Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 18 giugno 2001

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo solo il risultato nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata vale -1 punti, ogni risposta mancante vale 0 punti.

Domanda 1 Trovare l'insieme di convergenza uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n^3+2}} 2^n.$$

$$\boxed{-\tfrac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \tfrac{1}{\sqrt{2}}}$$

Domanda 2 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_D \frac{2x}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ dove

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 2y + 3\sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

$$\boxed{0}$$

Domanda 3 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale:

$$y' = \frac{y^2+4}{3x}\ .$$

$$\boxed{y = 2\tan\left(\tfrac{2}{3}\log|x| + c\right)}$$

Domanda 4 Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 8y' + 20y = 0.$$

$$\boxed{y = e^{4x}\left(c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)\right)}$$

Domanda 5 Trovare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = y^2(9x^2+y^2-1).$$

$$\boxed{\{y=0\},\ \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

Domanda 6 Dire se esiste ed eventualmente calcolare, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 + 2x + 3x^2 y}{xy} \quad .$$

Non esiste

Domanda 7 L'equazione $2x + 3y^2 + z^2 + \sin(2x + y) = 0$ definisce implicitamente, in un intorno del punto $(0, 0, 0)$ una funzione $y = y(x, z)$. Calcolare $\dfrac{\partial y}{\partial x}(0, 0)$.

-4

Domanda 8 Calcolare la lunghezza della curva $\begin{cases} x(t) = 1 + 2\cos t \\ y(t) = 2t - 2\sin t \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$.

8

Domanda 9 Determinare una funzione f tale che la forma differenziale $\omega = 2xf(y)\,dx + x^2 y f(y)\,dy$ sia esatta in $\mathbb{R}^2$.

$f(y) = e^{\frac{y^2}{2}}$

Domanda 10 Dire se la forma differenziale $\omega = \left(\log(2x) + \dfrac{y}{x}\right) dx - \dfrac{y}{x}\,dy$ è esatta sull'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

NO

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 18 giugno 2001

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Svolgere, giustificando le risposte, uno solo dei due esercizi.

Esercizio 1

Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = \sqrt[4]{\log(4x)}\,(\log(4x))^n$.

1. Trovare l'insieme di definizione.
2. Trovare l'insieme di convergenza puntuale e calcolare il limite puntuale di f_n.
3. Dire se la successione converge uniformemente sul suo insieme di convergenza puntuale.
4. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)f_n(x)$.
5. Dire su quale insieme la somma della serie è una funzione derivabile.

Esercizio 2

Si consideri l'equazione differenziale $y' = \dfrac{x+y}{1-x}$.

1. Per quali valori iniziali (x_0, y_0) esiste unica la soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione?
2. Trovare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione in funzione del dato iniziale (x_0, y_0).
3. Studiare la crescenza o decrescenza delle soluzioni.
4. Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.
5. Tracciare un grafico approssimativo delle soluzioni per i dati iniziali $(0,0)$ e $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 18 giugno 2001

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Svolgere, giustificando le risposte, uno solo dei due esercizi.

Esercizio 1

Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = \sqrt{\log(3x)}\,(\log(3x))^n$.

1. Trovare l'insieme di definizione.
2. Trovare l'insieme di convergenza puntuale e calcolare il limite puntuale di f_n.
3. Dire se la successione converge uniformemente sul suo insieme di convergenza puntuale.
4. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)f_n(x)$.
5. Dire su quale insieme la somma della serie è una funzione derivabile.

Esercizio 2

Si consideri l'equazione differenziale $y' = \dfrac{x+y}{2-x}$.

1. Per quali valori iniziali (x_0, y_0) esiste unica la soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione?
2. Trovare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione in funzione del dato iniziale (x_0, y_0).
3. Studiare la crescenza o decrescenza delle soluzioni.
4. Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.
5. Tracciare un grafico approssimativo delle soluzioni per i dati iniziali $(0,0)$ e $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$.

