Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 12 Febbraio 2001

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.A

1. Dare la definizione di convergenza puntuale e uniforme per una serie di funzioni.
2. Enunciare il teorema di derivazione per serie di funzioni.

Esercizio 2.A Enunciare il teorema di esistenza e unicità di Cauchy.

Esercizio 3.A Sia $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

1. Dire se f è continua nel punto $(0,0)$.
2. Dire se esistono ed eventualmente calcolare, le derivate parziali di f in $(0,0)$.
3. Dire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Soluzione

1.
$$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{2t^2} = 0$$
quindi il limite non esiste e di conseguenza f non è continua in $(0,0)$.

2.
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$$

3. f non è continua in $(0,0)$ quindi non è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 4.A Calcolare l'integrale: $\displaystyle\int_D x^2 y\, dx\, dy$ dove D è il seguente insieme:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}.$$

Soluzione

In coordinate polari l'insieme D si trasforma nell'insieme

$$T = \left\{(\rho,\vartheta) : 0 \le \rho \le 2,\ 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Il determinante jacobiano della trasformazione è ρ quindi:

$$\int_D x^2 y\, dx\, dy = \int_T \rho^4 \cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\rho\, d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^2 \rho^4\, d\rho = \left[-\frac{\cos^3\vartheta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^2 = \frac{32}{15}.$$

Esercizio 5.A Si trovi l'insieme di definizione e si scriva la matrice jacobiana della seguente applicazione:

$$\begin{cases} x = ue^v \\ y = \log u + \log v. \end{cases}$$

Soluzione

La funzione è definita sull'insieme $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0,\ v > 0\}$.

$$J = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^v & ue^v \\ \frac{1}{u} & \frac{1}{v} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6.A Si consideri la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{7nx}$.

1. Trovare l'insieme di convergenza puntuale.
2. Trovare l'insieme di convergenza uniforme.

Soluzione

1.
$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{7nx} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{7x}\right)^n$$
che converge puntualmente se e solo se $\left|e^{7x}\right| < 1$ quindi $0 < e^{7x} < 1$ cioè se e solo se $x < 0$.

2. La serie converge totalmente, quindi uniformemente, su ogni intervallo della forma $(-\infty, a]$ con $a < 0$, infatti
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \le a} e^{7nx} \le \sum_{n=0}^{\infty} e^{7na} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{7a}\right)^n < +\infty$$
poiché $0 < e^{7a} < 1$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 12 Febbraio 2001

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.B Sia $f(x,y) = \sqrt[4]{|xy|}$.

1. Trovare l'insieme dove esistono le derivate parziali di f.
2. Trovare l'insieme dove f è differenziabile.
3. Trovare i punti di massimo e minimo locali e assoluti di f.
4. Trovare estremo superiore e inferiore di f.

Soluzione

1. Nei punti dove $xy \neq 0$ la f è differenziabile perché è composizione di funzioni differenziabili, quindi esistono entrambe le derivate parziali.
   Se invece $x = 0$ e $y \neq 0$ allora:
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h \to 0^{\pm}} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[4]{|hy|} - 0}{h} = \pm\infty$$
   $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,y+h) - f(0,y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$
   quindi non esiste $\frac{\partial f}{\partial x}$.
   Analogamente, se $y = 0$ e $x \neq 0$ non esiste $\frac{\partial f}{\partial y}$.
   Resta solo il caso $(x,y) = (0,0)$:
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$
   $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$
   quindi esistono entrambe le derivate parziali.

2. f è differenziabile in tutti i punti dove $xy \neq 0$. Se $x = 0$ e $y \neq 0$ o viceversa f non è differenziabile perché non esiste una derivata parziale. Se $(x,y) = (0,0)$ consideriamo il resto di Taylor al primo ordine:
   $$\omega(x,y) = f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y = \sqrt[4]{|xy|}.$$

Osserviamo che $\frac{\omega(x,y)}{\sqrt{x^2=y^2}}$ non è limitata in un intorno di $(0,0)$, infatti, considerando la restrizione alla retta $x = y$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\omega(t,t)}{\sqrt{2t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[4]{t^2}}{\sqrt{2}|t|} = +\infty;$$

ne segue che f non è differenziabile in $(0,0)$. L'insieme di differenziabilità di f è quindi $\mathbb{R}^2 \setminus (\{x=0\} \cup \{y=0\})$.

