Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Elementi di Calcolo delle Variazioni – A.A. 2016/17

Programma per argomenti

Aggiornato al 15 settembre 2016

Prerequisiti

- *Calcolo differenziale ed integrale in una e più variabili*: sostanzialmente tutto, in particolare liminf/limsup, studi di funzione, derivate e derivate parziali, integrali in una o più variabili, equazioni differenziali, curve, forme differenziali e formula di Gauss-Green, successioni di funzioni e relativi teoremi di passaggio al limite.
- *Algebra Lineare e Topologia generale*: spazi vettoriali, spazi affini, applicazioni lineari, forme quadratiche, prodotti scalari, basi ortonormali, linguaggio topologico standard.
- *Elementi di teoria della misura e analisi in infinite dimensioni*: spazi metrici, spazi di Hilbert, basi Hilbertiane, misura di Lebesgue e relativi teoremi di passaggio al limite, spazi L^p in una variabile.

Metodo indiretto

- Funzionali integrali.
- Variazione prima di un funzionale.
- Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni e lemma DBR (Du Bois Reymond) per funzioni continue.
- Equazione di Eulero: forme classiche integrali e differenziali, forma DBR (integrata), forma Erdmann (integrale primo per il caso autonomo). Generalizzazione a funzionali dipendenti da più funzioni o da derivate successive.
- Nascita delle condizioni al bordo per le equazioni di Eulero: condizioni di Dirichlet, di Neumann e periodiche.
- Condizioni al bordo per problemi point-to-curve (transversality).
- Minimalità via convessità e via funzionale ausiliario.
- Varie nozioni di punto di minimo: globale, locale forte, locale debole, direzionale.
- Variazione seconda di un funzionale.
- Funzionali quadratici: equazione di Jacobi e punti coniugati.
- Condizioni necessarie affinché un funzionale quadratico sia sempre maggiore o uguale a zero.

- Condizioni sufficienti affinché un funzionale quadratico sia sempre maggiore o uguale a zero: condizioni di Legendre e Jacobi rinforzate. Stretta positività sotto queste ipotesi.
- Condizione necessarie/sufficienti affinché un estremale sia un punto di minimo debole.
- Eccesso di Weierstrass.
- Condizione necessaria affinché un estremale sia punto di minimo locale forte: condizione di Weierstrass.
- Calibrazioni: teoria generale, esempi classici, caso delle value functions, interpretazione del caso convesso in termini di calibrazione.
- Campi di estremali (campi di Weierstrass) e relative slope functions. Imbedding theorem.
- L'esistenza di un campo di Weierstrass implica la formula di rappresentazione di Weierstrass: dimostrazione alla Hilbert (via calibrazioni) ed alla Weierstrass.
- Condizioni sufficienti affinché un estremale sia un punto di minimo forte.
- Problemi di minimo vincolati: moltiplicatori di Lagrange.
- Problemi variazionali in più variabili: integrale di Dirichlet e Laplaciano, equazione di Eulero in forma di divergenza, derivata normale e condizioni di Neumann, esempi di equazioni ellittiche semilineari viste come equazioni di Eulero.

Metodo diretto

- Compattezza, semicontinuità e teorema di Weierstrass in uno spazio munito solo di una nozione di convergenza.
- Richiami sugli spazi di Hilbert: basi Hilbertiane, componenti, continuità forte della norma, non compattezza forte delle palle in dimensione infinita.
- Convergenza debole negli spazi di Hilbert (separabili): equivalenza con la convergenza delle componenti, compattezza debole delle palle e semicontinuità della norma.
- Spazi di Sobolev in dimensione uno: definizione W (con le derivate deboli) e definizione H (come completamento). Hölderianità delle funzioni di Sobolev.
- Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni e lemma DBR per funzioni integrabili secondo Lebesgue.
- Road map del metodo diretto nel calcolo delle variazioni: formulazione debole, compattezza, semicontinuità, regolarità (passo iniziale e bootstrap).
- Esempi di teoremi di compattezza e/o semicontinuità in spazi di funzioni: ruolo delle ipotesi di crescita e di convessità rispetto alla derivata.
- Convergenza debole in L^p e compattezza per funzionali con crescita p rispetto alla derivata.
- Semicontinuità debole di un funzionale integrale con integranda convessa dipendente dalla sola derivata.

Rilassamento

- Esempi di problemi di minimo senza soluzione.
- Definizione di funzionale rilassato e di inviluppo semicontinuo. Recovery sequences.
- L'estremo inferiore di un funzionale e del suo rilassato coincidono. Stabilità del rilassato rispetto a perturbazioni continue.
- Lemma del sottoinsieme denso in energia.
- Estensione per rilassamento di un funzionale ad un ambiente più generale.
- Convessificata di una funzione reale e suo ruolo nel calcolo del rilassato di un funzionale integrale con integranda dipendente dalla sola derivata.

Gamma convergenza

- Definizione di Gamma limite, Gamma limsup e Gamma liminf e loro semicontinuità. Disuguaglianza del liminf e del limsup. Recovery sequences.
- Rapporti tra Gamma convergenza, convergenza puntuale/uniforme, rilassamento.
- Gamma limite di successioni equicoercive. Convergenza dei minimi e dei punti di minimo.
- Stabilità del Gamma limite rispetto a perturbazioni continue. Ruolo del lemma del sottoinsieme denso in energia nello stabilire la disuguaglianza del limsup.
- Dimostrazione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange in dimensione finita mediante Gamma convergenza (penalizzazione del vincolo).

Problemi ed esempi classici

- Problemi variazionali classici: brachistocrona, minimizzazione del perimetro ad area fissata, superficie di rotazione di area minima, catenaria (heavy chain).
- Rilassamento e saturazione del vincolo per problemi vincolati.
- Esempi classici: geodetiche nello spazio, sul cilindro, sulla sfera, su superfici.
- Esempi classici: problemi con ostacolo, sulla funzione e sulla derivata.
- Esempio classico di Gamma convergenza: problemi con parametri piccoli che inducono effetti di linearizzazione.
- Esempio classico di Gamma convergenza: problemi con passaggio dal discreto al continuo, dal rapporto incrementale alla derivata.
- Esempio classico di Gamma convergenza: problemi di omogenizzazione di coefficienti periodici, sulla funzione e sulla derivata. Problema di cella.
- Esempio classico di Gamma convergenza: problemi che portano all'introduzione del funzionale di Modica-Mortola.