Soluzioni del compito del 18 giugno 2001

Esercizio 1

L'insieme di definizione della successione è dato dalle condizioni $\begin{cases} 4x > 0 \\ \log(4x) \geq 0 \end{cases}$ che danno come soluzione $x \geq \frac{1}{4}$.
Il limite puntuale esiste se e solo se $0 \leq \log(4x) \leq 1$, cioè $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{e}{4}$.
La funzione limite sarà $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{1}{4} \leq x < \frac{e}{4} \\ 1 & \text{se } x = \frac{e}{4} \end{cases}$.
La convergenza sull'insieme $\left[\frac{1}{4}, \frac{e}{4}\right]$ non è uniforme in quanto le funzioni della successione sono continue, mentre la funzione limite non lo è.
Osserviamo ora che $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)f_n(x) = \sqrt[4]{\log(4x)}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\log(4x)\right)^n$. Operiamo quindi la sostituzione $t = \log(4x)$ e studiamo la convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n$. Essendo $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1} = 1$ il raggio di convergenza è $R = 1$. Siamo interessati solo al caso $t \geq 0$ (a causa della condizione $\log(4x) \geq 0$. Per $t = 1$ la serie non converge in quanto il termine generale non è infinitesimo. L'insieme di convergenza puntuale sarà quindi $0 \leq t < 1$ e di conseguenza $\frac{1}{4} \leq x < \frac{e}{4}$. La convergenza uniforme sarà invece sui sottoinsiemi compatti del disco di convergenza, quindi in insiemi del tipo $0 \leq t \leq \alpha < 1$, e, in termini della variabile x: $\frac{1}{4} \leq x \leq a < \frac{e}{4}$.
Se indichiamo con $S(x)$ la somma della serie, avremo $S(x) = \sqrt[4]{\log(4x)}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\log(4x)\right)^n$. La funzione $g(x) = \sqrt[4]{\log(4x)}$ è derivabile per $x > \frac{1}{4}$. Poniamo quindi $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\log(4x)\right)^n$. Operando la stessa sostiuzione di prima definiamo $\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n$ e otteniamo $h(x) = \phi\left(\log(4x)\right)$. La funzione ϕ è somma di una serie di potenze ed è quindi derivabile all'interno del suo disco aperto di convergenza, cioè per $|t| < 1$. La funzione $x \longrightarrow \log(4x)$ è derivabile per $x > 0$, ne segue che la composizione di funzioni h è derivabile se $0 < x < \frac{e}{4}$. Quindi S che è il prodotto di g ed h sarà derivabile se $\frac{1}{4} < x < \frac{e}{4}$.

Esercizio 2

L'equazione è definita per $x \neq 1$ ed è lineare a coefficienti continui, quindi la soluzione esiste unica sulla semiretta $x < 1$ oppure sulla semiretta $x > 1$. L'intervallo massimale di definizione della soluzione sarà quindi $x > 1$ se $x_0 > 1$, $x < 1$ se $x_0 < 1$.
Scriviamo l'equazione come $y' = \frac{y}{1-x} + \frac{x}{1-x}$. Ponendo $a(x) = \frac{1}{1-x}$, $b(x) = \frac{x}{1-x}$ applichiamo la formula risolutiva:

$$y(x) = e^{\int a(x)\,dx}\left(c + \int e^{-\int a(x)\,dx}b(x)\,dx\right)$$

ottenendo

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}\left(c - \frac{x^2}{2}\right) & \text{se } x > 1 \\ \frac{1}{1-x}\left(c + \frac{x^2}{2}\right) & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Lo studio del segno di y' fatto direttamente sull'equazione differenziale, ci dice che le soluzioni saranno crescenti negli insiemi $\{y > -x,\ x < 1\}$ e $\{y < -x,\ x > 1\}$ mentre saranno decrescenti negli insiemi $\{y > -x,\ x > 1\}$ e $\{y < -x,\ x < 1\}$. I punti della retta $y = -x$ saranno punti di minimo assoluto se $x < 1$, di massimo assoluto se $x > 1$.
La soluzione con $y(0) = 0$ è $y(x) = \frac{x^2}{2(1-x)}$ mentre quella con $y(0) = -\frac{1}{2}$ è $y(x) = \frac{x^2-1}{2(1-x)} = -\frac{x+1}{2}$.