x)$.
Osserviamo ora che $\dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) > 0$ in ogni punto (x,y) del dominio di definizione di g_2 (che è ancora D). Fissando un punto $\bar{x} \neq 0$ risulta

$$\lim_{y\to -\infty} g_2(\bar{x},y) = -\infty, \qquad \lim_{y\to +\infty} g_2(\bar{x},y) = +\infty$$

quindi il teorema degli zeri, insieme alla monotonia di g_2 rispetto a y ci assicura che esiste un unico $\bar{y} = f(\bar{x})$ tale che $g_2(\bar{x},\bar{y}) = 0$. Il dominio di f è quindi $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Dal teorema del Dini risulta

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial g_2}{\partial x}}{\dfrac{\partial g_2}{\partial y}}$$

ed essendo $\dfrac{\partial g_2}{\partial x} = 11e^{x+y} + \dfrac{1}{x^2} > 0$ in ogni punto di D, si ha che $f'(x) < 0$ per ogni $x \neq 0$. Ne segue che la funzione f è monotona decrescente su ognuna delle due semirette $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$.

Esercizio 2

La forma differenziale ω è definita in $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Ponendo $\omega = X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy$ risulta:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{8x^2 - 2y^2 + 8xy}{(4x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

quindi ω è chiusa.
Osserviamo che Ω non è semplicemente connesso, quindi per vedere se ω ammette potenziale calcoliamo il suo integrale su una curva che gira intorno all'origine. Sia quindi α la curva di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = 2\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Risulta $x'(t) = -\sin t,\ y'(t) = 2\cos t$, quindi

$$\int_\alpha \omega = \int_0^{2\pi} \frac{4\sin t - 4\cos t}{4}(-\sin t) - \frac{2\sin t + 2\cos t}{4} 2\cos t\,dt = \int_0^{2\pi} -\sin^2 t - \cos^2 t\,dt = -2\pi \neq 0.$$

La forma differenziale quindi non ammette potenziale in Ω.
L'insieme Q è invece semplicemente connesso (è convesso), quindi la forma differenziale è esatta su Q. Determiniamone un potenziale $U(x,y)$.

$$U(x,y) = \int X(x,y)\,dx + \phi(y) = \int \frac{2y-4x}{4x^2+y^2}\,dx + \phi(y) = \frac{2}{y}\int \frac{dx}{\frac{4x^2}{y^2}+1} - \frac{1}{2}\int \frac{8x}{4x^2+y^2}\,dx + \phi(y) =$$

$$= \arctan\left(\frac{2x}{y}\right) - \frac{1}{2}\log(4x^2+y^2) + \phi(y).$$

Ricaviamo ora la funzione incognita $\phi(y)$ dalla condizione $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Y$, ottenendo $\phi'(y) = 0$ quindi ϕ costante. Ne segue che il potenziale è della forma

$$U(x,y) = \arctan\left(\frac{2x}{y}\right) - \frac{1}{2}\log(4x^2+y^2) + c$$

con c costante arbitraria.
Essendo la curva γ chiusa e contenuta in Q dove la forma ω è esatta, ne segue che $\int_\gamma \omega = 0$.