Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 10 Luglio 2000

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.E Sia $f \in C^2(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $P_0 \in \Omega$.

a) Dare la definizione di punto di massimo relativo.

b) Dare una condizione necessaria affinché P_0 sia punto di massimo relativo.

c) Dare una condizione sufficiente affinché P_0 sia punto di massimo relativo.

Esercizio 2.E Dare l'enunciato del teorema di Cauchy per le equazioni del primo ordine in forma locale e globale.

Esercizio 3.E Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + 3y = e^{-x(3+x)} \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

a) Dire per quali valori di (x_0, y_0) sono valide le ipotesi il teorema di esistenza e unicità.

b) Nel caso $x_0 = 0,\ y_0 = 2$, trovare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

c) Calcolare il limite per $x \longrightarrow \infty$ della soluzione considerata al punto b).

Esercizio 4.E Sia $f(x, y) = x^4 + 2e^{(y-1)^2} + 4$.

a) Trovare gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo per f in $\mathbb{R}^2$.

b) Trovare il massimo e il minimo assoluti di f sul dominio

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\right\}.$$

c) Trovare estremo superiore e inferiore di f in $\mathbb{R}^2$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 10 Luglio 2000

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.A Sia $f \in C^2(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $P_0 \in \Omega$.

a) Dare la definizione di punto di massimo relativo.

b) Dare una condizione necessaria affinché P_0 sia punto di massimo relativo.

c) Dare una condizione sufficiente affinché P_0 sia punto di massimo relativo.

Esercizio 2.A Dare l'enunciato del teorema di Cauchy per le equazioni del primo ordine in forma locale e globale.

Esercizio 3.A Data la successione di funzioni:

$$f_n(x) = \begin{cases} 7(x-1)^4 & \text{per } 1 \le x \le 1 + \dfrac{1}{n} \\ 7 - 7(x-1)^4 & \text{per } 1 + \dfrac{1}{n} < x \le 2 \end{cases}$$

a) trovare il limite puntuale di $f_n(x)$ su $[1, 2]$;

b) dire se f_n converge uniformemente su $[1, 2]$.

Esercizio 4.A Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{13y^4}{x-3} & \text{per } x \neq 3 \\ 0 & \text{per } x = 3. \end{cases}$$

a) Calcolare le derivate parziali di f in $(3, 0)$.

b) Dire se f è continua in $(3, 0)$.

Esercizio 5.A Data la funzione $g(x, y) = \frac{5}{x} - y - e^{x+y} - 5$ verificare che l'equazione $g(x, y) = 0$ definisce in un intorno di $x = 1$ una funzione implicita $f(x)$ tale che $f(1) = -1$. Calcolare inoltre la derivata prima di f nel punto $x = 1$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 10 Luglio 2000

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.B Sia ω la seguente forma differenziale:

$$\omega = \frac{dx}{\sqrt{8-(x-y^3)^3}} - \frac{3y^2\,dy}{\sqrt{8-(x-y^3)^3}}.$$

a) Trovare l'insieme di definizione di ω.

b) Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva definita in modo implicito dall'equazione $x^2+y^2+2x+2y+1=0$.

Esercizio 2.B Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + 3y = e^{-x(3+x)} \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

a) Dire per quali valori di (x_0, y_0) sono valide le ipotesi il teorema di esistenza e unicità.

b) Nel caso $x_0 = 0,\ y_0 = 2$, trovare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

c) Calcolare il limite per $x \longrightarrow \infty$ della soluzione considerata al punto b).

Esercizio 3.B Sia $f(x,y) = x^4 + 2e^{(y-1)^2} + 4$.

a) Trovare gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo per f in $\mathbb{R}^2$.

b) Trovare il massimo e il minimo assoluti di f sul dominio

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\right\}.$$

c) Trovare estremo superiore e inferiore di f in $\mathbb{R}^2$.