SSSUP 2012 - ESERCIZI

Titolo nota 24/09/2012

① Dim. che esiste unica $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua t.c.

$$f(x) = \frac{1}{3} f(\sin x) + \arctan x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dim.: $C^0_{bounded}(\mathbb{R}) = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ limitate e continue} \}$

Oss 1 Se esiste una soluzione (continua), questa è per forza limitata

Oss. 2 $C^0_{bounded}(\mathbb{R})$ è un metrico completo rispetto a

$$d_0(f,g) := \sup\{ |f(x) - g(x)| : x \in \mathbb{R} \}$$

Più in generale

$C^0_{bounded}(X, Y)$ è completo se Y è completo e X metrico qualunque (non serve compatto)

Oss. 3 $Tf(x) = \frac{1}{3} \dots \Rightarrow T$ è una contrazione in $C^0_{bounded}$

Il punto fisso unico è la soluzione.

Oss. 4 Si può fare lo stesso discorso in $C^1_{bounded}(\mathbb{R}) =$

$= \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 con f ed f' limitate $\}$

$$d_1(f,g) := \sup\{ |f(x) - g(x)| : x \in \mathbb{R} \} + \sup\{ |f'(x) - g'(x)| : x \in \mathbb{R} \}$$

Occhio a controllare la contrazione nella nuova distanza:

$$d_1(Tf, Tg) \le \frac{1}{3} d_1(f,g)$$

$\shortparallel$

$$\sup\{ |Tf(x) - Tg(x)| : x \in \mathbb{R} \} + \sup\{ |(Tf)'(x) - (Tg)'(x)| : x \in \mathbb{R} \}$$

arctan x se ne vanno

$$= \sup\{ |\tfrac{1}{3} f(\sin x) - \tfrac{1}{3} g(\sin x)| : x \in \mathbb{R} \} +$$

$\frac{1}{1+x^2}$ se ne vanno

$$+ \sup\{ |\tfrac{1}{3} f'(\sin x) \cdot \cos x - \tfrac{1}{3} g'(\sin x) \cdot \cos x| : x \in \mathbb{R} \}$$

— o — o —

(2) $$f(x) = \frac{1}{3} f(\sin x) + x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Occhio: non posso più lavorare in $C^0_{\text{bounded}}(\mathbb{R})$ perchè T non manda lo spazio in sè.

Alternativa: lavoro in $C^0([-A, A])$ per ogni $A \geq 1$.
Bisogna osservare che quando $A < B$ la soluzione in $[-B, B]$ è un' estensione della soluzione in $[-A, A]$.
Oppure: risolvo in $[-1, 1]$ e poi uso l' eq. per definire $f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

— o — o —

(3) $$f(x) = f\left(\frac{\sin x}{3}\right) + \arctan x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\boxed{f(0) = 2012}$ ← senza questo, se $f(x)$ risolve, anche $f(x) + k$ risolve.

<u>Oss.</u> $[Tf](x) = f\left(\frac{\sin x}{3}\right) + \arctan x$ $\boxed{\text{NON}}$ è una contrazione in $C^0_{\text{bounded}}(\mathbb{R})$ e nemmeno in $C^0([-A, A])$ per $A \geq 1$.

<u>Possibile rimedio:</u> $X = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 con f e f' limitate e $f(0) = 2012 \}$

Allora X è metrico completo rispetto alla d_1 di prima.
Spero che $T : X \to X$ sia contrazione (controllare che mandi X in X anche)

$$d_1(Tf, Tg) = \sup\left\{ \left| f\left(\frac{\sin x}{3}\right) - g\left(\frac{\sin x}{3}\right) \right| : x \in \mathbb{R} \right\} +$$

$$+ \sup\left\{ \underbrace{\left| \frac{1}{3} f'\left(\frac{\sin x}{3}\right) \cdot \cos x - \frac{1}{3} g'\left(\frac{\sin x}{3}\right) \cdot \cos x \right|}_{\frac{1}{3} \underbrace{|\cos x|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\left| f'\left(\frac{\sin x}{3}\right) - g'\left(\frac{\sin x}{3}\right) \right|}_{\leq \sup\{ |f'(x) - g'(x)| : x \in \mathbb{R} \}}} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

Se pongo $\varphi(x) = f\left(\frac{x}{3}\right) - g\left(\frac{x}{3}\right)$, allora

$$|\varphi(\sin x)| = |\varphi(\sin x) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\varphi(0)}}| = \underbrace{|\sin x|}_{\leq 1} \cdot |\varphi'(\xi)| \leq \frac{1}{3} |f'(\xi) - g'(\xi)| \leq \frac{1}{3}$$

