Polinomi 1 – Definizioni base

In alcune parti delle schede sui polinomi si parla di *numeri complessi*. Chi non ha familiarità con tali numeri, può per ora ignorare quelle parti senza compromettere la comprensione del seguito.

1. **Definizione di polinomio**. Un *polinomio* è una scrittura del tipo
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

2. **Coefficienti di un polinomio**. Gli a_i sono detti i *coefficienti* del polinomio. A seconda dell'insieme numerico a cui appartengono gli a_i, il polinomio $p(x)$ si dice a coefficienti interi, razionali, reali, complessi. Il coefficiente a_0 viene di solito detto *termine noto* di $p(x)$.

3. **Polinomi monici**. Un polinomio si dice *monico* se $a_n = 1$.

4. **Funzione polinomiale**. Si dice *funzione polinomiale* la funzione che ad ogni numero α associa il valore $p(\alpha)$, ottenuto mettendo α al posto della x e svolgendo le operazioni algebriche. Si noti che $p(0)$ è sempre il termine noto del polinomio, mentre $p(1)$ è la somma algebrica di tutti i coefficienti.

5. **Principio di identità dei polinomi**. Siano $p(x)$ e $q(x)$ due polinomi. Se le funzioni polinomiali a loro associate coincidono, cioè se $p(\alpha) = q(\alpha)$ per ogni α, allora i due polinomi coincidono, cioè hanno gli stessi coefficienti.

6. **Grado di un polinomio**. Si dice *grado* di un polinomio il più grande intero i tale che $a_i \neq 0$. Per il polinomio nullo (quello in cui tutti i coefficienti sono zero) non definiamo il grado. Il grado di un polinomio $p(x)$ si indica di solito con la notazione $\deg(p(x))$, che è un'abbreviazione dell'inglese "degree".

7. **Assegnazione di $n+1$ valori**. Assegnate $n+1$ coppie di numeri reali (o anche complessi)
$$(\alpha_0, \beta_0),\ (\alpha_1, \beta_1), \ldots,\ (\alpha_n, \beta_n),$$
esiste un'unico polinomio $p(x)$ di grado $\leq n$ tale che $p(\alpha_i) = \beta_i$ per ogni $i = 0, 1, \ldots, n$.

8. **Polinomi costanti**. Le costanti possono essere considerate come casi particolari di polinomio (di grado 0 se la costante non è nulla).

9. **Somma e prodotto di polinomi**. Due polinomi si possono sommare o moltiplicare tra di loro nel modo usuale. In particolare è possibile moltiplicare un polinomio per una costante. Dalla somma e prodotto discendono anche la sottrazione (si tratta di sommare al primo polinomio il secondo moltiplicato per la costante -1) e l'elevamento ad una potenza k intera positiva (si tratta di un prodotto di k fattori uguali).

10. **Comportamento del grado rispetto alla somma e al prodotto**. Siano $p(x)$ e $q(x)$ due polinomi. Allora
$$\deg(p(x) \cdot q(x)) = \deg(p(x)) + \deg(q(x)),$$
$$\deg(p(x) + q(x)) \leq \max\{\deg(p(x)), \deg(q(x))\}.$$
Di conseguenza:
$$\deg\left([p(x)]^k\right) = k \cdot \deg(p(x))$$
per ogni intero $k \geq 1$.

Polinomi 2 – Divisione e Teorema del resto

1. **Divisione euclidea**. Siano $a(x)$ e $b(x)$ due polinomi, con $\deg(a(x)) > 0$. Allora esistono (e sono unici) due polinomi $q(x)$ ed $r(x)$ tali che

   (a) $b(x) = a(x) \cdot q(x) + r(x)$,

   (b) $r(x) = 0$ oppure $\deg(r(x)) < \deg(a(x))$.

   Questa si chiama *divisione euclidea*, o *divisione con resto*. In tal caso $b(x)$ si chiama *dividendo*, $a(x)$ si chiama *divisore*, $q(x)$ si chiama *quoziente* e $r(x)$ si chiama *resto*.

   Per calcolare $q(x)$ ed $r(x)$ bisogna eseguire la *divisione tra polinomi*.

2. **Esempio di divisione tra polinomi**. A titolo di esempio, riportiamo la divisione euclidea tra il polinomio x^5+2x-3 ed il polinomio x^3+x^2-1, da cui risulta che il quoziente è x^2-x+1 ed il resto è $x-2$.

$$
\begin{array}{cccccc|ccc}
x^5 & & & & +2x & -3 & x^3 & +x^2 & -1 \\
\cline{7-9}
-x^5 & -x^4 & & +x^2 & & & x^2 & -x & +1 \\
\hline
= & -x^4 & & +x^2 & +2x & -3 & & & \\
 & +x^4 & +x^3 & & -x & & & & \\
\hline
 & = & +x^3 & +x^2 & +x & -3 & & & \\
 & & -x^3 & -x^2 & & +1 & & & \\
\hline
 & & = & = & +x & -2 & & &
\end{array}
$$

3. **Divisibilità**. Se $r(x) = 0$, si dice che il polimomio $b(x)$ è *divisibile* per il polinomio $a(x)$.

4. **Caso di coefficienti reali o razionali**. Se $a(x)$ e $b(x)$ hanno coefficienti reali o razionali, allora anche $q(x)$ ed $r(x)$ hanno coefficienti reali o razionali, rispettivamente.

5. **Caso di coefficienti interi**. Non è in generale vero che se $a(x)$ e $b(x)$ hanno coefficienti interi, allora anche $q(x)$ ed $r(x)$ hanno coefficienti interi.

   Tuttavia, se $a(x)$ e $b(x)$ hanno coefficienti interi e $a(x)$ è *monico*, allora anche $q(x)$ ed $r(x)$ hanno coefficienti interi.

6. **Definizione di massimo comun divisore**. Siano $a(x)$ e $b(x)$ due polinomi. Si dice *massimo comun divisore* di $a(x)$ e $b(x)$ un polinomio di grado massimo tra quelli che dividono sia $a(x)$, sia $b(x)$. Due polinomi con questa proprietà sono uno multiplo dell'altro.

7. **Teorema del resto**. Se $a(x)$ è un polinomio monico di grado 1, cioè $a(x) = x - \alpha$, allora il resto è la costante $p(\alpha)$, cioè il valore del polinomio $p(x)$ in α. Detto in formule:

$$p(x) = (x-\alpha) \cdot q(x) + p(\alpha).$$

8. **Caso particolare del teorema del resto**. Se $p(\alpha) = 0$, allora

$$p(x) = (x-\alpha) \cdot q(x),$$

   cioè il polinomio $p(x)$ è divisibile per il polinomio $x - \alpha$.

Polinomi 3 – Radici e fattorizzazione

1. **Radici di un polinomio**. Si dice che il numero α è *radice* del polinomio $p(x)$ se $p(\alpha) = 0$. Si dice che α è una radice intera, razionale, reale, complessa, a seconda che α sia un numero intero, razionale, reale, complesso.

