Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 29 Maggio 2000

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.E

a) Dare la definizione di differenziale per una funzione di n variabili.

b) Enunciare il teorema del Dini in due variabili.

Esercizio 2.E Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x, y, z) = f_1(x, y, z)\, dx + f_2(x, y, z)\, dy + f_3(x, y, z)\, dz.$$

a) Cosa vuol dire che ω è esatta?

b) Dare una condizione equivalente ell'esattezza di ω.

c) Dare una condizione necessaria per l'esattezza nel caso ω sia di classe C^1.

Esercizio 3.E Si consideri l'equazione differenziale $y' = (y + 5)x$.

a) Dire per quali dati iniziali vale il teorema di esistenza e unicità e specificare l'intervallo di esistenza delle soluzioni.

b) Trovare l'integrale generale dell'equazione.

c) Trovare le zone di crescita o di decrescita delle soluzioni.

Parte facoltativa
Si consideri ora l'equazione differenziale $y' = |(y + 5)x|$.

d) Dire per quali dati iniziali vale il teorema di esistenza e unicità e specificare l'intervallo di esistenza delle soluzioni.

e) Risolvere l'equazione con la condizione iniziale $y(1) = 0$.

Esercizio 4.E Sia $f(x, y) = (x - 5y)\log(x - 5y)$.

a) Trovare l'insieme di definizione di f e i punti stazionari.

b) Dire se sono verificate le ipotesi del teorema del Dini nel punto $(3, -1)$ per la funzione implicita $f(x, y) - 8 \log 8 = 0$.

c) Dire se sono verificate le ipotesi del teorema del Dini sull'insieme di livello

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 8 \log 8\}.$$

Parte facoltativa

d) Trovare massimi e minimi relativi per f.

e) Trovare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f.

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 29 Maggio 2000

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.A

a) Dare la definizione di differenziale per una funzione di n variabili.

b) Enunciare il teorema del Dini in due variabili.

Esercizio 2.A Si consideri la forma differenziale di classe $\omega(x, y, z) = f_1(x, y, z)\, dx + f_2(x, y, z)\, dy + f_3(x, y, z)\, dz$.

a) Cosa vuol dire che ω è esatta?

b) Dare una condizione equivalente ell'esattezza di ω.

c) Dare una condizione necessaria per l'esattezza nel caso ω sia di classe C^1.

Esercizio 3.A Scrivere l'integrale generale della seguente equazione differenziale al variare di $\beta \in \mathbb{R}$:

$$y''(x) + (\beta + 3)y'(x) - \beta y(x) = 0.$$

Esercizio 4.A Data la funzione

$$F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|y|^n x^2}{x^2 + y^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

dove n è un numero intero positivo:

a) calcolare le derivate parziali di f nel punto $(0, 0)$;

b) dire per quali valori di n la funzione f è differenziabile in $(0, 0)$.

Esercizio 5.A Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} e^{7xn}.$$

Esercizio 6.A Verificare se è applicabile il teorema del Dini nel punto $(5, 0)$ per la funzione

$$f(x, y) = (x-5)^3 + y^2 + (x-5)(y+1).$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 29 Maggio 2000

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.B Sia $\omega(x,y) = \dfrac{-2}{(x-y)^2}\,dx + \dfrac{2}{(x-y)^2}\,dy$.

a) Specificare su quale insieme ω è esatta.

b) Trovare la primitiva di ω che nel punto $(4,3)$ vale 5.

Esercizio 2.B Si consideri l'equazione differenziale $y' = (y+5)x$.

a) Dire per quali dati iniziali vale il teorema di esistenza e unicità e specificare l'intervallo di esistenza delle soluzioni.

b) Trovare l'integrale generale dell'equazione.

c) Trovare le zone di crescita o di decrescita delle soluzioni.

Parte facoltativa

Si consideri ora l'equazione differenziale $y' = |(y+5)x|$.

d) Dire per quali dati iniziali vale il teorema di esistenza e unicità e specificare l'intervallo di esistenza delle soluzioni.

e) Risolvere l'equazione con la condizione iniziale $y(1) = 0$.

Esercizio 3.B Sia $f(x,y) = (x-5y)\log(x-5y)$.

a) Trovare l'insieme di definizione di f e i punti stazionari.

b) Dire se sono verificate le ipotesi del teorema del Dini nel punto $(3,-1)$ per la funzione implicita $f(x,y) - 8\log 8 = 0$.

c) Dire se sono verificate le ipotesi del teorema del Dini sull'insieme di livello

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 8\log 8\}.$$

Parte facoltativa

d) Trovare massimi e minimi relativi per f.

e) Trovare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f.