Esercizi di Complementi di Analisi Matematica II

Pisa, 3 agosto 2012

1. Dimostrare che esiste un'unica funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \frac{1}{3}f(\sin x) + \arctan x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Determinare se tale funzione appartiene a $C^1(\mathbb{R})$.

2. Dimostrare che esiste un'unica funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \frac{1}{3}f(\sin x) + x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Determinare se tale funzione appartiene a $C^1(\mathbb{R})$.

3. Dimostrare che esiste un'unica funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(0) = 2012$ e

$$f(x) = f\left(\frac{\sin x}{3}\right) + \arctan x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Determinare se tale funzione appartiene a $C^1(\mathbb{R})$.

4. Consideriamo l'equazione

$$f(x) = \frac{1}{3}f(x^2) + \arctan x.$$

- Dimostrare che esiste un'unica funzione continua $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa l'equazione per ogni $x \in [-1, 1]$.
- Dimostrare che esiste un'unica funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che è limitata e soddisfa l'equazione per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- (Questo punto non sembra facilissimo) Dimostrare che esistono infinite funzioni continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfano l'equazione per ogni $x \in \mathbb{R}$.

5. Consideriamo il seguente problema (una specie di equazione differenziale)

$$u'(t) = u\left(\frac{t}{2}\right), \quad u(0) = 2012.$$

- (Esistenza locale) Dimostrare che il problema ha un'unica soluzione di classe C^1 nell'intervallo $[-1/2, 1/2]$.
- (Esistenza globale) Dimostrare che il problema ha un'unica soluzione di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}$.

- (c) (Regolarità) Dimostrare che la soluzione globale è di classe C^∞ in $\mathbb{R}$.
- (d) (Comportamento qualitativo) Dimostrare che la soluzione globale è monotona per $t \geq 0$.
- (e) (Comportamento asintotico) Calcolare

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t).$$

6. Consideriamo il seguente problema (una specie di equazione differenziale)

$$u'(t) = 7 \arctan u \left(\frac{t}{2} \right), \quad u(0) = 2012.$$

Studiare esistenza/unicità locale/globale della soluzione, regolarità, monotonia per $t \geq 0$ e comportamento asintotico per $t \rightarrow +\infty$.

7. Consideriamo il seguente problema (una specie di equazione differenziale)

$$u'(t) = [u(\arctan t)]^2, \quad u(0) = 2012.$$

Studiare esistenza/unicità locale/globale della soluzione, regolarità, monotonia per $t \geq 0$ e comportamento asintotico per $t \rightarrow +\infty$.

8. Consideriamo il funzionale

$$F(u) = \int_0^1 (\dot{u}^2 + x^2 u + u^2) dx.$$

Studiare¹ il problema di minimo per il funzionale $F(u)$ con ciascuno dei seguenti set di condizioni aggiuntive:

- (a) $u(0) = u(1) = 0$,
- (b) $u(0) = 1$,
- (c) nessuna condizione aggiuntiva,
- (d) $u(0) = u(1)$,
- (e) $u'(0) = 1$,
- (f) $u''(0) = 1$.

9. Consideriamo il funzionale

$$F(u) = \int_0^1 (\dot{u}^2 + x^2 u) dx.$$

Studiare il problema di minimo per il funzionale $F(u)$ con ciascuno dei seguenti set di condizioni aggiuntive:

¹Nota generale: “studiare” un problema di minimo significa decidere gli spazi funzionali nei quali ambientarlo, ed in tali spazi discutere l’esistenza del minimo. Quando possibile, occorre determinare il minimo (o l’estremo inferiore, se il minimo non esiste) e gli eventuali punti di minimo. Può accadere che scelte diverse, ma comunque ragionevoli, degli spazi funzionali portino a dare risposte diverse alle domande precedenti, ed in tal caso tali diversità devono essere evidenziate.

- (a) $u(0) = 1$,
- (b) nessuna condizione aggiuntiva,
- (c) $u(0) = u(1)$,
- (d) $u(1/2) = 0$.

10. Consideriamo il funzionale

$$F(u) = \int_0^\pi (\dot{u}^2 + \dot{u} + 4u^2) dx.$$

Per ciascuno dei seguenti set di condizioni aggiuntive, stabilire se il corrispondente problema di minimo per il funzionale $F(u)$ ha soluzione e, in caso affermativo, scrivere la corrispondente equazione di Eulero con le opportune condizioni al bordo:

- (a) nessuna condizione aggiuntiva,
- (b) $u(0) = 1$,
- (c) $u'(0) = 2$,
- (d) $u(0) = u(\pi)$.

11. Studiare il problema di minimo

$$\min \left\{ \int_0^1 (\dot{u}^4 + u) dx : u(0) = 0, u(1) = 0 \right\}$$

in $C^1([0, 1])$ ed in $C^2([0, 1])$.