2. **Molteplicità di una radice di un polinomio**. Sia α una radice di un polinomio $p(x)$. Diciamo che il numero intero m è la *molteplicità* di α se $p(x)$ è divisibile per $(x-\alpha)^m$, ma non è divisibile per $(x-\alpha)^{m+1}$. La molteplicità di una radice è sempre ≥ 1 e $\leq$ del grado di $p(x)$. Le radici di molteplicità 1 si dicono *semplici*.

3. **Teorema fondamentale dell'algebra**. Un polinomio di grado n a coefficienti complessi ha *esattamente* n radici *complesse*, se ogni radice viene contata tante volte quante è la sua molteplicità.

   A maggior ragione un polinomio a coefficienti reali (o razionali o interi) ha esattamente n radici complesse, dunque *al massimo* n radici reali, razionali o intere.

4. **Fattorizzazione sui complessi**. Un polinomio di grado n a coefficienti complessi si può scrivere come prodotto di n polinomi di grado 1 a coefficienti complessi. La fattorizzazione è unica a meno dell'ordine dei fattori. In particolare, se $p(x)$ è monico e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono le sue n radici (ogni radice è stata ripetuta a seconda della sua molteplicità), allora

   $$p(x) = (x - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_n).$$

5. **Fattorizzazione sui reali**. Un polinomio a coefficienti reali si può scrivere come prodotto di polinomi di grado 1 e 2 a coefficienti reali. La fattorizzazione è unica a meno dell'ordine dei fattori.

6. **Esistenza di radici reali**. Un polinomio a coefficienti reali di grado *dispari* ha sempre almeno una radice reale (questo però non vuol dire che ci sia una formula semplice per calcolarla!). Se il grado è pari, può non avere nessuna radice reale.

7. **Radici reali positive: Regola di Cartesio**. Prendiamo un polinomio $p(x)$ a coefficienti reali e scriviamo di fila i suoi coefficienti non nulli; contiamo poi in questa fila quante variazioni di segno ci sono. Allora il numero delle radici *reali positive* di $p(x)$, contate con molteplicità, è minore od uguale del numero delle variazioni di segno. Inoltre i due numeri sono entrambi pari o entrambi dispari.

8. **Radici razionali di un polinomio a coefficienti interi**. Se $p(x)$ è un polinomio a coefficienti interi, e $\alpha = p/q$ è una *radice razionale* di $p(x)$ ridotta ai minimi termini (cioè la frazione è stata semplificata), allora p è un divisore di a_0 e q è un divisore di a_n.

9. **Relazioni tra radici e coefficienti**. Sia $ax^2 + bx + c$ un polinomio di secondo grado, e siano λ_1, λ_2 le sue due radici (contate eventualmente con la molteplicità). Allora

   $$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a}, \qquad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{c}{a}.$$

   In generale per un polinomio di grado n si ha che

   $$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \qquad \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Disequazioni – Preliminari

1. **Come si presenta una disequazione**. Pur di "portare tutto al primo membro", una disequazione si può sempre ridurre ad una delle seguenti quattro forme
$$f(x) > 0, \qquad f(x) < 0, \qquad f(x) \geq 0, \qquad f(x) \leq 0.$$

2. **Soluzione di una disequazione**. La *soluzione* di una disequazione è un *sottoinsieme dei numeri reali*, costituito dai valori x per cui
   - ha senso calcolare la funzione $f(x)$;
   - il valore $f(x)$ verifica la relazione data.

   Risolvere una disequazione significa ovviamente trovare l'insieme soluzione (che può essere anche $\emptyset$ o $\mathbb{R}$).

3. **Achtung!** Data una funzione $f(x)$, i numeri reali risultano suddivisi in *quattro* sottoinsiemi disgiunti:
   - gli $x \in \mathbb{R}$ per cui si ha che $f(x) < 0$;
   - gli $x \in \mathbb{R}$ per cui si ha che $f(x) = 0$ (le soluzioni dell'equazione);
   - gli $x \in \mathbb{R}$ per cui si ha che $f(x) > 0$;
   - gli $x \in \mathbb{R}$ per cui non ha senso calcolare $f(x)$.

4. **Disequazioni ed equazioni**. La soluzione della disequazione $f(x) \geq 0$ è l'unione disgiunta tra l'insieme soluzione della disequazione $f(x) > 0$ e l'insieme delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$. Discorso analogo vale per la disequazione $f(x) \leq 0$.

   Per questo motivo è sufficiente svolgere la teoria delle equazioni e la teoria delle disequazioni con disuguaglianze strette.

5. **Sistemi di disequazioni**. Un sistema di disequazioni si presenta con un certo numero di disequazioni, accorpate da una parentesi graffa. La soluzione di un sistema di disequazioni è costituita dagli x reali che verificano *contemporaneamente* tutte le disequazioni del sistema. Operativamente si può procedere così:
   - si risolvono *separatamente* le varie disequazioni del sistema, ottenendo per ciascuna l'insieme soluzione;
   - si considera l'*intersezione* dei vari insiemi trovati.

6. **Operazioni lecite nel risolvere una disequazione**. Data una disequazione nella forma $f(x) > g(x)$, possiamo fare i seguenti tipi di operazione:
   - aggiungere ad entrambi i membri una stessa quantità, lasciando inalterato il verso della disuguaglianza;
   - moltiplicare entrambi i membri per una stessa quantità *positiva* (cioè > 0), lasciando inalterato il verso della disuguaglianza;
   - moltiplicare entrambi i membri per una stessa quantità *negativa* (cioè < 0), invertendo il verso della disuguaglianza.

Disequazioni di primo e secondo grado

1. **Disequazioni di primo grado**. Sia $f(x) = ax + b$, con $a > 0$. Allora

   - $f(x) > 0$ per $x > -b/a$;
   - $f(x) = 0$ per $x = -b/a$;
   - $f(x) < 0$ per $x < -b/a$.

   Questi risultati si giustificano facilmente "portando b dall'altra parte" e "dividendo per a" (essendo $a > 0$, tale operazione conserva i versi delle disuguaglianze).

2. **Disequazioni di secondo grado**. Sia $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a > 0$. Poniamo $\Delta = b^2 - 4ac$. Allora

   - se $\Delta < 0$, allora $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
   - se $\Delta = 0$, allora
     * $f(x) = 0$ per un unico valore $x = \lambda$ (che si verifica facilmente essere $\lambda = -b/2a$);
     * $f(x) > 0$ per ogni $x \neq \lambda$;
   - se $\Delta > 0$, allora
     * $f(x) = 0$ per due valori reali $\lambda_1 < \lambda_2$, dati dalle formule

       $$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad \lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a};$$

     * $f(x) < 0$ per $x \in]\lambda_1, \lambda_2[$ (cioè per "valori interni" all'intervallo tra le radici);
     * $f(x) > 0$ per $x \in]-\infty, \lambda_1[\cup]\lambda_2, +\infty[$ (cioè per "valori esterni" all'intervallo tra le radici).

