Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 19 Giugno 2000

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.E Enunciare il teorema di Cauchy per le equazioni differenziali ordinarie.

Esercizio 2.E Elencare e dare la definizione di tutti i tipi di convergenza per le serie di funzioni.

Esercizio 3.E Si consideri l'equazione differenziale $y' = (y+2)(y - xy - 2x)$.

a) Dire per quali dati iniziali sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità.

b) Trovare l'integrale generale dell'equazione (si consiglia la sostituzione $y(x) = \dfrac{1}{u(x)} - 2$).

c) Risolvere l'equazione con la condizione iniziale $y(0) = 2$.

d) Trovare l'intervallo massimale di esistenza per la soluzione del punto c).

Esercizio 4.E Sia $f(x,y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2}$.

a) Trovare gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo per f.

b) Dire se esiste ed eventualmente calcolare il limite $\lim\limits_{|(x,y)|\to\infty} f(x,y)$.

c) Dire se esiste ed eventualmente calcolare il limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

d) Dire se esiste ed eventualmente calcolare il limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 19 Giugno 2000

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.A Enunciare il teorema di Cauchy per le equazioni differenziali ordinarie.

Esercizio 2.A Elencare e dare la definizione di tutti i tipi di convergenza per le serie di funzioni.

Esercizio 3.A Data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{1}{n\sqrt{x}}$ trovarne l'insieme I di convergenza puntuale e dire se la serie converge uniformemente su I.

Esercizio 4.A Sia $f(x,y) = \sqrt{y^2|x|}$. Calcolare le derivate parziali e dire se è differenziabile nel punto $(0,0)$.

Esercizio 5.A Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} y \log |y| & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Verificare che si può applicare il teorema di esistenza e unicità della soluzione per il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 6.A Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2} + \sin x \right) dx + \frac{2y}{x^2+y^2}\, dy.$$

Si calcoli, se esiste, la sua funzione potenziale.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 19 Giugno 2000

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.B Calcolare l'integrale:

$$\int_T \sqrt{4-x^2}\,dx\,dy \qquad \text{dove} \quad T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4y, x \ge 1\right\}.$$

Esercizio 2.B Si consideri l'equazione differenziale $y' = (y+2)(y-xy-2x)$.

a) Dire per quali dati iniziali sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità.

b) Trovare l'integrale generale dell'equazione (si consiglia la sostituzione $y(x) = \dfrac{1}{u(x)} - 2$).

c) Risolvere l'equazione con la condizione iniziale $y(0) = 2$.

d) Trovare l'intervallo massimale di esistenza per la soluzione del punto c).

Esercizio 3.B Sia $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2}$.

a) Trovare gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo per f.

b) Dire se esiste ed eventualmente calcolare il limite $\lim\limits_{|(x,y)|\to\infty} f(x,y)$.

c) Dire se esiste ed eventualmente calcolare il limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

d) Dire se esiste ed eventualmente calcolare il limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$.