Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 6 Dicembre 2000

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo solo il risultato nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3 punti, ogni risposta sbagliata vale -2 punti, ogni risposta mancante vale 0 punti.

Domanda 1 Calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^4 \left(\log(x^2+3y^2)-4\right)$.

Sia $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{2x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Domanda 2 Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Domanda 3 Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Domanda 4 Dire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Sia $f(x,y) = x^2y + e^{x^2+y}$ e sia $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$.

Domanda 5 Dire se nel punto $(1,-1)$ è applicabile il teorema del Dini all'insieme Γ.

Domanda 6 Dire qual è il più grande sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ tale che l'insieme Γ è rappresentabile come grafico di una funzione $y = \phi(x)$ definita per ogni x appartenente ad A.

Esercizio 1 Si consideri la funzione $f(x,y) = x^3 + 2xy - 2y^2$.

1. Trovare i punti di massimo e di minimo locale di f in $\mathbb{R}^2$.
2. Trovare massimo e minimo assoluti di f sul dominio

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le y \le 0, x \ge -1\right\}.$$

Soluzione

$$f(x,y) = x^3 + 2xy - 2y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 4y.$$

$\nabla f = 0$ se e solo se $(x,y) = (0,0)$ oppure $(x,y) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4$$

quindi la matrice Hessiana nei due punti stazionari è la seguente:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad Hf\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che $\det(Hf(0,0)) = -4 < 0$ quindi la forma quadratica è indefinita e l'origine è punto di sella per f. Invece $\det\left(Hf(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})\right) = 4 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 < 0$ quindi la forma quadratica è definita negativa e il punto è di massimo relativo. Il dominio D è un triangolo compresa la frontiera,

quindi è limitato e chiuso. La funzione f è continua in D, quindi ammette massimo e minimo su D. Nei punti interni a D il gradiente si annulla nel punto $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$. Parametrizziamo la frontiera di D. Un lato è definito dalla curva $\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in (-1,0)$. La f ristretta al lato è definita da $\psi_1(t) = f(\gamma_1(t)) = t^3$, la cui derivata non si annulla mai sull'intervallo $(-1,0)$.
Un secondo lato è definito dalla curva $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$, $t \in (-1,0)$. La f ristretta al lato è definita da $\psi_2(t) = f(\gamma_2(t)) = -1 - 2t - 2t^2$, la cui derivata $\psi_2'(t) = -2 - 4t$ si annulla per $t = -\frac{1}{2}$. Quindi dovremo considerare il punto $(-1, -\frac{1}{2})$.
L'ultimo lato è definito dalla curva $\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in (-1,0)$. La f ristretta al lato è definita da $\psi_3(t) = f(\gamma_3(t)) = -t^3$, la cui derivata $\psi_2'(t) = 3t^2$ non si annulla mai sull'intervallo $(-1,0)$.
Confrontiamo il valore di f nei punti trovati e nei vertici del triangolo:

$$f(0,0) = 0, \quad f(-1,0) = -1, \quad f(-1,-1) = -1, \quad f\left(-1, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \quad f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{54}.$$

Il minimo assoluto è -1 mentre il massimo assoluto è $\frac{1}{54}$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 6 Dicembre 2000

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo solo il risultato nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3 punti, ogni risposta sbagliata vale -2 punti, ogni risposta mancante vale 0 punti.

Domanda 1 Calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \left(\log(2x^2+y^2)-1\right)$.

Sia $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+5y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Domanda 2 Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Domanda 3 Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Domanda 4 Dire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Sia $f(x,y) = x^4 y + e^{x^2+y}$ e sia $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$.

Domanda 5 Dire se nel punto $(-1,-1)$ è applicabile il teorema del Dini all'insieme Γ.

Domanda 6 Dire qual è il più grande sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ tale che l'insieme Γ è rappresentabile come grafico di una funzione $y = \phi(x)$ definita per ogni x appartenente ad A.

Esercizio 1 Si consideri la funzione $f(x, y) = x^3 + 2xy + 2y^2$.

1. Trovare i punti di massimo e di minimo locale di f in $\mathbb{R}^2$.
2. Trovare massimo e minimo assoluti di f sul dominio

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x + y \leq x \leq 1\right\}.$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 6 Dicembre 2000

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Rispondere alle seguenti domande inserendo solo il risultato nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3 punti, ogni risposta sbagliata vale -2 punti, ogni risposta mancante vale 0 punti.

Domanda 1 Calcolare $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^4 \big(\log(2x^2+3y^2)-2\big)$.

Sia $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+3y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Domanda 2 Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Domanda 3 Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Domanda 4 Dire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Sia $f(x,y) = e^{x^2-y} - x^2 y$ e sia $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$.

Domanda 5 Dire se nel punto $(1,1)$ è applicabile il teorema del Dini all'insieme Γ.

Domanda 6 Dire qual è il più grande sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ tale che l'insieme Γ è rappresentabile come grafico di una funzione $y = \phi(x)$ definita per ogni x appartenente ad A.

Esercizio 1 Si consideri la funzione $f(x, y) = x^3 - 2xy - 2y^2$.

1. Trovare i punti di massimo e di minimo locale di f in $\mathbb{R}^2$.

2. Trovare massimo e minimo assoluti di f sul dominio

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 0, y \geq 0, x \geq -1\right\}.$$