3. **Achtung!** La discussione del segno che abbiamo fatto, sia per il binomio di primo grado $ax+b$, sia per il trinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$, è basata sulla condizione $a > 0$.

   D'altra parte, se in una disequazione tali espressioni compaiono con $a < 0$, basta cambiare i segni *ed il verso della disequazione* per ricondursi al caso $a > 0$.

4. **Achtung!** La disequazione $x^2 < 4$ è un caso particolare di disequazione di secondo grado. Portando tutto al primo membro si ottiene infatti $x^2 - 4 < 0$, da cui facilmente si trova che l'insieme soluzione è $]-2, 2[$.

   Si prega dunque di evitare assurdità del tipo $x < \pm 2$ o simili.

5. **Achtung!** Si faccia particolare attenzione ad evitare passaggi accattivanti, ma scorretti, come i seguenti:

   - $(x-1) \cdot (2x-3) > (x-1) \cdot (x-2) \implies 2x - 3 > x - 2$;
   - $\dfrac{x+1}{x+2} > \dfrac{x+3}{x+4} \implies (x+1)(x+4) > (x+2)(x+3)$.

Disequazioni con prodotti e quozienti

1. **Disequazioni con prodotti**. Si tratta di studiare il segno di espressioni del tipo
$$f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x).$$
È chiaro che una tale espressione
   - è definita per quei valori della x per cui *tutte* le f_i sono definite;
   - è nulla per quei valori della x per cui *almeno* una delle f_i è nulla;
   - è positiva per quei valori della x per cui $f_i(x) < 0$ per un numero *pari* di indici i;
   - è negativa per quei valori della x per cui $f_i(x) < 0$ per un numero *dispari* di indici i.
2. **Disequazioni con quozienti**. Si tratta di studiare il segno di espressioni del tipo
$$\frac{f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)}{g_1(x) \cdot \ldots \cdot g_m(x)}.$$
È chiaro che una tale espressione
   - è definita per quei valori della x per cui
     - *tutte* le f_i sono definite;
     - *tutte* le g_i sono definite;
     - *tutte* le g_i sono diverse da zero.
   - è nulla per quei valori della x per cui *almeno* una delle f_i è nulla;
   - è positiva per quei valori della x per cui tra numeratore e denominatore vi è un numero *pari* di fattori negativi;
   - è negativa per quei valori della x per cui tra numeratore e denominatore vi è un numero *dispari* di fattori negativi.
3. **Come procedere**. Quando si ha a che fare con disequazioni con prodotti o quozienti, si può operativamente procedere nel seguente modo:
   (a) per ciascuna delle f_i e delle g_j si determinano *separatamente* gli insiemi in cui è positiva, negativa, nulla, non definita;
   (b) si disegnano una sotto l'altra tante rette quanti sono i fattori;
   (c) sulla retta corrispondente ad ogni fattore si rappresentano con notazioni (o colori) diversi i quattro insiemi determinati al punto (a);
   (d) zona per zona si traggono le informazioni sul segno del prodotto o del quoziente sulla base del segno dei singoli fattori.

   Si noti che, nel seguire tale procedura, si tiene conto del tipo di relazione presente nella disequazione data ($>$, $<$, ecc.) solo nella fase (d).
4. **Achtung!** Due errori comuni sono i seguenti: rappresentare nello stesso modo la zona in cui un fattore è negativo e la zona in cui quel fattore non è definito (con conseguenti errori nella fase (d)); confondere il procedimento per studiare il segno di un prodotto o un quoziente con quello per risolvere un sistema (e viceversa).

Valore assoluto

1. **Definizione di valore assoluto**. Il *valore assoluto* di un numero reale x è definito nel seguente modo:
$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$
Così per esempio $|3| = 3$, $|-4| = 4$, $|-10/7| = 10/7$, $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$.

2. **Valore assoluto di una funzione**. Se $f(x)$ è una funzione, allora $|f(x)| = f(x)$ per quei valori di x tali che $f(x) \geq 0$, mentre $|f(x)| = -f(x)$ per quei valori di x tali che $f(x) < 0$.

   Così per esempio :
$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{se } x \geq 4, \\ 4-x & \text{se } x < 4, \end{cases}$$
$$|x^2 - 5x + 6| = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & \text{se } x \leq 2 \text{ oppure } x \geq 3, \\ -x^2 + 5x - 6 & \text{se } 2 < x < 3. \end{cases}$$

3. **Proprietà del valore assoluto**. Abbiamo che
   (a) $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;
   (b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ per ogni x, y reali;
   (c) $|x^{-1}| = |x|^{-1}$ per ogni $x \neq 0$;
   (d) $|x + y| \leq |x| + |y|$ per ogni x, y reali;
   (e) $|x - y| \geq ||x| - |y||$ per ogni x, y reali.

4. **Equazione fondamentale con il valore assoluto**. L'equazione $|x| = \lambda$ ha
   - nessuna soluzione se $\lambda < 0$;
   - l'unica soluzione $x = 0$ se $\lambda = 0$;
   - due soluzioni $x_1 = -\lambda$ e $x_2 = \lambda$ se $\lambda > 0$.

5. **Disequazioni fondamentali con il valore assoluto**. La disequazione $|x| < \lambda$ ha come soluzione
   - l'insieme vuoto se $\lambda \leq 0$;
   - l'intervallo $]-\lambda, \lambda[$ se $\lambda > 0$.

   Similmente, la disequazione $|x| > \lambda$ ha come soluzione
   - $\mathbb{R}$ se $\lambda < 0$;
   - $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ se $\lambda = 0$;
   - $]-\infty, -\lambda[\cup]\lambda, +\infty[$ se $\lambda > 0$.

Equazioni e disequazioni con valori assoluti

1. **Equazioni con un valore assoluto**. Per risolvere un'equazione del tipo
$$|f(x)| = g(x)$$
si possono risolvere i due sistemi
$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$$
e poi considerare l'*unione* delle soluzioni dei due sistemi. Si intende che per risolvere *ciascuno* dei due sistemi occorre trovare quei valori di x che verificano *sia* la disuguaglianza al primo posto, *sia* l'uguaglianza al secondo posto.

2. **Equazioni con più valori assoluti**. Se un'equazione contiene più termini con il valore assoluto, allora occorre distinguere più casi. Se l'equazione è ad esempio del tipo
$$|f(x)| + |g(x)| = 8,$$
allora i casi da considerare sono 4 a seconda del segno di $f(x)$ e $g(x)$. Ci si riconduce pertanto ai 4 sistemi
$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) + g(x) = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \\ f(x) - g(x) = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) \geq 0 \\ -f(x) + g(x) = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \\ -f(x) - g(x) = 8. \end{cases}$$
Anche in questo caso, risolti i 4 sistemi, occorre fare l'unione delle soluzioni per ottenere le soluzioni dell'equazione iniziale.

