Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 29 Gennaio 2001

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.A Dare la definizione di differenziale e di gradiente per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Esercizio 2.A Enunciare il teorema del Dini sulle funzioni implicite.

Esercizio 3.A Sia $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$.

1. Dire se f è continua nel punto $(0,0)$.
2. Dire se esistono ed eventualmente calcolare, le derivate parziali di f in $(0,0)$.
3. Dire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Soluzione

1.
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{|xy|} = 0 = f(0,0)$$
quindi f è continua in $(0,0)$.

2.
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$$

3. Poniamo
$$\omega(x,y) = f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) = \sqrt{|xy|}.$$
Risulta
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\sqrt{|\rho^2\cos\theta\sin\theta|}}{\rho} = \lim_{\rho\to 0^+} \sqrt{|\cos\theta\sin\theta|}$$
e il limite non esiste perchè dipende da θ. Quindi f non è differenziabile nell'origine.

Esercizio 4.A Calcolare l'integrale: $\int_D x - y^2\, dx\, dy$ doce D è il seguente insieme:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \sin x\right\}.$$

Soluzione

$$\int_D x - y^2\, dx\, dy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} x - y^2\, dy = \int_0^{\pi} \left[xy - \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=\sin x} dx =$$

$$= [-x\cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x\, dx - \frac{1}{3}\int \sin x(1 - \cos^2 x)\, dx == -\pi\cos\pi + \frac{1}{3}\int_1^{-1} 1 - t^2\, dt = \pi - \frac{4}{9}.$$

Esercizio 5.A Si trovi l'insieme di definizione e si scriva la matrice jacobiana della seguente applicazione:

$$\begin{cases} x = u\sin v \\ y = \log u + e^v. \end{cases}$$

Soluzione
La funzione è definita per $u > 0$.

$$J = \begin{pmatrix} \sin v & u\cos v \\ \frac{1}{u} & e^v \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6.A Si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty}(1 + x)^{-n}$.

1. Trovare l'insieme di convergenza puntuale.
2. Trovare l'insieme di convergenza uniforme.

Soluzione

1. La serie converge se e solo se $\left|\frac{1}{1+x}\right| < 1$ quindi $1 < |1 + x|$ cioè se e solo se $x > 0$ oppure $x < -2$.
2. La serie converge totalmente, quindi uniformemente, su ogni intervallo del tipo $x \ge a > 0$ oppure $x \le b < -2$, infatti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \ge a} \frac{1}{(1 + x)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + a)^n} < +\infty.$$

Analogo risultato per $x \in (-\infty, b]$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 29 Gennaio 2001

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.B Si consideri la funzione $f(x,y) = x^3 + 3x^2 + 2x - 2xy^2 - 2y^2 + y^4$.

1. Trovare i punti di massimo e di minimo locale per f.
2. Trovare estremo superiore e inferiore per f.

Soluzione

1.
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6x + 2 - 2y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -4xy - 4y + 4y^3.$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \\ 3x^2 + 6x + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y^2 - x - 1 = 0 \\ 3x^2 + 4x = 0 \end{cases}$$

quindi il gradiente si annulla nei seguenti punti:

$$A = \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right), \; B = \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right), \; C = (0,1), \; D = (0,-1).$$

Calcoliamo le derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4x - 4 + 12y^2.$$

Valutiamo la matrice Hessiana nei quattro punti stazionari:

$$Hf(A) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -4\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \qquad \det\left(Hf(A)\right) < 0$$

quindi A è un punto di sella.

$$Hf(B) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 4\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \qquad \det\left(Hf(B)\right) < 0$$

quindi B è un punto di sella.

$$Hf(C) = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \det\left(Hf(C)\right) > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C) > 0$$

quindi la forma quadratica Hessiana in C è definita positiva e C è un punto di minimo locale.

$$Hf(D) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \det\left(Hf(D)\right) > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(D) > 0$$

quindi la forma quadratica Hessiana in D è definita positiva e D è un punto di minimo locale.

