Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 28 maggio 2001

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo solo il risultato nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata vale -1 punti, ogni risposta mancante vale 0 punti.

Domanda 1 Calcolare l'integrale $\int_D -3x\,dx\,dy$ dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x, x \leq 1\}$.

$\boxed{-\frac{12}{5}}$

Domanda 2 Si consideri il problema di Cauchy: $\begin{cases} y' = 2x^5(y^2-1) \\ y(0) = 2. \end{cases}$

Dire se il punto $x = 0$ è di massimo relativo, minimo relativo oppure di flesso per la soluzione.

$\boxed{\text{Minimo}}$

Domanda 3 Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} y' = e^{x-y}(1+x) \\ y(1) = 1. \end{cases}$

$\boxed{y = x + \log x}$

Domanda 4 Calcolare il limite puntuale della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{2n^2}{n+1} \log\left(1 + \frac{\sin x}{n}\right).$$

$\boxed{f(x) = 2\sin x}$

Domanda 5 Calcolare una primitiva della forma differenziale

$$\omega = \left(2\log x + \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+2y^2-1}}\right) dx + \frac{2y}{\sqrt[3]{x^2+2y^2-1}}\, dy.$$

$\boxed{U(x,y) = 2x\log x - 2x + \frac{3}{4}\left(x^2+2y^2-1\right)^{\frac{2}{3}}}$

Domanda 6 Trovare i punti stazionari della funzione $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - \log|x^2+y^2-1|$.

$\boxed{(0,0), \left(0, \frac{-\sqrt{5}}{2}\right), \left(0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right), \left(-\sqrt{2}, 0\right), \left(\sqrt{2}, 0\right)}$

Domanda 7 Sia $f(x,y) = x^5 + y^5 - x^3 + y^2$. Si consideri il punto stazionario $\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right)$ e si dica se è di massimo relativo, minimo relativo oppure di sella.

$\boxed{\text{Minimo}}$

Domanda 8 Calcolare la lunghezza della curva

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \sin(2t) \\ z(t) = \dfrac{t}{2} \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

$\boxed{\sqrt{17}\pi}$

Domanda 9 L'equazione $x^3 - y + e^{x^2-y^2} + 1 - \frac{1}{e} + 3x = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno del punto $(0,1)$. Calcolare $y'(0)$.

$\boxed{\dfrac{3e}{2+e}}$

Domanda 10 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_D \frac{x^2+y^2-4}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$ dove

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq 0,\ y \geq 0\right\}.$$

$\boxed{-\dfrac{5\pi}{6}}$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 28 maggio 2001

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo solo il risultato nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata vale -1 punti, ogni risposta mancante vale 0 punti.

Domanda 1 Calcolare l'integrale $\int_D x\,dx\,dy$ dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq -y^2, x \geq -1\}$.

$\boxed{-\frac{4}{5}}$

Domanda 2 Si consideri il problema di Cauchy: $\begin{cases} y' = -3x^3(4-y^2) \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Dire se il punto $x = 0$ è di massimo relativo, minimo relativo oppure di flesso per la soluzione.

$\boxed{\text{Massimo}}$

Domanda 3 Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^{y-x}(x-1) \\ y(1) = 2 - \log 2. \end{cases}$$

$\boxed{y = -\log\left(\frac{x}{e^x} + \frac{2-e}{e^2}\right)}$

Domanda 4 Calcolare il limite puntuale della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n \sin\left(\frac{\log x}{n}\right)}{x}.$$

$\boxed{f(x) = \frac{\log x}{x}}$

Domanda 5 Calcolare una primitiva della forma differenziale

$$\omega = \frac{3x}{\sqrt{1-3x^2-y^2}}\,dx + \left(\frac{y}{\sqrt{1-3x^2-y^2}} + \sin(2y)\right)\,dy.$$

$\boxed{U(x,y) = -\sqrt{1-3x^2-y^2} - \frac{\cos(2y)}{2}}$

Domanda 6 Trovare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = x^2 - y^2 - \log\left|x^2 + y^2 - 2\right|.$$

$\boxed{(0,0), (0,-1), (0,1), \left(\sqrt{3}, 0\right), \left(-\sqrt{3}, 0\right)}$

Domanda 7 Sia $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - y^2$. Si consideri il punto stazionario $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e si dica se è di massimo relativo, minimo relativo oppure di sella.

$\boxed{\text{sella}}$

Domanda 8 Calcolare la lunghezza della curva

$$\begin{cases} x(t) = \sin(3t) \\ y(t) = -\cos(3t) \\ z(t) = 2t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi].$$

$\boxed{\sqrt{13}\pi}$

Domanda 9 L'equazione $x^2 + 2y + e^{x+y^2} - 3 - e^2 = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno del punto $(1,1)$. Calcolare $y'(1)$.