   Lo stesso tipo di impostazione funziona anche se al posto della somma c'è la sottrazione, il prodotto, la divisione, e così via.

3. **Equazioni con valori assoluti inscatolati**. Se un'equazione è del tipo
$$||f(x)| + g(x)| = h(x)$$
si può prima trasformarla nell'unione dei due sistemi
$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ |f(x) + g(x)| = h(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) < 0 \\ |-f(x) + g(x)| = h(x). \end{cases}$$
A questo punto le due equazioni che compaiono nei due sistemi contengono a loro volta dei valori assoluti, e quindi vanno risolte *a parte* trasformandole a loro volta in sistemi.

4. **Disequazioni con valori assoluti**. Le disequazioni con valori assoluti si trattano in modo del tutto analogo, trasformandole in unione di sistemi. L'unica differenza è che invece di trovarsi con dei sistemi misti (cioè con equazioni e disequazioni) ci si ritrova con sistemi di sole disequazioni.

5. **Achtung!** Quello appena descritto è semplicemente un modo *sistematico* di procedere che permette di affrontare tutte le situazioni. Spesso però è possibile, ragionando opportunamente *caso per caso*, prendere delle scorciatoie che permettono di ridurre i casi da considerare o i calcoli da fare. Tuttavia nessun manuale può insegnare a riconoscere tali scorciatoie, ma solo l'esperienza.

Potenze 1 – Esponente intero e razionale

1. **Esponente intero positivo**. Sia a un numero *reale qualunque*, e sia n un *intero positivo*. Si definisce a^n come il prodotto di n fattori, tutti uguali ad a. Pertanto

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}.$$

2. **Esponente intero negativo**. Sia a un numero *reale* $\neq 0$, e sia n un *intero positivo*. Si pone

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

3. **Esponente nullo**. Sia a un numero *reale* $\neq 0$. Si pone

$$a^0 = 1.$$

4. **Radice n-esima**. Sia n un *intero positivo*. Si hanno allora due casi.

   - Se n è *dispari* ed a è un numero *reale qualunque*, si dice *radice n-esima* di a l'unico numero reale x tale che $x^n = a$.
   - Se n è *pari* ed a è un numero *reale* ≥ 0, si dice *radice n-esima* di a l'unico numero reale $x \geq 0$ tale che $x^n = a$.

   In entrambi i casi scrive

$$x = \sqrt[n]{a}.$$

5. **Achtung!** Le radici di indice dispari hanno senso qualunque sia il segno dell'argomento; inoltre la radice ha lo stesso segno dell'argomento.

   Le radici di indice pari hanno senso solo se l'argomento è ≥ 0, ed hanno come risultato sempre un numero ≥ 0.

6. **Sembra facile!** Sia $a \geq 0$. Nel definire $\sqrt{a}$, abbiamo *assunto* che esista un unico $x \geq 0$ tale che $x^2 = a$. L'unicità è abbastanza semplice da dimostrare; l'esistenza invece non è per niente banale, e si basa profondamente sulle proprietà dei numeri reali.

   Stesso discorso vale per le radici n-esime.

7. **Esponente razionale**. Sia a un numero *reale positivo*, e siano m ed n *interi*, con $n \neq 0$. Si pone allora

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

   Se $m/n > 0$ si può estendere la definizione al caso $a = 0$ ponendo $0^{m/n} = 0$.

8. **Achtung!** La formula $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ *avrebbe* senso anche per valori $a < 0$ purché n sia dispari o m sia pari. Tuttavia per $a < 0$ si produrrebbero dei fenomeni strani, come il seguente:

$$(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2, \qquad (-8)^{2/6} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

   Per questo motivo il caso $a < 0$ non viene considerato.

Potenze 2 – Esponente reale

1. **Esponente reale**. Sia a un numero *reale positivo*, e sia b un numero *reale qualunque.* Allora è possibile definire in modo univoco un numero reale a^b in modo che siano verificate le proprietà di cui ai tre punti successivi (uguaglianze e disuguaglianze).

2. **Proprietà algebriche delle potenze**. Siano a e b numeri *reali positivi.* Allora

   - $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ per ogni x, y reali;
   - $(a^x)^y = a^{xy}$ per ogni x, y reali;
   - $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ per ogni x reale.

   Dalla prima segue poi facilmente che

   - $a^{x-y} = a^x/a^y$ per ogni x, y reali.

3. **Disuguaglianze a base fissa ed esponente variabile**. Siano x e y numeri reali. Allora

   - se $a > 1$ si ha che
   $$x > y \implies a^x > a^y;$$
   - se $0 < a < 1$, allora
   $$x > y \implies a^x < a^y.$$

4. **Disuguaglianze a base variabile ed esponente fisso**. Siano a e b numeri reali positivi. Allora

   - se $x > 0$ si ha che
   $$b > a \implies b^x > a^x;$$
   - se $x < 0$, allora
   $$b > a \implies b^x < a^x.$$

5. **Proprietà dei radicali**. Per ricordare le proprietà dei radicali, basta pensarli come potenze frazionarie (dimenticando per un attimo il segno dell'argomento). Pertanto
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{1/n}\right)^{1/m} = a^{1/nm} = \sqrt[nm]{a};$$
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{1/n} \cdot b^{1/n} = (ab)^{1/n} = \sqrt[n]{ab}.$$

6. **Sembra facile!** Se l'esponente b è intero o razionale, la definizione di a^b è quella data nella scheda precedente. Se l'esponente b non è un numero razionale, la definizione stessa di a^b non è per niente banale, ma coinvolge profondamente le proprietà dei numeri reali.

7. **Achtung!** Si noti che nel definire a^b per ogni b reale si richiede che $a > 0$. Se $b > 0$ si può estendere la definizione al caso $a = 0$ ponendo $0^b = 0$. Anche con questa estensione si mantengono le proprietà analoghe a quelle enunciate ai punti precedenti.

8. **Achtung!** Non vi sono formule semplici per esprimere
$$a^x \pm a^y, \qquad \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}, \qquad a^x \pm b^x, \qquad \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[m]{a}.$$

Equazioni con radici

1. **Equazioni con una radice quadrata**. Una equazione del tipo

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$

è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \boxed{f(x) \geq 0} \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

dove

- la disequazione al primo posto ricerca i valori di x per i quali la radice ha senso;
- la disequazione al secondo posto ricerca i valori di x per i quali il termine a destra nell'equazione iniziale è ≥ 0 (per gli altri valori di x l'uguaglianza iniziale è sicuramente falsa in quanto a sinistra c'è una quantità ≥ 0, a destra una quantità < 0);
- l'equazione al terzo posto deriva da quella iniziale facendo i quadrati (operazione che conduce ad una equazione *equivalente* purché i termini che si elevano al quadrato siano *entrambi positivi*).

Nel risolvere tale sistema possiamo *ignorare* la prima disequazione (che per questo è stata riquadrata), in quanto segue *automaticamente* dall'equazione al terzo posto.