Ricapitolando

$$d_1(Tf, Tg) = \underbrace{\sup\{|Tf-Tg|\}}_{\leq \frac{1}{3}\sup\{|f'-g'|\}} + \underbrace{\sup\{|(Tf)'-(Tg)'|\}}_{\leq \frac{1}{3}\sup\{|f'-g'|\}}$$

$$= \frac{2}{3}\sup\{|f'-g'|\} \leq \frac{2}{3} d_1(f,g)$$

— o — o —

Alternativa: supponiamo che esista una soluzione C^1

$$f'(x) = \frac{1}{3} f'\left(\frac{\sin x}{3}\right)\cdot \cos x + \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{3} g\left(\frac{\sin x}{3}\right)\cdot \cos x + \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Risolvo lavorando in $C^0_{\text{bounded}}(\mathbb{R})$. La primitiva di $\overbrace{g(x)}^{G(x)}$ con $G(0) = 2012$ soddisfa l'eq. data. Questo va bene se $\frac{1}{3} < 1$

— o — o —

(4) $$f(x) = \frac{1}{3} f(x^2) + \arctan x$$

(a) In $C^0([-1,1])$ sol. unica $\rightarrow$ solita contrazione

(b) In $C^0_{\text{bounded}}(\mathbb{R})$ sol. unica $\rightarrow$ contrazione in questo spazio

Occhio: NON è una contrazione in $C^0([-A,A])$ se $A>1$ perchè non è nemmeno ben definita in questo spazio.

(c) Esistono infinite soluzioni $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue (ovviamente non limitate).

Oss. 1: su $[-1,1]$ è obbligata dal p.to (a). Anche $f(1)$ è fisso.

Oss. 2: se conosco $f(2)$, conosco $f(4)$, ma non ho altri vincoli tra 2 e 4

Costruzione: la definisco come mi pare tra 2 e 4, rispettando solo la relazione tra $f(2)$ e $f(4)$.

Una volta che la conosco tra 2 e 4, la conosco tra 4 e 16, 4^2 e 16^2, ... e indietro tra $\sqrt{2}$ e $\sqrt{4}$, $\sqrt{\sqrt{2}}$ e $\sqrt{\sqrt{4}}$, ...

L'unica cosa da controllare è che sia continua in $x=1$, e questo è DIFFICILE. I pti fondamentali sono 2

* passando da un intervallo a quello a sx l'oscillazione nell'intervallo si riduce di $\frac{1}{3}$, quindi il limite esiste
* il limite lo posso calcolare usando i valori in $2, \sqrt{2}, \sqrt{\sqrt{2}}, \dots$: i valori in $a_n = 2^{2^{-n}}$ verificano

$$f(a_{n+1}) = \frac{1}{3} f(a_n) + \arctan a_n$$

e si può dimostrare che $f(a_n) \to$ valore che si vuole del limite in 1.

— o — o —

(5) $$u'(t) = u\left(\frac{t}{2}\right) \qquad u(0) = 2012$$

Dim. Scrivo l'eq. in forma integrale

$$u(t) = \underbrace{2012 + \int_0^t u\left(\frac{s}{2}\right) ds}_{[Fu](t)}$$

$F : C^0([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) \to C^0([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ è contrazione (e lo è facilmente perchè $\frac{1}{2}$ (ampiezza intervallo) è < 1.

$$|F(u) - F(v)|_{C^0} = \sup\left\{ \left| \int_0^t u\left(\frac{s}{2}\right) ds - \int_0^t v\left(\frac{s}{2}\right) ds \right| : t \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] \right\}$$

$$\leq \sup\left\{ \int_0^t \left| u\left(\frac{s}{2}\right) - v\left(\frac{s}{2}\right) \right| ds : t \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] \right\}$$

$$\leq \sup\left\{ \int_0^t |u - v|_{C^0} ds : t \in \dots \right\}$$

$$\leq \int_0^{\boxed{\frac{1}{2}}} |u - v|_{C^0} ds = \boxed{\frac{1}{2}} |u - v|_{C^0}$$

Soluzione C^0 dell'eq. integrale $\Leftrightarrow$ sol. C^1 dell'eq. diff.
Così abbiamo sol. loc. definita in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
$\rightsquigarrow$ si estende su $[-1, 1]$, poi in $[-2, 2]$, e così via $\Rightarrow$ globale.

Occhio: T NON è una contrazione in $C^0([-3,3])$

Alternativa: $C^0([-3,3])$ è un metrico completo rispetto a

$$d_{0,\lambda}(f,g) := \sup \{ |f(x)-g(x)| e^{\lambda x} : x \in [-3,3] \}$$

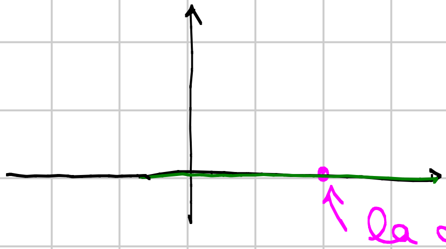
qualunque sia λ fissato.

