Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 11 febbraio 2001

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo solo il risultato nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata vale -1 punti, ogni risposta mancante vale 0 punti.

Domanda 1 Dire se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nx^4 + \sin^2 x)^{-n}$$

converge uniformemente sulla semiretta $[1, \infty)$.

$\boxed{\text{SI}}$

Domanda 2 Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tale che $f(x,y) = 0$ se $x^2 + y^2 > 1$. Calcolare $\int_D \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy$ dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$.

$\boxed{0}$

Domanda 3 Calcolare la lunghezza della curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{2}{3}t\sqrt{t} \end{pmatrix}$, $t \in [0,3]$.

$\boxed{\frac{14}{3}}$

Domanda 4 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{3 + y^3}{y^2(x+4)}.$$

$\boxed{y = \sqrt[3]{c|x+4|^3 - 3}, \quad c > 0}$

Domanda 5 Calcolare la funzione limite della successione di funzioni:

$$f_n(x) = \left(\frac{1 - x^2}{n^2}\right)^n.$$

$\boxed{f(x) = 0}$

Domanda 6 Risolvere l'equazione differenziale

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0.$$

$$\boxed{y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-x} + c_4 e^{x}}$$

Domanda 7 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_D \frac{y}{x}\,dx\,dy$ dove

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 9, 0 \le y \le x\right\}.$$

$$\boxed{2\log 2}$$

Domanda 8 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_D \frac{e^{2\,(x^2+y^2)^{1/2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$ dove

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}.$$

$$\boxed{\pi(e^4 - e^2)}$$

Domanda 9 Dire se la funzione $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - \log(2x^2 + y^2 - 3)$ ammette massimo assoluto.

$$\boxed{\text{NO}}$$

Domanda 10 Dire se la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{y-2} & \text{se } y \neq 3 \\ 0 & \text{se } y = 3 \end{cases}$ è continua nel punto $(1,3)$.

$$\boxed{\text{SI}}$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 11 febbraio 2001

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| |_|_|_|_|_|_|

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Svolgere, giustificando le risposte, uno solo dei due esercizi.

Esercizio 1

Sia $f(x,y) = xy^2 - yx^2$.

1. Trovare i punti di massimo e di minimo locali per f in $\mathbb{R}^2$.
2. Trovare gli estremi superiore e inferiore di f in $\mathbb{R}^2$.
3. Trovare il massimo e il minimo assoluti di f in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$.

Soluzione

1. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è differenziabile, quindi nei punti di massimo e di minimo relativo si deve annullare il gradiente.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - 2xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - x^2.$$

L'unico punto dove $\nabla f = 0$ è $(0,0)$. Valutiamo le derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y - 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x.$$

Quindi la matrice Hessiana nell'origine risulta:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'analisi delle derivate seconde non ci fornisce quindi nessuna informazione. Osserviamo che $f(0,0) = 0$ e che $f(x,y) \leq 0$ se $0 \leq y \leq x$, mentre $f(x,y) \geq 0$ se $0 \leq x \leq y$. Ne segue che $(0,0)$ non è né punto di massimo né punto di minimo locale per f. La f non ha quindi massimi o minimi locali.

2. Calcoliamo la restrizione di f alla retta $y = 1$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x,1) = \lim_{x\to\infty} x - x^2 = -\infty.$$

Considerando poi la restrizione di f alla retta $y = -1$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x,-1) = \lim_{x\to\infty} x + x^2 = \infty.$$

Ne segue che $\inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty$, $\sup_{\mathbb{R}^2} f = \infty$.

3. L'insieme D è compatto e f è continua, quindi ammette massimo e minimo assoluti su tale insieme. Nei punti interni a D non ci possono essere massimi o minimi, visto che il gradiente non si annulla mai in tali punti. I punti di massimo e di minimo si trovano quindi sulla frontiera di D. Consideriamo le restrizioni della f alla frontiera. L'insieme D è un triangolo con due lati sugli assi cartesiani e come terzo lato la retta $y = 1-x$. Sugli assi cartesiani abbiamo $f(x,0) = = f(0,y) = 0$. Sul terzo lato definiamo $\phi(x) = f(x, 1-x) = x(1-x)^2 - (1-x)x^2 = 2x^3 - 3x^2$. Risulta $\phi'(x) = 6x^2 - 6x + 1$ che si annulla per $x = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ e per $x = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$. Osserviamo che i punti corrispondenti sono $P = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$ e $Q = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$. Valutando la f in tali punti si osserva che $f(P) = \frac{\sqrt{3}}{18}$ e $f(Q) = -\frac{\sqrt{3}}{18}$. Quindi il massimo assoluto di f su D è $\frac{\sqrt{3}}{18}$ mentre il minimo assoluto è $-\frac{\sqrt{3}}{18}$.

Esercizio 2

1. Trovare una funzione $f(y)$ di classe $C^1(\mathbb{R})$ tale che la forma differenziale
$$\omega(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2-1} + f(y)\right) dx + \left(\frac{2y}{x^2+y^2-1} + 2xy\right) dy$$
sia chiusa.

2. Determinare un aperto connesso Ω di $\mathbb{R}^2$ dove ω è esatta.

3. Trovare una primitiva di ω in Ω.

Soluzione

1. Siano $X(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2-1} + f(y)\right)$ e $Y(x,y) = \left(\frac{2y}{x^2+y^2-1} + 2xy\right)$. Condizione sufficiente perché ω sia chiusa è che $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$. Quindi dovremo risolvere l'equazione:
$$\frac{-4xy}{(x^2+y^2-1)^2} + f'(y) = \frac{-4xy}{(x^2+y^2-1)^2} + 2y.$$
Dovrà quindi essere $f'(y) = 2y$ e, di conseguenza $f(y) = y^2 + c$, dove c è una costante arbitraria che per comodità scegliamo uguale a 0.

2. La ω è definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ che è un insieme formato da due componenti connesse. Scegliendo $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$ otteniamo un insieme semplicemente connesso, quindi la forma ω, che è chiusa, risulta anche esatta.

3. Cerchiamo una funzione $U(x,y)$ di classe C^1 in Ω tale che $dU = \omega$. Quindi, dovrà essere, per ogni (x,y) in Ω:
$$U(x,y) = \int X(x,y)\,dx + \phi(y) = \log|x^2+y^2-1| + xy^2 + \phi(y) = \log(1-x^2-y^2) + xy^2 + \phi(y)$$
con ϕ funzione arbitraria della variabile y da ricavare dall'equazione $\frac{\partial U}{\partial y} = Y$. Quindi deve essere
$$\frac{2y}{x^2+y^2-1} + 2xy + \phi'(y) = \frac{2y}{x^2+y^2-1} + 2xy$$
cioè $\phi'(y) = 0$ e di conseguenza $\phi(y) = c$ con c costante arbitraria. Ne segue che una primitiva di ω in Ω è, ad esempio, la funzione $U(x,y) = \log(1-x^2-y^2) + xy^2$.