

Analisi Matematica 2 – A.A. 2017/18

Programma per argomenti

Aggiornato al 9 settembre 2017

Preliminari/Prerequisiti

- Tutto il percorso, in particolare saper disegnare insiemi del piano descritti mediante equazioni e/o disequazioni e saper risolvere sistemi di equazioni.
- Tutto il corso di Analisi Matematica 1 (studi di funzione, limiti, calcolo integrale, equazioni differenziali).
- Tutto il corso di Algebra Lineare (vettori, geometria analitica, applicazioni lineari, matrici, forme quadratiche).

Calcolo differenziale in più variabili

- Lo spazio \mathbb{R}^n . Vettori e operazioni tra vettori. Norma, distanza, prodotto scalare.
- Funzioni di più variabili e loro grafico. Visualizzazione del grafico per funzioni di due variabili: linee di livello e restrizione alle rette (o curve) passanti per un punto.
- Elementi di topologia in \mathbb{R}^n . Limiti e continuità per funzioni di più variabili. Relazione tra il limite ed il limite delle restrizioni.
- Limiti all'infinito per funzioni di più variabili.
- Derivate parziali e direzionali per una funzione di più variabili e loro significato geometrico.
- Differenziale per funzioni di più variabili e sua interpretazione geometrica in termini di (iper)piano tangente al grafico. Relazione tra le derivate direzionali e le derivate parziali per una funzione differenziabile. Gradiente e suo significato geometrico. Teorema del differenziale totale.
- Derivate successive per funzioni di più variabili. Teorema di inversione dell'ordine di derivazione. Formula di Taylor in due o più variabili, con resto di Peano e di Lagrange.
- Massimi e minimi locali e globali per funzioni di più variabili. Se in un punto di massimo o minimo interno una funzione è differenziabile, allora il suo gradiente si annulla.
- Richiami sulle forme quadratiche in più variabili: nozione di forma definita positiva e definita negativa. Criteri per stabilire la segnatura.
- Matrice Hessiana e comportamento locale di una funzione in un intorno di un punto stazionario. Convessità e concavità in più variabili.

- Insieme compatti in \mathbb{R}^n . Teorema di Weierstrass per funzioni di più variabili. Generalizzazioni del teorema di Weierstrass nel caso di insiemi non limitati.
- Massimi e minimi vincolati: metodo delle linee di livello.
- Massimi e minimi vincolati: metodo di parametrizzazione del vincolo.
- Massimi e minimi vincolati: metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
- Calcolo differenziale per funzioni da \mathbb{R}^n ad \mathbb{R}^m . Matrice Jacobiana.
- Derivazione di funzioni composte.

Calcolo integrale in più variabili

- Integrale di Riemann per funzioni di due o più variabili e suo significato geometrico/fisico in dimensione due/tre.
- Formula di riduzione di un integrale doppio a due integrali semplici mediante sezioni.
- Integrali tripli: formule di riduzione per sezioni e per colonne.
- Formula di riduzione per integrali in dimensione qualunque.
- Sfruttamento delle simmetrie per semplificare il calcolo di integrali multipli.
- Calcolo di aree, volumi, baricentri, momenti d'inerzia mediante integrali doppi e tripli.
- Coordinate polari nel piano. Coordinate cilindriche e sferiche nello spazio. Utilizzo delle coordinate polari e sferiche per il calcolo di integrali multipli.
- Formula generale per il cambio di variabili negli integrali multipli.
- Solidi di rotazione. Teorema di Guldino per il volume dei solidi di rotazione.
- Integrali impropri in più variabili: definizioni e studio della convergenza.
- Integrali dipendenti da parametro: continuità e differenziabilità.

Curve, superfici, calcolo vettoriale

- Curve: definizione. Curve chiuse e semplici. Vettore, versore e retta tangente.
- Lunghezza di una curva: definizione e calcolo.
- Integrali curvilinei (integrale di una funzione lungo una curva).
- Forme differenziali.
- Integrale di una forma differenziale lungo una curva. Forme differenziali esatte e potenziali.
- Insiemi connessi, convessi, stellati, semplicemente connessi. Forme differenziali chiuse. Relazioni tra forme differenziali chiuse ed esatte.

- Superfici: definizioni, versore normale, piano tangente.
- Area di una superficie: definizione e calcolo.
- Teorema di Guldino per il calcolo dell'area di una superficie di rotazione.
- Integrali superficiali (integrale di una funzione su una superficie).
- Operatori differenziali: divergenza, rotore, Laplaciano, gradiente. Relazioni tra gli operatori differenziali.
- Orientazione di una superficie e del suo eventuale bordo.
- Formula di Gauss-Green (teorema della divergenza) ed applicazioni.
- Formula di Stokes (teorema del rotore) ed applicazioni.

Spazi metrici

- Distanze e spazi metrici. Nozione di convergenza e topologia in uno spazio metrico.
- Norme e spazi di Banach. Equivalenza di norme in dimensione finita.
- Prodotti scalari e spazi di Hilbert.
- Continuità e uniforme continuità in spazi metrici.
- Limitatezza e totale limitatezza. Caratterizzazione della compattezza in spazi metrici.
- Teorema delle contrazioni.
- Completezza, esistenza ed unicità del completamento, teorema di estensione per funzioni uniformemente continue.

Varietà

- Teorema delle funzioni implicite (in codimensione uno ed in codimensione arbitraria).
- Teorema della funzione inversa. Teorema della mappa aperta.
- Metodo dei moltiplicatori di Lagrange (in codimensione uno e codimensione arbitraria): dimostrazioni mediante esplicitazione del vincolo, teorema della mappa aperta, penalizzazione del vincolo.

Successioni e serie di funzioni

- Convergenza puntuale e uniforme. Interpretazione in termini di spazio metrico.
- Teoremi di scambio (del limite, della derivata, dell'integrale).
- Completezza dello spazio delle funzioni continue.
- Teoremi di convergenza uniforme sotto ipotesi di monotonia.

- Serie di funzioni e convergenza totale.
- Serie di potenze: raggio di convergenza, formula per determinarlo e comportamento negli estremi (teorema di Abel).
- Serie di Taylor e funzioni analitiche. Analiticità delle funzioni elementari. Tecniche per il calcolo della somma di alcune serie di potenze.
- Teorema di Ascoli-arzelà.

Equazioni differenziali

- Teorema di esistenza ed unicità per equazioni differenziali (via punto fisso).
- Teorema di sola esistenza per equazioni differenziali (via problemi approssimanti).
- Studio qualitativo delle soluzioni di un'equazione differenziale.
- Soprasoluzioni e sottosoluzioni.
- Metodi energetici per lo studio di equazioni differenziali del second'ordine.
- Sistemi di equazioni differenziali.
- Punti stazionari e studio della loro stabilità mediante linearizzazione.

Appendice di teoria della misura

- Sigma-algebra, misura su sigma-algebra, misura esterna, misura vettoriale.
- Insiemi misurabili alla Caratheodory.
- Costruzione di misure: metodo I e metodo II. Misura di Lebesgue e misure di Hausdorff.
- Misurabilità dei Boreliani ed additività della misura sui distanti. Esempio di Vitali.
- Funzioni misurabili. Definizione di integrale.
- Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale: Beppo Levi, Fatou, convergenza dominata.
- Continuità e derivabilità di integrali dipendenti da parametro.