$\boxed{-\frac{2+e^2}{2+2e^2}}$

Domanda 10 Calcolare l'integrale $\int_D \frac{x^2+y^2-9}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$ dove

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ x \leq 0,\ y \leq 0\right\}.$$

$\boxed{-\frac{4\pi}{3}}$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 28 maggio 2001

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Svolgere, giustificando le risposte, uno solo dei due esercizi.

Esercizio 1

Data l'equazione differenziale $y' = \dfrac{5x^4}{y}$

1. dire per quali valori iniziali (x_0, y_0) sono verificate le ipotesi del teorema di Cauchy;
2. determinare l'integrale generale;
3. determinare l'intervallo massimale di esistenza per le soluzioni in funzione del dato iniziale (x_0, y_0);
4. disegnare un grafico approssimativo della soluzione del problema di Cauchy nei casi $x_0 = 1,\ y_0 = 2$ e $x_0 = 1,\ y_0 = -2$.

Esercizio 2

Data la funzione $f(x, y) = x^3 - x - 2xy^4 + y^8$

1. determinarne il massimo e il minimo assoluti oppure l'estremo superiore e l'estremo inferiore;
2. trovare gli eventuali punti di massimo o di minimo relativi;
3. trovare gli eventuali punti di sella (intesi come punti dove esistono una direzione rispetto alla quale il punto è di massimo e un'altra direzione rispetto alla quale il punto è di minimo relativo);
4. si consideri l'insieme $M = \{(x, y) : f(x, y) = -1\}$. Dire in quali dei suoi punti l'insieme M è localmente grafico di una funzione di una variabile.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 28 maggio 2001

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Svolgere, giustificando le risposte, uno solo dei due esercizi.

Esercizio 1

Data l'equazione differenziale $y' = \dfrac{3x^2}{y}$

1. dire per quali valori iniziali (x_0, y_0) sono verificate le ipotesi del teorema di Cauchy;
2. determinare l'integrale generale;
3. determinare l'intervallo massimale di esistenza per le soluzioni in funzione del dato iniziale (x_0, y_0);
4. disegnare un grafico approssimativo della soluzione del problema di Cauchy nei casi $x_0 = 1,\ y_0 = 3$ e $x_0 = 1,\ y_0 = -3$.

Esercizio 2

Data la funzione $f(x, y) = x^8 + 2x^4y + y - y^3$

1. determinarne il massimo e il minimo assoluti oppure l'estremo superiore e l'estremo inferiore;
2. trovare gli eventuali punti di massimo o di minimo relativi;
3. trovare gli eventuali punti di sella (intesi come punti dove esistono una direzione rispetto alla quale il punto è di massimo e un'altra direzione rispetto alla quale il punto è di minimo relativo);
4. si consideri l'insieme $M = \{(x, y) : f(x, y) = 1\}$. Dire in quali dei suoi punti l'insieme M è localmente grafico di una funzione di una variabile.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 28 maggio 2001

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Svolgere, giustificando le risposte, uno solo dei due esercizi.

Esercizio 1

Data l'equazione differenziale $y' = -\dfrac{x^4}{2y}$

1. dire per quali valori iniziali (x_0, y_0) sono verificate le ipotesi del teorema di Cauchy;
2. determinare l'integrale generale;
3. determinare l'intervallo massimale di esistenza per le soluzioni in funzione del dato iniziale (x_0, y_0);
4. disegnare un grafico approssimativo della soluzione del problema di Cauchy nei casi $x_0 = 2,\ y_0 = 1$ e $x_0 = 2,\ y_0 = -1$.

Esercizio 2

Data la funzione $f(x, y) = -x^3 + x + 2xy^4 + y^8$

1. determinarne il massimo e il minimo assoluti oppure l'estremo superiore e l'estremo inferiore;
2. trovare gli eventuali punti di massimo o di minimo relativi;
3. trovare gli eventuali punti di sella (intesi come punti dove esistono una direzione rispetto alla quale il punto è di massimo e un'altra direzione rispetto alla quale il punto è di minimo relativo);
4. si consideri l'insieme $M = \{(x, y) : f(x, y) = -2\}$. Dire in quali dei suoi punti l'insieme M è localmente grafico di una funzione di una variabile.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 28 maggio 2001

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Svolgere, giustificando le risposte, uno solo dei due esercizi.

Esercizio 1

Data l'equazione differenziale $y' = \dfrac{-2x^2}{y}$

1. dire per quali valori iniziali (x_0, y_0) sono verificate le ipotesi del teorema di Cauchy;
2. determinare l'integrale generale;
3. determinare l'intervallo massimale di esistenza per le soluzioni in funzione del dato iniziale (x_0, y_0);
4. disegnare un grafico approssimativo della soluzione del problema di Cauchy nei casi $x_0 = 3,\ y_0 = 2$ e $x_0 = 3,\ y_0 = -2$.

