Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 18 Settembre 2000

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.A Scrivere le definizioni di continuità, di derivabilità parziale e di differenziabilità in un punto per una funzione di due variabili.

Esercizio 2.A Scrivere l'enunciato del teorema di Cauchy per un'equazione differenziale del primo ordine.

Esercizio 3.A Calcolare la lunghezza della curva definita dalle equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 2 - \cos t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Esercizio 4.A Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Calcolare, mediante la definizione di derivata parziale, $f'_x(0,0)$ e $f'_y(0,0)$.

b) Dire se f è differenziabile in $(0,0)$, facendo uso della definizione di differenziabilità.

Esercizio 5.A Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y' = 2x + x^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 6.A Dato $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le (x-2)^2 + (y-1)^2 \le 9\}$

a) disegnare D;

b) calcolare $\int_D x^2 + y^2 - 2y - 3\, dx\, dy$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 18 Settembre 2000

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.B Si consideri l'equazione differenziale $xy' = 3\sqrt{xy} + y$ sulla semiretta $x > 0$.

a) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione (si consiglia la sostituzione $u = \sqrt{y}$).

b) Risolvere il problema di Cauchy associato all'equazione con la condizione iniziale $y(e^2) = 4$.

c) Dire per quali dati iniziali è applicabile il teorema di esistenza e unicità.

d) Risolvere il problema di Cauchy associato all'equazione con la condizione iniziale $y(1) = 0$.

Esercizio 2.B Sia ω la seguente forma differenziale:

$$\omega = \left(2 + \frac{y^3}{x^2}\right) dx + \left(y - \frac{3y^2}{x}\right) dy.$$

a) Trovare l'insieme di definizione di ω.

b) Trovare l'insieme di esattezza di ω.

c) Trovare la primitiva di ω che nel punto $(-2, 4)$ vale 5.

Esercizio 3.B Sia $f(x, y) = \dfrac{\log(x^3 - y) - 2}{x^3 - y}$.

a) Trovare i punti stazionari di f.

b) Trovare massimo e minimo assoluti per f sul segmento che unisce i punti $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$ e $(e^2, 0)$.

c) Calcolare $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.