

Corso di laurea in Informatica

Analisi II corso A

scritto del 11 giugno 1996

Esercizio 1: Sia $f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{y^3 + yx^2}$ definita su

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}.$$

- a) Provare che non esiste

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D}} f(x, y).$$

- b) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 3x, x < 3y\}$. Provare che esiste e calcolare:

$$l = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in A}} f(x, y).$$

- c) Ponendo $f(0, 0) = l$ trovare massimi e minimi relativi e assoluti, oppure estremo superiore e inferiore di f su $\bar{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 3x, x \leq 3y\}$.

Esercizio 2: Considerare la curva $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = \begin{cases} 3 \cos t + \cos(3t) \\ 3 \sin t - \sin(3t) \end{cases}$$

- a) Trovare i punti dove la velocità della curva si annulla.
- b) Trovare i punti di intersezione di γ con le circonferenze di centro $(0, 0)$ e raggio rispettivamente 2 e 4. Tracciare un grafico approssimativo del sostegno di γ .
- c) Calcolare la lunghezza di γ .

Esercizio 3 (solo per gli studenti di informatica): Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale:

$$u'' + 2u' - 3u = \cos t.$$

Esercizio 4 (solo per gli studenti di scienze dell'informazione):

Trovare il raggio di convergenza e calcolare la somma della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{n+2}{n^2+n}.$$