Esercizio 2

Data la funzione $f(x, y) = x^8 - 2yx^4 - y + y^3$

1. determinarne il massimo e il minimo assoluti oppure l'estremo superiore e l'estremo inferiore;
2. trovare gli eventuali punti di massimo o di minimo relativi;
3. trovare gli eventuali punti di sella (intesi come punti dove esistono una direzione rispetto alla quale il punto è di massimo e un'altra direzione rispetto alla quale il punto è di minimo relativo);
4. si consideri l'insieme $M = \{(x, y) : f(x, y) = 2\}$. Dire in quali dei suoi punti l'insieme M è localmente grafico di una funzione di una variabile.

Soluzioni del compito del 28 maggio 2001

Esercizio 1

L'equazione è definita per $y \neq 0$. Ponendo $f(x,y) = \dfrac{5x^4}{y}$ si ottiene che $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ è continua nei punti dove $y \neq 0$ quindi la f è localmente lipschitziana in y e vale in teorema di esistenza e unicità in forma locale per ogni dato iniziale (x_0, y_0) con $y_0 \neq 0$.
L'equazione è a variabili separabili. Integrandola si ottiene:

$$\int y\,dy = \int 5x^4\,dx + c$$

che ha come soluzione $y = \pm\sqrt{2x^5 + 2c}$.
La condizione $2x^5 + 2c > 0$ determina l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.
In termini di dati iniziali si ottiene $c = \dfrac{y_0^2 - 2x_0^5}{2}$, quindi $2x^5 + y_0^2 - 2x_0^5 > 0$ e di conseguenza $x > \sqrt[5]{x_0^5 - \dfrac{y_0^2}{2}}$.
Con la condizione iniziale $x_0 = 1,\ y_0 = 2$ si ottiene $c = 1$ e la soluzione è $y = \sqrt{2x^5 + 2}$ definita per $x > -1$.
Analogamente nel caso $x_0 = 1,\ y_0 = -2$ si ottiene $y = -\sqrt{2x^5 + 2}$.

Esercizio 2

Osserviamo che $f(x,-y) = f(x,y)$ quindi la funzione è simmetrica rispetto all'asse x.
Considerando la restrizione di f alla retta $y = 0$ si ottiene

$$\lim_{x\to\infty} f(x,0) = \lim_{x\to\infty} x^3 - x = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = \lim_{x\to-\infty} x^3 - x = -\infty$$

quindi l'estremo superiore per f è ∞ mentre l'estremo inferiore è $-\infty$ e non esitono massimo e minimo assoluti.
Le derivate parziali di f sono: $f_x = 3x^2 - 1 - 2y^4,\ f_y = -8xy^3 + 8y^7$. Risolvendo il sistema di equazioni $\nabla f = 0$ si ottengono i punti stazionari $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right),\ \left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right),\ (1,1),\ (1,-1)$.
Le derivate seconde sono: $f_{xx} = 6x,\ f_{xy} = -8y^3,\ f_{yy} = -24xy^2 + 56y^6$. La matrice hessiana nel punto $(1,1)$ è $\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -8 & 32 \end{pmatrix}$ che ha determinante positivo. Essendo $f_{xx}(1,1) > 0$ la matrice è definita positiva e il punto è di minimo locale. Lo stesso vale per il punto $(1,-1)$ (per simmetria).
Nel punto $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ risulta invece

$$\begin{pmatrix} \dfrac{6}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che è semidefinita positiva. È necessaria un'analisi locale della funzione.
Consideriamo la restrizione $h(x) = f(x,0) = x^3 - x$. Risulta $h'(x) = 3x^2 - 1$ che è positiva per $|x| > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Quindi il punto $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ è di minimo relativo per questa restrizione.

Consideriamo ora la restrizione $g(y) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, y\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}y^4 + y^8$. Risulta $g'(y) = \frac{-8}{\sqrt{3}}y^3 + 8y^7$ che è positiva in un intorno sinistro di $y = 0$ e negativa in un intorno destro. Quindi il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ è di massimo relativo per questa restrizione. Ne segue che il punto è di sella per la funzione.
Risultato analogo per il punto $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right)$.
Osserviamo ora che nei punti dove si annulla il gradiente di f risulta $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \frac{-2}{3\sqrt{3}}$, $f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, $f(1,1) = f(1,-1) = -1$ quindi di questi punti solo $(1,1)$ e $(1,-1)$ appartengono all'insieme M.
Ne segue che, per il teorema del Dini, ogni punto di M, tranne $(1,1)$ e $(1,-1)$ è localmente grafico di una funzione di una variabile. I punti $(1,1)$ e $(1,-1)$ sono di minimo relativo per la f e sono minimi isolati, quindi esiste un intorno dei punti dove $f \neq -1$. Ne segue che M non è localmente grafico in questi due punti.