Scegliendo bene λ si ha che T diventa una contrazione.

— o — o —

Occhio: per queste equazioni NON vale il confronto

$u(t) \equiv 0$ è sol.



la derivata qui dipende da u a metà strada

— o — o —

(6) $$u'(t) = 7 \arctan\left(\frac{t}{2}\right) \qquad u(0) = 2012$$

$$[Tu](t) = 2012 + \int_0^t 7 \arctan\left(\frac{s}{2}\right) ds$$

Contrazione in $C^0([-T,T])$ se $T < \frac{1}{7}$ (usando che arctan è 1-Lip).

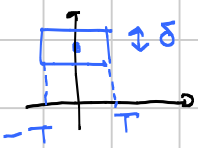
Poi è uguale.

— o — o —

(7) $$u'(t) = [u(\arctan t)]^2 \qquad u(0) = 2012$$

$$[Fu](t) = 2012 + \int_0^t [u(\arctan s)]^2 ds$$

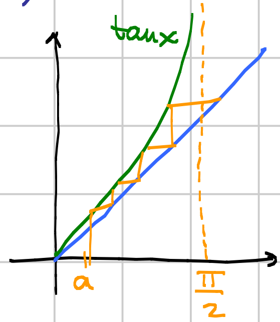
Qui serve uno spazio $X_{T,\delta} = \{ f : [-T,T] \to [2012-\delta, 2012+\delta]$ continue $\}$



è metrico completo e qui F è contrazione a patto di scegliere bene T in funzione di δ

Occhio ad accertarsi che F mandi $X_{T,\delta}$ in sè e sia contrazione.

La soluzione è GLOBALE: se ho soluzione in $[-a,a]$, ho soluzione in $[-\tan a, \tan a]$. Così supero $\frac{\pi}{2}$ in fretta



— o — o —

(8) $$F(u) = \int_0^1 (\dot u^2 + x^2 u + u^2)\, dx$$

(e) – (f) l' inf. è quello teorico senza condizioni. Non lo posso raggiungere a meno che il minimo teorico non verifichi per puro caso le condizioni poste.
Lo posso approssimare quanto voglio cambiando u, rispetto al minimo teorico, di poco vicino a $x=0$.

— o — o —

(10) (a) $\ddot u(0) = \ddot u(\pi) = 0$ $\qquad \dddot u(0) = \dddot u(\pi) = \frac{1}{2}$

(b) $\ddot u(0) = \ddot u(\pi) = 0$, $\qquad \dddot u(\pi) = \frac{1}{2}$

(c) $\ddot u(\pi) = 0$ $\qquad \dddot u(0) = \dddot u(\pi) = \frac{1}{2}$

(d) $\ddot u(0) = \ddot u(\pi) = 0$, $\qquad \dddot u(0) = \dddot u(\pi)$

— o — o —

(11) $$\min \left\{ \int_0^1 (\dot u^4 + u)\, dx \;:\; u(0) = u(1) = 0 \right\}$$

$$-(4\dot u^3)' + 1 = 0 \qquad (4\dot u^3)' = 1 \qquad 4\dot u^3 = x + c$$

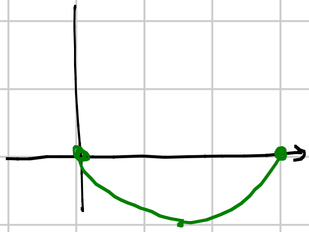
$$\dot u^3 = \frac{x+c}{4} \qquad \dot u = \sqrt[3]{\frac{x+c}{4}} \qquad u = 3\left|\frac{x+c}{4}\right|^{\frac{4}{3}} + d$$

$$u(x) = \frac{3}{16}\left\{ |2x-1|^{4/3} - 1 \right\}$$

$u(0)=0 \qquad 3\left(\frac{c}{4}\right)^{\frac{4}{3}}+d=0$

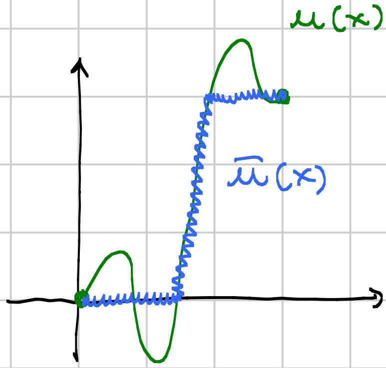
$u(1)=0 \qquad 3\left|\frac{1+c}{4}\right|^{\frac{4}{3}}+d=0 \quad \dots \quad c=-\frac{1}{2} \quad d=\dots$

In C^1 c'è il minimo (dim. con disug.)
In C^2 non c'è e l'inf. è il minimo in C^1.