2.
$$\lim_{x\to\infty} f(x,0) = \lim_{x\to\infty} x^3 + 3x^2 - 2x = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = \lim_{x\to-\infty} x^3 + 3x^2 - 2x = -\infty$$

quindi
$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = +\infty, \qquad \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = -\infty.$$

Esercizio 2.B Sia $\omega(x,y) = \left(-\frac{2}{x^3} - \frac{4}{y}\right) dx + \frac{4x}{y^2} dy$.

1. Trovare l'insieme di definizione di ω.
2. Dire in quale insieme ω è esatta.
3. Trovare un potenziale per ω.

Soluzione

1. L'insieme di definizione di ω è $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0,\ y \neq 0\}$
2. $$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{4}{y^2} \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{4}{y^2}$$
   quindi ω è chiusa. L'insieme di definizione è formato da quattro componenti connesse (i quattro quadranti); all'interno di ciascuna di esse (che sono anche semplicemente connesse) ω è esatta.
3. $$U(x,y) = \int X(x,y), dx + \phi(y) = \int -\frac{2}{x^3} - \frac{4}{y}\, dx + \phi(y) = -\frac{1}{x^2} - \frac{4x}{y} + \phi(y)$$
   quindi
   $$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{4}{y^2} + \phi'(y)$$
   ma $\frac{\partial U}{\partial y} = Y$ quindi $\phi'(y) = 0$ e di conseguenza
   $$U(x,y) = -\frac{1}{x^2} - \frac{4x}{y} + c.$$

Esercizio 3.B Si consideri l'equazione differenziale $y' = (y+3)(3-4x)$.

1. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione.
2. Calcolare $\lim_{x\to\infty} y(x)$ dove y è una qualsiasi soluzione.
3. Trovare la soluzione con la condizione iniziale $y(1) = -3$.
4. Dimostrare che se $y(1) > -3$ allora la soluzione ha un punto di massimo locale per $x = \frac{3}{4}$.

Soluzione

1. $y(x) = -3\ \forall x \in \mathbb{R}$ è soluzione. Osserviamo che vale il teorema di esistenza e unicità (in forma globale) per ogni dato iniziale in $\mathbb{R}^2$, quindi la soluzione costante $y = -3$ non interseca le altre soluzioni. Pertanto possiamo supporre $y \neq -3$. Avremo allora l'equazione a variabili separabili:
$$\frac{y'}{y+3} = 3 - 4x$$
che integrata risulta:
$$|y+3| = e^{-2x^2+3x+c}.$$
Sempre a causa del teorema di esistenza e unicità, se $y(x_0) > -3$ in un punto qualsiasi x_0, allora $y(x) > -3\ \forall x \in \mathbb{R}$. Analogo risultato se $y(x_0) < -3$. Nel primo caso avremo allora
$$y(x) = -3 + e^{-2x^2+3x+c}$$
mentre nel secondo:
$$y(x) = -3 - e^{-2x^2+3x+c}.$$

2. $$\lim_{x\to\infty} -3 + e^{-2x^2+3x+c} = \lim_{x\to\infty} -3 - e^{-2x^2+3x+c} = -3.$$

3. L'unica soluzione che può assumere il valore -3 è la soluzione costante $y(x) = -3\ \forall x \in \mathbb{R}$.

4. Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene:
$$y'\left(\frac{3}{4}\right) = 0.$$
Derivando direttamente l'equazione differenziale si ottiene:
$$y'' = y'(3-4x) - 4(y+3) = (y+3)\left((3-4x)^2 - 4\right)$$
quindi $y''\left(\frac{3}{4}\right) = -4\left(y\left(\frac{3}{4}\right) + 3\right) < 0$ dato che $y(x) > -3\ \forall x \in \mathbb{R}$. Ne segue che $x = \dfrac{3}{4}$ è un punto di minimo locale.