2. **Equazioni con più radici quadrate**. Una equazione del tipo

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} + h(x)$$

è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \boxed{f(x) \geq 0} \\ \sqrt{g(x)} + h(x) \geq 0 \\ f(x) = \left(\sqrt{g(x)} + h(x)\right)^2. \end{cases}$$

dove il significato delle equazioni e disequazioni che compaiono in tale sistema è analogo al caso precedente. Come prima possiamo *ignorare* la prima disequazione, in quanto segue *automaticamente* dall'equazione al terzo posto.

Ora la disequazione al secondo posto e l'equazione al terzo posto contengono a loro volta delle radici (ma solo una), e quindi vanno risolte *a parte* riapplicando il procedimento.

3. **Radici n-esime di indice pari**. Tutti i discorsi che abbiamo fatto per equazioni con radici quadrate valgono, *mutatis mutandis*, per equazioni con radici di *indice pari.*

4. **Radici n-esime di indice dispari**. Le radici con *indici dispari* si possono eliminare *impunemente* (cioè senza imporre condizioni) elevando a potenze opportune.

Disequazioni con radici

1. **Disequazioni con una radice, caso 1**. Una disequazione del tipo
$$\sqrt{f(x)} < g(x)$$
è equivalente al sistema
$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$
dove
   - la disequazione al primo posto ricerca i valori di x per i quali la radice ha senso;
   - la disequazione al secondo posto ricerca i valori di x per i quali il termine a destra nella disequazione iniziale è ≥ 0 (per gli altri valori di x la disequazione iniziale è sicuramente falsa in quanto a sinistra c'è una quantità ≥ 0, a destra una quantità < 0);
   - la disequazione al terzo posto deriva da quella iniziale facendo i quadrati (operazione che conduce ad una disequazione *equivalente* purché i termini che si elevano al quadrato siano *entrambi positivi*).

2. **Disequazioni con una radice, caso 2**. Una disequazione del tipo
$$\sqrt{f(x)} > g(x)$$
è equivalente all'*unione dei due sistemi*
$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{f(x) \geq 0} \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x). \end{cases}$$
Infatti
   - il primo sistema individua i valori di x per cui la radice ha senso ed il termine a destra della disequazione iniziale è < 0 (in questo caso la disequazione iniziale è automaticamente soddisfatta);
   - il secondo sistema individua i valori di x per cui la radice ha senso ed il termine a destra è ≥ 0: in tal caso è possibile elevare entrambi i membri della disequazione iniziale al quadrato, ottenendo una disequazione equivalente.

   Pertanto per risolvere la disequazione iniziale non resta che risolvere separatamente i due sistemi e poi considerare l'*unione* delle soluzioni. Da notare che nella risoluzione del secondo sistema si può ignorare la prima disequazione (riquadrata), in quanto segue dalla terza.

3. **Disequazioni con più radici**. Il piano per trattare disequazioni con più radici consiste nel ridurre pian piano il numero delle radici presenti mediante opportuni elevamenti al quadrato. Ovviamente per poter fare gli elevamenti occorre imporre delle condizioni, le quali si traducono in sistemi di disequazioni contenenti a loro volta radici.

4. **Radici n-esime**. Per disequazioni con radici n-esime valgono gli stessi discorsi fatti per le equazioni (cioè impunità per n dispari, e analogia con le radici quadrate per n pari).

Logaritmi

1. **Definizione di logaritmo**. Sia $a \in]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$, e sia $b > 0$.

   Allora esiste un unico numero reale x tale che
   $$a^x = b.$$
   Tale x si dice *logaritmo in base* a di x e si indica con
   $$x = \log_a b.$$

2. **Achtung!** La dimostrazione dell'esistenza e dell'unicità di un tale x non è per niente banale, e si basa profondamente sulle proprietà dei numeri reali.

3. **Restrizioni su a e b**. Le richieste su $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ e $b > 0$ sono giustificate dalle seguenti osservazioni:

   - se $a = 1$ e $b \neq 1$, allora non esiste alcun x tale che $a^x = b$;
   - se $a = 1$ e $b = 1$, allora per ogni x si ha che $a^x = b$;
   - se $a \in]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$, ma $b \leq 0$, allora non esiste nessun x tale che $a^x = b$;
   - se $a < 0$ e $b \in \mathbb{R}$, allora non è detto che esista $x \in \mathbb{R}$ tale che $a^x = b$ (si noti che in questo caso a^x non è nemmeno definito per gli x non interi).

4. **Proprietà dei logaritmi** Sia $a \in]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$. Allora

   - $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ per ogni $x > 0$, $y > 0$;
   - $\log_a(x^c) = c \cdot \log_a x$ per ogni $x > 0$ e ogni numero reale c.

   Da queste due proprietà si ricava facilmente che

   - $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$ per ogni $x > 0$, $y > 0$.

   Le proprietà dei logaritmi seguono dalla definizione e dalle corrispondenti proprietà degli esponenziali.

5. **Formula di cambio di base**. Siano a e b in $]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$. Allora per ogni $x > 0$ si ha che
   $$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$
   Grazie a questa formula è possibile calcolare i logaritmi in *qualunque* base, conoscendo unicamente i logaritmi in una *base a scelta*.

6. **Achtung!** Non esistono formule eleganti per esprimere
   $$\log_a(x+y), \qquad \log_a(x-y), \qquad \log_a x \cdot \log_a y, \qquad \log_a x / \log_a y, \qquad (\log_a x)^c.$$

Equazioni e disequazioni con esponenziali

1. **Esponenziale con base maggiore di 1**. Sia $a > 1$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora
   - se $\lambda \leq 0$ abbiamo che $a^x > \lambda$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
   - se $\lambda > 0$ abbiamo che
     * $a^x < \lambda$ per $x \in]-\infty, \log_a \lambda[$;
     * $a^x = \lambda$ per $x = \log_a \lambda$;
     * $a^x > \lambda$ per $x \in]\log_a \lambda, +\infty[$.
2. **Esponenziale con base minore di 1**. Sia $0 < a < 1$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora
   - se $\lambda \leq 0$ abbiamo che $a^x > \lambda$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
   - se $\lambda > 0$ abbiamo che
     * $a^x < \lambda$ per $x \in]\log_a \lambda, +\infty[$;
     * $a^x = \lambda$ per $x = \log_a \lambda$;
     * $a^x > \lambda$ per $x \in]-\infty, \log_a \lambda[$.
3. **Equazione con due esponenziali**. Sia $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Allora abbiamo che
   $$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x).$$
   Questo vuol dire che nel risolvere l'equazione $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ possiamo impunemente eliminare la base a.
4. **Disequazione con due esponenziali**. Consideriamo la disequazione $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.
   Allora
   - se $a > 1$ abbiamo che
     $$a^{f(x)} > a^{g(x)} \iff f(x) > g(x),$$
     cioè si possono eliminare impunemente le basi;
   - se invece $0 < a < 1$, allora
     $$a^{f(x)} > a^{g(x)} \iff f(x) < g(x),$$
     cioè si possono eliminare le basi, a patto di invertire il verso della disequazione.

