

**Corso di Laurea in Informatica**  
**Compito di Analisi Matematica II – Corso A**

17 settembre 1996

**Esercizio 1.**

Sia  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = \frac{(x^4 - y^2)}{x^2 + y^2}.$$

- (a) Studiare le curve di livello di  $f$ .
- (b) Trovare massimi e minimi relativi e assoluti oppure estremo superiore ed inferiore di  $f$ .
- (c) Trovare massimo e minimo assoluti di  $f$  sull'insieme:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 1\}.$$

**Esercizio 2.**

Sia  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  la curva definita da

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che per ogni fissato  $t \in (0, 2\pi)$  la retta perpendicolare alla curva  $\gamma$  nel punto  $\gamma(t)$  passa per il punto  $Q(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Esercizio 3 (solo per gli studenti di Scienze dell'Informazione).**

Sia  $(f_n)_{n \geq 1}$  la successione di funzioni  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da:  $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$ .

- (a) Dire per quali  $x \in \mathbb{R}$  la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge.
- (b) Dimostrare che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge uniformemente su ogni semiretta  $[a, +\infty)$  con  $a > 1$ .

**Esercizio 4 (solo per gli studenti di Informatica)**

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'' - 3u' + 2u = \cos t \\ u(0) = \frac{2}{5} \\ u'(0) = \frac{2}{5}. \end{cases}$$