—o—o—

(12) $u(x)=\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)$



$F(\bar{u}) \leq F(u)$

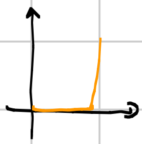
$$\int_0^1 \dot{u}^4\,dx \leq 16\int_0^1 \frac{\dot{u}^4}{(1+u^2)^4}\,dx \qquad a^2 \leq 1+a^4$$

se $u \in [0,1]$

—o—o—

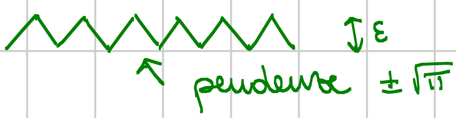
(13) $u \in C^1([0,1]) \qquad u(0)=0 \qquad u(1)=2012$

$\inf F_1 = 0$

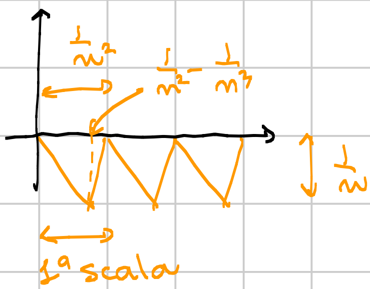


$\min F_2$ esiste $\leadsto$ metodo diretto $\quad F_2(u) \leq K \Rightarrow \int \dot{u}^2 \leq \bar{K}$

$\inf F_3 = -1 \leadsto$



$\inf F_4 = -\frac{\pi}{2} \leadsto$



(14) $\frac{1}{t}\{F(u+tv)-F(u)\} = \frac{1}{t}\int_0^2 \cancel{\dot u^2}+2t\dot u\dot v+\dot v^2+\cancel{u^2}+2tuv+v^2-\cancel{\dot u^2}-\cancel{u^2}$

$$\lim_{t\to 0}\int_0^2 2\dot u\dot v+2uv=0$$

$$\int_0^2(-\ddot u+u)v=0 \qquad \forall v \text{ t.c. } \int v=0$$

<u>Lemma</u> Se $\int fv=0$ $\forall v$ t.c. $\int v=0$, allora $f=\text{cost}$.

Ogni v t.c. $\int v=0$ si può pensare come $v=\dot w$ con $w(0)=w(2)=0$

$$\int_0^2(-\ddot u+u)\dot w=0 \qquad \int_0^2(-\ddot u+u)'w=0$$

Quindi l'eq. di Eulero è $\begin{cases}-\ddot u+u=\lambda\\ u(0)=0\\ \dot u(2)=0\end{cases}$

3 parametri e 3 equazioni...

— o — o —

(15) $$F(u)=\int_0^1(\dot u^2-2\cos u)$$

$F(u)=\int\varphi(\dot u)+\psi(u) \qquad -(\varphi'(\dot u))'+\psi'(u)=0$

Cosa risolve un minimo in H^1 ... Soliti conti

senso in H^1

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(u+hv)-F(u)}{h}=2\int_0^1\dot u\dot v+\sin u\cdot v=0$$

$$\int_0^1\dot u\dot v=-\int_0^1\sin u\cdot v \qquad \forall v\in\ldots$$

$$\int_0^1 f\dot v=-\int_0^1 gv \qquad \forall v\in\ldots$$

Dice che f sta in H^1 e g è la sua derivata debole

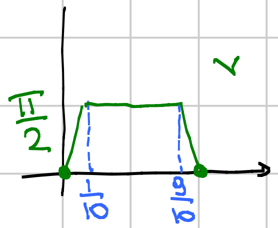
Quindi $\dot u\in H^1$, cioè $u\in H^2$, e $\ddot u=\sin u$

(16) $$F(u) = \int_0^1 (\dot{u}^2 - 2\lambda \cos u)$$

<u>Oss 1</u> : per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ il problema di min ha soluzione (metodo diretto)

<u>Oss. 2</u> : esistono valori di λ per cui il minimo non si realizza per $u \equiv 0$

Prendo λ enormemente negativo $\quad F(0) = -2\lambda$ grande ≥ 0



$F(v) =$ poco contributo nei tratti di crescita

— o — o —

(18) $u_t = u_{xx} \qquad u(1,t) = 0 \qquad u_x(0,t) = 0$

Metodo: trovare gli autovalori di $\quad u_{xx} = \lambda u \quad$ con condizioni

— o — o —

(19) $$f'(t)\, g(x) = f(t)\, g''(x) + 2 f(t)\, g'(x)$$

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{g''(x) + 2g'(x)}{g(x)} = \text{costante}$$