Equazioni e disequazioni con logaritmi

1. **Logaritmo con base maggiore di 1**. Sia $a > 1$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora
   - $\log_a x < \lambda$ per ogni $x \in]0, a^\lambda[$;
   - $\log_a x = \lambda$ per $x = a^\lambda$;
   - $\log_a x > \lambda$ per $x \in]a^\lambda, +\infty[$.
2. **Logaritmo con base minore di 1**. Sia $0 < a < 1$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora
   - $\log_a x < \lambda$ per ogni $x \in]a^\lambda, +\infty[$;
   - $\log_a x = \lambda$ per $x = a^\lambda$;
   - $\log_a x > \lambda$ per $x \in]0, a^\lambda[$.
3. **Equazione con due logaritmi**. Sia $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Allora l'equazione

   $$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

   è equivalente al sistema

   $$f(x) = g(x) > 0.$$

   Tale sistema è costituito dall'equazione $f(x) = g(x)$ e da una disequazione a scelta tra $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ (grazie all'uguaglianza possiamo scegliere una qualunque delle due).

   Pertanto nel risolvere l'equazione $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ è possibile eliminare i due logaritmi, a patto di imporre le condizioni necessarie alla loro esistenza, e cioè che gli argomenti siano positivi.
4. **Disequazione con due logaritmi**. Consideriamo la disequazione $\log_a f(x) < \log_a g(x)$. Allora
   - se $a > 1$ abbiamo che

     $$\log_a f(x) < \log_a g(x) \iff 0 < f(x) < g(x),$$

     cioè si possono eliminare i logaritmi a patto di imporre le condizioni necessarie alla loro esistenza, contenute in $f(x) > 0$ (si noti come a questo punto la condizione $g(x) > 0$ è automaticamente soddisfatta);
   - se invece $0 < a < 1$, allora bisogna invertire i versi, nel senso che

     $$\log_a f(x) < \log_a g(x) \iff 0 < g(x) < f(x).$$
5. **Achtung!** Si ricorda che $\log_a x$ *non* è definito per $x \leq 0$.

Trigonometria 1 – Definizioni

1. **Circonferenza trigonometrica**. Consideriamo un piano cartesiano con assi x e y, e origine O. Si dice *circonferenza trigonometrica* la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$, costituita da tutti e soli i punti che distano esattamente 1 dall'origine.

2. **Angoli**. Sia P un punto della circonferenza trigonometrica. Allora P è univocamente determinato dall'angolo che il semiasse positivo delle x forma con OP, calcolato in *senso antiorario*. Gli angoli si misurano in *gradi sessagesimali*, con l'accordo che l'*angolo giro* (quello corrispondente a tutta la circonferenza trigonometrica) misura 360°. La misura in gradi sessagesimali si intende definita a meno di multipli di 360°, nel senso che misure $> 360°$ si interpretano come "aver percorso più di un giro", mentre misure negative si interpretano come "girare in senso orario".

3. **Archi**. Sia A il punto in cui il semiasse positivo delle x incontra la circonferenza trigonometrica, e sia P un punto della circonferenza trigonometrica. Allora P è univocamente determinato dalla lunghezza dell'arco che, partendo da A, raggiunge il punto P percorrendo la circonferenza trigonometrica in *senso antiorario*. La lunghezza massima di tale arco è dunque 2π. Analogamente al caso precedente, lunghezze $> 2\pi$ si interpretano come "aver percorso più di un giro", mentre lunghezze negative si interpretano come "girare in senso orario". La lunghezza di tale arco si chiama misura in *radianti* dell'angolo $A\hat{O}P$ ed è, per il discorso appena fatto, definita a meno di multipli di 2π.

4. **Passaggio gradi sessagesimali ↔ radianti**. Per passare dalla misura in gradi sessagesimali a quella in radianti di un angolo, o viceversa, si usa la proporzione
$$(\text{misura in gradi}) : (\text{misura in radianti}) = 360 : 2\pi.$$

5. **Funzioni trigonometriche**. Sia θ un numero reale, e sia P il punto sulla circonferenza trigonometrica determinato dall'arco di lunghezza θ. Si definiscono *coseno* e *seno* di θ, rispettivamente, le coordinate x e y del punto P. Pertanto
$$P = (\cos\theta, \sin\theta).$$
Si definisce *tangente* di θ il rapporto
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$
definito ovviamente solo per quei valori per cui $\cos\theta \neq 0$.

6. **Interpretazione geometrica della tangente**. Sia A il punto in cui il semiasse positivo delle x incontra la circonferenza trigonometrica, e sia r la retta tangente in A alla circonferenza trigonometrica (dunque perpendicolare all'asse x). Sia Q l'intesezione tra r e la retta OP (tale intersezione si trova dalla parte di P o dalla parte di O a seconda del quadrante in cui si trova P). Allora la coordinata y di Q è $\tan\theta$.

7. **Archi o angoli?** Abbiamo visto l'equivalenza tra archi e angoli come metodi per individuare un punto sulla circonferenza trigonometrica. Per convenzione, quando si scrive $\sin 2$ si intende 2 radianti, mentre quando si scrive $\sin 2°$ si intende 2 gradi sessagesimali.

Trigonometria 2 – Formulario

1. **Relazione fondamentale**. Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ si ha che
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

2. **Archi notevoli**. Indichiamo qui accanto le funzioni trigonometriche di alcuni archi notevoli. Ci limitiamo a quelli contenuti nel primo quadrante, visto che usando opportunamente gli archi associati si trovano facilmente le funzioni trigonometriche dei corrispondenti archi negli altri quadranti.

Gradi	Radianti	sin	cos	tan
$0°$	0	0	1	0
$30°$	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
$45°$	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$60°$	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\pi/2$	1	0	N.E.

3. **Archi associati**. Si dicono *archi associati* ad α gli archi del tipo $\pi/2 \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $3\pi/2 \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$. Detto P il punto sulla circonferenza trigonometrica corrispondente ad α, gli archi associati individuano punti che si possono ottenere da P mediante opportune simmetrie (rispetto all'origine, agli assi, alle bisettrici dei quadranti) o rotazioni.

   Sfruttando tali simmetrie si trovano facilmente le relazioni tra le funzioni trigonometriche di α e dei suoi archi associati.