3. Se $xy > 0$ risulta $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{4\sqrt[4]{(xy)^3}}$ che non si annulla mai essendo $xy > 0$.
   Analogo risultato se $xy < 0$.
   Nei punti dove $xy = 0$ risulta $f(x,y) = 0$. Basta osservare che $f(x,y) \geq 0$ per ongi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ per concludere che i punti degli assi cartesiani sono di minimo assoluto per f. Non ci sono altri punti di massimo o minimo locale o assoluto.

4. Considerando la restrizione alla retta $y = x$ si ottiene

$$\lim_{t\to\infty} f(t,t) = \lim_{t\to\infty} \sqrt{|t|} = +\infty$$

quindi $\sup\limits_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$ mentre, dal punto precedente si ottiene che $\inf\limits_{\mathbb{R}^2} f = \min\limits_{\mathbb{R}^2} f = 0$.

Esercizio 2.B Sia $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ -x \leq \sqrt{3}y \leq 0\right\}$. Calcolare

$$\int_D \frac{2y}{x}\, dx\, dy.$$

Soluzione Il dominio D è un settore di corona circolare. Trasformiamolo in coordinate polari. Osserviamo che $\tan -\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ quindi il dominio D viene trasformato nel dominio

$$T = \left\{(\rho,\vartheta) : 2 \leq \rho \leq 3,\ -\frac{\pi}{6} \leq \vartheta \leq 0\right\}.$$

Osserviamo che la funzione integranda è continua su D essendo $x \neq 0$ in ogni punto di D. Allora

$$\int_D \frac{2y}{x}\, dx\, dy = \int_T \frac{2\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\rho, d\rho\, d\vartheta = 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\, d\vartheta \int_2^3 \rho\, d\rho =$$

$$= 2\left[-\log\cos\vartheta\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_2^3 = 5\left(\frac{\log 3}{2} - \log 2\right).$$

Esercizio 3.B Si consideri l'equazione differenziale $y' = \dfrac{e^y}{1-x^2}$.

1. Trovare l'integrale generale dell'equazione.
2. Risolvere l'equazione con la condizione iniziale $y(-2) = \log 2 - \log\log 3$.
3. Trovare l'intervallo massimale di definizione della soluzione al punto precedente.

Soluzione

1. Osserviamo che deve essere $x \neq \pm 1$. L'equazione è a variabili separabili, ed essendo $e^y \neq 0$ non ci sono soluzioni costanti. Integriamo l'equazione:

$$\int e^{-y}\,dy = \int \frac{dx}{1-x^2} + c$$

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}\int 11 + x + \frac{1}{1-x}\,dx + c$$

$$-e^{-y} = \log\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|} + c$$

$$y = -\log\left(\log\sqrt{\left|\frac{1-x}{1+x}\right|} - c\right).$$

2. Sostituendo la condizione iniziale nell'integrale generale dell'equazione si ottiene:

$$\log 2 - \log\log 3 = \log(\log\sqrt{3} - c)$$

che ha come unica soluzione $c - 0$. Quindi

$$y = -\log\log\sqrt{\left|\frac{1-x}{1+x}\right|}.$$

3. Il punto iniziale è $x_0 = -2$ e la soluzione è definita per $x \neq \pm 1$, quindi dovrà essere $x < -1$. Osserviamo anche che se $x < -1$ allora $\frac{1-x}{1+x} < -1$ quindi $\log\sqrt{\left|\frac{1-x}{1+x}\right|} > 0$. Ne segue che la soluzione è definita su tutta la semiretta $(-\infty, -1)$.