Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 9 Gennaio 2001

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.A Scrivere l'enunciato del teorema di cambiamento di variabili per gli integrali doppi.

Esercizio 2.A

1. Dare una condizione necessaria per l'esattezza di una forma differenziale lineare.
2. Dare una condizione sufficiente per l'esattezza di una forma differenziale lineare.

Esercizio 3.A Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 10x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 10 - 10x^2 & \text{se } \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. trovare il limite puntuale su $[0,1]$ della successione f_n;
2. studiare la convergenza uniforme di f_n.

Esercizio 4.A Scrivere la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'''(x) - y''(x) + y'(x) - y(x) = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -1. \end{cases}$$

Esercizio 5.A Sia $f(x,y) = y^5 - x^5 + \log(x + 4y)$. Dire se sono verificate le ipotesi del teorema del Dini nel punto $P = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

Esercizio 6.A Data la forma differenziale $\omega = kx^5y^5\,dx + 5x^6y^4\,dy$, determinare k in modo che ω sia esatta in $\mathbb{R}^2$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 9 Gennaio 2001

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.B Si consideri la funzione $f(x,y) = e^{-x}(y^3 - 2xy)$.

1. Trovare i punti di massimo e di minimo locale di f in $\mathbb{R}^2$.
2. Trovare estremo superiore e inferiore di f.

Soluzione

1. f è una funzione di classe C^∞ definita su un insieme aperto, quindi i punti di massimo o minimo locale vanno cercati dove il gradiente si annulla.

$$f_x = e^{-x}y(-y^2 + 2x - 2), \qquad f_y = e^{-x}(3y^2 - 2x)$$

$\nabla f = 0$ nei punti $P = (0,0)$, $Q = \left(\frac{3}{2}, -1\right)$, $R = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$.
Calcoliamo ora le derivate seconde:

$$f_{xx} = ye^{-x}(y^2 - 2x + 4),\ f_{yx} = e^{-x}(y^2 + 2x - 2),\ f_{yy} = 6ye^{-x}.$$

La matrice Hessiana nel punto P risulta:

$$Hf(P) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

che rappresenta una forma quadratica indefinita, essendo det $(Hf(P)) < 0$, quindi P è un punto di sella.

$$Hf(Q) = \begin{pmatrix} -2e^{-\frac{3}{2}} & 2e^{-\frac{3}{2}} \\ 2e^{-\frac{3}{2}} & -6e^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

che rappresenta una forma quadratica definita negativa, essendo det $Hf(Q) > 0$ e $f_{xx}(Q) < 0$, quindi il punto Q è di massimo relativo. Osserviamo ora che $f(x,-y) = -f(x,y)$, quindi il punto R è di minimo relativo.

2. Osserviamo che

$$\lim_{y\to\infty} f(0,y) = \lim_{y\to\infty} y^3 = \infty$$

$$\lim_{y\to-\infty} f(0,y) = \lim_{y\to-\infty} y^3 = -\infty$$

quindi

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f = \infty, \inf_{\mathbb{R}^2} f = \infty.$$

Esercizio 2.B Calcolare l'integrale

$$\int_D xy\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq y,\ x \leq y\}$.

Soluzione

Passando a coordinate polari, il dominio D si trasforma nel dominio

$$T = \left\{(\rho,\theta) : 0 \leq \rho \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq \pi\right\}.$$

Essendo il determinante Jacobiano della trasformazione uguale a ρ l'integrale diventa:

$$\int_D xy\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_T \rho^4 \cos\theta \sin\theta\,d\rho\,d\theta = \int_0^1 \rho^4\,d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos\theta\sin\theta\,d\theta =$$

$$= \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 \left[\frac{-\cos(2\theta)}{4}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = -\frac{1}{20}.$$

Esercizio 3.B Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt[4]{y} \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

1. Dire per quali valori iniziali (x_0, y_0) è applicabile il teorema di esistenza e unicità di Cauchy.
2. Trovare la soluzione nel caso $x_0 = 1,\ y_0 = 1$
3. Trovare l'intervallo massimale di esistenza per la soluzione del punto precedente.

Soluzione

1. Sia $f(x,y) = \sqrt[4]{y}$ definita per $y \geq 0$. Pociché $f \in C^1(\{y > 0\})$ in particolare f è localmente lipschitziana sullo stesso insieme, quindi il teorema di esistenza e unicità si applica per ogni dato inziale (x_0, y_0) con $y_0 > 0$.

2\. 3. L'equazione è a variabili separabili. Se $y_0 = 0$ esiste la soluzione costante $y(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ anche se non è garantita l'unicità. Se $y_0 \neq 0$ la soluzione si ottiene dall'integrazione:

$$\int y^{-\frac{1}{4}}\,dy = \int dx + c$$

quindi $y = \left(\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}c\right)^{\frac{4}{3}}$. Considerando la condizione iniziale $y(1) = 1$ si ottiene $c = \frac{1}{3}$ e $y = \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$. Tale funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Osserviamo tuttavia che, per $x < -\frac{1}{3}$ la soluzione può anche essere definita identicamente nulla, ottenendo un raccordo di classe C^1 nel punto $x = -\frac{1}{3}$. Infatti ponendo

$$\overline{y}(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{4}\right)^{\frac{4}{3}} & \text{se } x \geq -\dfrac{1}{3} \\ 0 & \text{se } x \leq -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

otteniamo che $\overline{y}(x)$ è continua in $x = -\frac{1}{3}$ e che

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}^-} \overline{y}'(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{3}^+} \overline{y}'(x) = 0$$

quindi $\overline{y}(x)$ è di classe C^1 in tutto $\mathbb{R}$. Concludendo esistono due distinte funzioni di classe $C^1(\mathbb{R})$ che risolvono il problema di Cauchy. I due grafici si intersecano nel punto $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ dove non vale il teorema di esistenza e unicità.