4. **Formule di addizione e sottrazione**.
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

5. **Formule di duplicazione**.
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

6. **Formule prodotto → somma (formule di Werner)**.
$$\begin{aligned} 2\sin\alpha\cdot\cos\beta &= \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta), \\ 2\cos\alpha\cdot\cos\beta &= \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta), \\ 2\sin\alpha\cdot\sin\beta &= -\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta). \end{aligned}$$

7. **Formule somma → prodotto (formule di Prostaferesi)**.
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

8. **Espressioni di** $\sin\alpha$ **e** $\cos\alpha$ **in funzione di** $\tan(\alpha/2)$. Posto $t = \tan(\alpha/2)$ si ha che
$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Equazioni trigonometriche

1. **Equazione fondamentale con il seno**. L'equazione $\sin x = \lambda$ ha, nell'intervallo $[0, 2\pi[$,
   - nessuna soluzione se $\lambda < -1$;
   - l'unica soluzione $x = 3\pi/2$ se $\lambda = -1$;
   - due soluzioni se $-1 < \lambda < 1$, corrispondenti a punti della circonferenza trigonometrica simmetrici rispetto all'asse y;
   - l'unica soluzione $x = \pi/2$ se $\lambda = 1$;
   - nessuna soluzione se $\lambda > 1$.

   Geometricamente tale equazione corrisponde a trovare i punti della circonferenza trigonometrica che hanno ordinata λ.

   L'insieme di tutte le soluzioni reali dell'equazione si ottiene traslando di multipli interi di 2π le soluzioni trovate nell'intervallo $[0, 2\pi[$.

2. **Equazione fondamentale con il coseno**. L'equazione $\cos x = \lambda$ ha, nell'intervallo $[0, 2\pi[$,
   - nessuna soluzione se $\lambda < -1$;
   - l'unica soluzione $x = \pi$ se $\lambda = -1$;
   - due soluzioni se $-1 < \lambda < 1$, simmetriche rispetto a 2π (cioè del tipo α, $2\pi - \alpha$);
   - l'unica soluzione $x = 0$ se $\lambda = 1$;
   - nessuna soluzione se $\lambda > 1$.

   Geometricamente tale equazione corrisponde a trovare i punti della circonferenza trigonometrica che hanno ascissa λ.

   L'insieme di tutte le soluzioni reali dell'equazione si ottiene traslando di multipli interi di 2π le soluzioni trovate nell'intervallo $[0, 2\pi[$.

3. **Equazione fondamentale con la tangente**. L'equazione $\tan x = \lambda$ ha sempre un'unica soluzione nell'intervallo $]-\pi/2, \pi/2[$, qualunque sia il valore di λ.

   L'insieme di tutte le soluzioni reali dell'equazione si ottiene traslando di multipli interi di π le soluzioni trovate nell'intervallo $]-\pi/2, \pi/2[$.

4. **Equazioni con due funzioni trigonometriche**. Un'equazione del tipo $\sin f(x) = \sin g(x)$ può essere trasformata, grazie alle formule di Prostaferesi, nell'equazione

   $$\sin f(x) - \sin g(x) = 2 \cos \frac{f(x) + g(x)}{2} \cdot \sin \frac{f(x) - g(x)}{2} = 0.$$

   Da qui con semplici calcoli si dimostra che le soluzioni dell'equazione iniziale sono l'unione delle soluzioni delle due equazioni

   $$f(x) = g(x) + 2k\pi, \qquad f(x) = \pi - g(x) + 2k\pi,$$

   al variare di $k \in \mathbb{Z}$. In modo del tutto analogo si trasforma un'equazione con due coseni.

   Ricordiamo anche che $\sin \theta = \cos(\pi/2 - \theta)$. In questo modo, se necessario, si possono trasformare seni in coseni, e viceversa.

Disequazioni trigonometriche

In questa scheda per ragioni di spazio trattiamo solo disequazioni con il $>$. Tuttavia il procedimento fondamentale, cioè guardare la circonferenza trigonometrica, si adatta facilmente alle disequazioni con il $<$.

1. **Disequazione fondamentale con il seno**. Consideriamo la disequazione $\sin x > \lambda$. Geometricamente tale disequazione corrisponde a trovare i punti della circonferenza trigonometrica che hanno ordinata $> \lambda$. Pertanto, nell'intervallo $[0, 2\pi]$, la soluzione è

   - tutto l'intervallo se $\lambda < -1$;
   - tutto l'intervallo tranne $x = 3\pi/2$ se $\lambda = -1$;
   - l'unione $[0, x_1[\cup]x_2, 2\pi]$ se $-1 < \lambda < 0$, dove x_1 e x_2 (con $x_1 < x_2$) sono le due soluzioni in $[\pi, 2\pi]$ dell'equazione $\sin x = \lambda$;
   - l'intervallo $]x_1, x_2[$ se $0 \leq \lambda < 1$, dove x_1 e x_2 (con $x_1 < x_2$) sono le due soluzioni in $[0, \pi]$ dell'equazione $\sin x = \lambda$;
   - l'insieme vuoto se $\lambda \geq 1$.

   L'insieme di tutte le soluzioni reali della disequazione si ottiene traslando di multipli interi di 2π le soluzioni trovate nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

2. **Disequazione fondamentale con il coseno**. Consideriamo la disequazione $\cos x > \lambda$. Geometricamente tale disequazione corrisponde a trovare i punti della circonferenza trigonometrica che hanno ascissa $> \lambda$. Pertanto, nell'intervallo $[0, 2\pi]$, la soluzione è

   - tutto l'intervallo se $\lambda < -1$;
   - tutto l'intervallo tranne $x = \pi$ se $\lambda = -1$;
   - l'unione $[0, x_1[\cup]x_2, 2\pi]$ se $-1 < \lambda < 1$, dove x_1 e x_2 (con $x_1 < x_2$) sono le due soluzioni in $[0, 2\pi[$ dell'equazione $\cos x = \lambda$;
   - l'insieme vuoto se $\lambda \geq 1$.

   L'insieme di tutte le soluzioni reali della disequazione si ottiene traslando di multipli interi di 2π le soluzioni trovate nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

3. **Disequazione fondamentale con la tangente**. L'equazione $\tan x > \lambda$ ha sempre come soluzione l'intervallo $]x_1, \pi/2[$, dove x_1 è l'unica soluzione in $]-\pi/2, \pi/2[$ dell'equazione $\tan x = \lambda$.

   L'insieme di tutte le soluzioni reali della disequazione si ottiene traslando di multipli interi di π le soluzioni trovate nell'intervallo $]-\pi/2, \pi/2[$.

4. **Disequazioni con due funzioni trigonometriche**. La disequazione $\sin f(x) > \sin g(x)$ può essere trasformata, grazie alle formule di Prostaferesi, in una disequazione che richiede soltanto lo studio del segno di un prodotto (si veda la scheda sulle equazioni trigonometriche).

5. **Achtung!** Non ha alcun senso ricordare meccanicamente le conclusioni di questa scheda. La cosa da ricordare è l'interpretazione dei vari risultati sulla circonferenza trigonometrica.

