Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Nucleare

Analisi Matematica II

Pisa, 31 Gennaio 2000

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.A Sia $f(x, y, z) = x^3 + z^3 - 3xyz + 5$. Dire per quali valori di (x, y, z) l'equazione $f(x, y, z) = 0$ definisce implicitamente una funzione $z = z(x, y)$ e calcolarne le derivate parziali.

Esercizio 2.A Determinare l'area dell'insieme limitato del piano che ha per frontiera parte delle curve di equazione $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

Esercizio 3.A Considerare la successione di funzioni $f_n(x) = \frac{2}{1-5nx}$. Trovare l'insieme di convergenza puntuale, la funzione limite e dire se la convergenza è uniforme in tale insieme.

Esercizio 4.A Determinare e disegnare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{xy - 10}\, \log(9y - 3x - 3).$$

Esercizio 5.A Sia $\omega = A(x, y)\, dx + B(x, y)\, dy$ una forma differenziale in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Fornire condizioni necessarie o sufficienti perhcè ω sia esatta.

Esercizio 6.A Sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione di più variabili.

a) Dare la definizione di gradiente e di differenziale di f.

b) Se esistono tutte le derivate parziali di f, quali ipotesi garantiscono la differenziabilità di f?

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.B Calcolare l'integrale curvilineo

$$I = \int_\gamma ye^x\,dx + e^y cosx\,dy$$

dove γ è l'arco della curva $y = 2cosx$ che congiunge i punti $P = (0, 2)$ e $Q = (\frac{\pi}{3}, 1)$.

Esercizio 2.B

a) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = \frac{y^2-9}{9+x^2}$.

b) Determinare in quali intervalli le soluzioni sono crescenti o decrescenti.

c) Risolvere il seguente problema di Cauchy: $\begin{cases} y' = \frac{y^2-9}{9+x^2} \\ y(3) = 4. \end{cases}$

Esercizio 3.B Data la forma differenziale $\omega = \left(-2x\sin y + \frac{\sin x}{y^6}\right)dx + \left(-x^2\cos y + \frac{6\cos x}{y^7}\right)dy$ dire in quale insieme ω è esatta e determinare la primitiva che nel punto $(0, 1)$ assume il valore 3.