12. Consideriamo il problema di minimo

$$\min \left\{ \int_0^1 \left[\frac{\dot{u}}{1 + u^2} \right]^4 dx : u(0) = 0, u(1) = 1 \right\}.$$

- (a) Risolvere l'equazione di Eulero ad esso associata.
- (b) Dimostrare che nella ricerca del minimo possiamo sempre restringerci alle funzioni u tali che $0 \leq u(x) \leq 1$ per ogni $x \in [0, 1]$.
- (c) Dimostrare che la soluzione dell'equazione di Eulero è effettivamente la soluzione del problema di minimo.

13. Determinare quale dei seguenti funzionali ammette minimo nella classe di tutte le funzioni $u \in C^1([0, 1])$ tali che $u(0) = 0$ e $u(1) = 2012$:

$$F_1(u) = \int_0^1 (u^2 + \arctan \dot{u}^2) dx,$$

$$F_2(u) = \int_0^1 (\dot{u}^2 + \arctan u^2) dx,$$

$$F_3(u) = \int_0^1 (u^2 + \cos \dot{u}^2) dx,$$

$$F_4(u) = \int_0^1 \arctan (u^2 + \dot{u}) dx.$$

14. Consideriamo il funzionale

$$F(u) = \int_0^2 (\dot{u}^2 + u^2) dx.$$

Studiare i seguenti problemi di minimo:

$$\begin{aligned} & \min \left\{ F(u) : u(0) = 0, \int_0^1 u(x) dx = 8 \right\}, \\ & \min \{ u(1) + F(u) : u(0) = u(2) = 0 \}, \\ & \min \{ [u(1)]^3 + F(u) : u(0) = u(2) = 0 \}. \end{aligned}$$

15. Consideriamo il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} u''(t) = \sin u(t) & \forall t \in [0, 1], \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 2012. \end{cases}$$

- (a) Determinare un problema di minimo per cui il problema di Dirichlet risulti l'equazione di Eulero.
- (b) Dimostrare che il problema di minimo ammette almeno una soluzione in $H^1((0, 1))$.
- (c) Determinare in quale senso le soluzioni in $H^1((0, 1))$ del problema di minimo sono soluzioni del problema di Dirichlet.
- (d) Dimostrare che il problema di Dirichlet ammette almeno una soluzione di classe C^∞ .

16. Consideriamo il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} u''(t) = \lambda \sin u(t) & \forall t \in [0, 1], \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0, \end{cases}$$

dove λ è un parametro reale.

Dimostrare che esistono valori di λ per cui il problema di Dirichlet ammette almeno una soluzione non identicamente nulla.

17. Calcolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

18. Consideriamo l'equazione alle derivate parziali

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0,$$

con la condizione iniziale

$$u(x, 0) = x \quad \forall x \in [0, 1].$$

Determinare (come sviluppo in serie di Fourier) la soluzione per ciascuno dei seguenti set di condizioni al bordo:

- (a) $u(0, t) = u(1, t) = 0$ per ogni $t > 0$,
- (b) $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$ per ogni $t > 0$,
- (c) $u_x(0, t) = u(1, t) = 0$ per ogni $t > 0$,
- (d) $u(0, t) = u(1, t)$ e $u_x(0, t) = u_x(1, t)$ per ogni $t > 0$,
- (e) $u(0, t) = 7$ e $u_x(1, t) = 22$ per ogni $t > 0$.

19. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + 2u_x(x, t) & x \in [0, \pi], t \geq 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \forall t > 0. \end{cases}$$

- (a) Determinare tutte le soluzioni del problema che si possono ottenere per separazione delle variabili, cioè che si possono scrivere nella forma $u(t, x) = f(t)g(x)$ per opportune funzioni $f(t)$ e $g(x)$.
- (b) (Domanda volutamente vaga) Interpretare quanto ottenuto al punto precedente in termini di operatori, specificando in particolare che cosa rappresentano le funzioni $g(x)$ trovate.

20. Consideriamo le funzioni

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases} \quad u_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Consideriamo la soluzione del problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) & \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Determinare le funzioni $u(0, t)$ e $u(100, t)$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

- (b) Stessa domanda per il problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) & \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- (c) Determinare (come sviluppo in serie di Fourier) la soluzione del problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) & \forall (x, t) \in [-1, 1] \times \mathbb{R} \\ u(-1, t) = u(1, t) = 0 & \forall t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [-1, 1], \\ u_t(x, 0) = 0 & \forall x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

- (d) Determinare (come sviluppo in serie di Fourier) la soluzione del problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) & \forall (x, t) \in [-1, 1] \times \mathbb{R} \\ u(-1, t) = u(1, t) = 0 & \forall t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [-1, 1], \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & \forall x \in [-1, 1]. \end{cases}$$