Risoluzione di triangoli

1. **Notazione standard**. In un triangolo di solito:
   - A, B e C sono i vertici, e α, β, γ sono i corrispondenti angoli;
   - a, b, c sono le lunghezze dei lati opposti ad A, B, C, rispettivamente, $p = (a+b+c)/2$ è il semiperimetro, S è l'area;
   - r ed R sono, rispettivamente, i raggi della circonferenza inscritta e circoscritta.
2. **Formula di Erone per l'area**. Noti i tre lati, si può ricavare l'area di un triangolo mediante la *formula di Erone*
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$
3. **Formula trigonometrica per l'area**. Noti due lati e l'angolo compreso, si può ricavare l'area di un triangolo mediante le formule
$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ca\sin\beta.$$
4. **Teorema di Carnot**. Noti due lati e l'angolo compreso, si può ricavare il terzo lato mediante la formula
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$
5. **Teorema dei seni**. In un triangolo, il rapporto tra un lato ed il seno dell'angolo opposto è costante, ed uguale al doppio del raggio della circonferenza circoscritta:
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$
6. **Risoluzione di un triangolo dati due lati e l'angolo compreso**. Si ricava la lunghezza del terzo lato mediante il teorema di Carnot, poi i seni degli altri angoli mediante il teorema dei seni.
7. **Risoluzione di un triangolo dati un lato e i due angoli adiacenti**. Si ricava l'angolo rimanente usando che la somma degli angoli è di 180°. Si calcolano poi gli altri lati mediante il teorema dei seni.
8. **Risoluzione di un triangolo dati tre lati**. Si ricava l'area con la formula di Erone, poi i seni degli angoli mediante la formula trigonometrica per l'area. In alternativa, si calcolano direttamente i coseni degli angoli mediante il Teorema di Carnot.
9. **Achtung!** Noto il seno dell'angolo di un triangolo, non è così immediato ricavare la misura dell'angolo. Infatti ci sono sempre due angoli, uno acuto e uno ottuso, che hanno lo stesso seno (almeno se il seno è $\neq 1$). Per sapere di che tipo è l'angolo in A, basta fare un semplice controllo
   - se $a^2 < b^2 + c^2$, l'angolo in A è acuto;
   - se $a^2 = b^2 + c^2$, l'angolo in A è retto;
   - se $a^2 > b^2 + c^2$, l'angolo in A è ottuso.

   Con il coseno, al contrario, il problema non si pone: infatti tra 0 e π vi è un solo angolo con un dato coseno.

Geometria analitica 1

1. **Punti e coordinate**. Ogni punto del piano cartesiano è rappresentato univocamente da una coppia (x, y) di numeri reali, detti *coordinate*. La coordinata x si dice *ascissa*, la coordinata y si dice *ordinata*.

2. **Distanza tra due punti**. La *distanza* tra il punto (x_1, y_1) ed il punto (x_2, y_2) è data dalla formula
$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

3. **Equazione della retta**. Una retta *non verticale* è costituita da tutti i punti (x, y) che soddisfano la relazione
$$y = mx + n.$$
   Il numero reale m si dice *coefficiente angolare*, mentre il numero reale n si dice *intercetta*.

   Due rette coincidono se e solo se hanno lo stesso m e lo stesso n.

4. **Significato geometrico di m ed n**. Il coefficiente angolare m è la tangente dell'angolo che la retta forma con l'asse x (misurato in senso antiorario a partire dalla direzione positiva dell'asse x), ed è pertanto legato alla pendenza della retta.

   L'intercetta n è l'ordinata del punto in cui la retta interseca l'asse y.

5. **Rette orizzontali e verticali**. Le rette *orizzontali*, cioè parallele all'asse x, hanno equazione $y = a$, dunque hanno coefficiente angolare nullo (e quindi pendenza nulla).

   Le rette *verticali*, cioè parallele all'asse y, hanno equazione $x = a$. Tali rette non rientrano nella forma precedentemente descritta.

6. **Rette parallele e perpendicolari**. Due rette non verticali $y = m_1x + n_1$ e $y = m_2x + n_2$ sono
   - *parallele* se e solo se $m_1 = m_2$;
   - *perpendicolari* se e solo se $m_1 = -1/m_2$.

7. **Altro modo di scrivere l'equazione di una retta**. L'equazione di una retta si può anche scrivere nella forma
$$ax + by + c = 0.$$
   Tale scrittura
   - è equivalente alla precedente se $b \neq 0$ (in tal caso infatti $m = -a/b$, $n = -c/b$);
   - ha il *vantaggio* di comprendere anche le rette verticali (quelle con $b = 0$);
   - ha lo *svantaggio* che i parametri a, b, c
     - non hanno un significato geometrico immediato;
     - non possono variare liberamente: infatti almeno uno tra a e b deve essere diverso da zero;
     - non sono univocamente determinati dalla retta: infatti due rette con parametri in proporzione coincidono.

Geometria analitica 2

1. **Fascio di rette passanti per un punto**. Sia $P = (x_0, y_0)$ un punto del piano. Allora
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
descrive, al variare di $m \in \mathbb{R}$, l'equazione di tutte le rette non verticali passanti per P. Il parametro m rappresenta il coefficiente angolare.

2. **Distanza di un punto da una retta**. La distanza del punto (x_0, y_0) dalla retta di equazione $ax + by + c = 0$ è data dalla formula
$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

3. **Equazione della circonferenza**. Dati un punto $C = (x_0, y_0)$ ed un numero reale $r > 0$, la circonferenza di centro C e raggio r ha equazione
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$
L'equazione di una circonferenza si può sempre mettere nella forma
$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$
Si noti che il coefficiente di x^2 e y^2 è lo stesso (dunque si può supporre 1 a meno di dividere), mentre manca il termine in xy.

   È immediato ricavare x_0, y_0, r, in funzione di a, b, c, e viceversa.

4. **Esterno ed interno di una circonferenza**. I punti interni al cerchio delimitato dalla circonferenza sono quelli che verificano la relazione di cui al punto precedente con il minore al posto dell'uguale. I punti esterni sono quelli che verificano la relazione di cui al punto precedente con il maggiore al posto dell'uguale.

5. **Equazione della parabola**. Una *parabola* con asse parallelo all'asse y è costituita da tutti i punti (x, y) che soddisfano un'equazione del tipo
$$y = ax^2 + bx + c,$$
con $a \neq 0$. Dal segno di a dipende come è messa la parabola:
   - se $a > 0$ la parabola è rivolta verso l'alto, cioè ha il vertice in basso;
   - se $a < 0$ la parabola è rivolta verso il basso, cioè ha il vertice in alto.

6. **Semipiani**. I punti che verificano la relazione $y > mx + n$ sono i punti del semipiano che sta *al di sopra* della retta $y = mx + n$. Analogamente $y < mx + n$ è la relazione soddisfatta dai punti che stanno nel semipiano *al di sotto* della retta.

7. **Più in generale**. L'insieme dei punti (x, y) tali che $y > f(x)$ è costituito dai punti che stanno al di sopra del grafico della funzione f. Analogamente la relazione $y < f(x)$ descrive tutti e soli i punti del piano cartesiano che stanno al di sotto del grafico di f.