

A.A. 2017/2018
Corso di Analisi Matematica 2

Stampato integrale delle lezioni

(Volume 2)

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 049. Definizione di curva e suo sostegno. Vettore e retta tangente. Speed e velocity. Curve chiuse e semplici. Strategie per dimostrare la semplicità. Disegno di una curva piana.	7
Lezione 050. Definizione di lunghezza di una curva e di curva rettificabile. Le curve Lipschitziane sono rettificabili. Esempi di curve di lunghezza infinita. Discussione dell'indipendenza della lunghezza dalla parametrizzazione, sia nel caso regolare, sia nel caso solo continuo. Enunciato della formula per il calcolo della lunghezza nel caso regolare.	13
Lezione 051. Integrali di funzioni vettoriali: stime dall'alto e dal basso. Dimostrazione della formula per la lunghezza delle curve regolari. Esempi di applicazione.	19
Lezione 052. Integrali curvilinei: notazioni, significato geometrico, definizione (alla Darboux ed alla Riemann), formula per il calcolo nel caso regolare. Baricentri di curve.	26
Lezione 053. Definizione di forma differenziale e di campo di vettori. Integrale di una forma differenziale su una curva: definizione ed interpretazione fisica. Different comportamento dell'integrale curvilineo di una forma e di una funzione rispetto a riparametrizzazioni della curva.	31
Lezione 054. Forme differenziali esatte e chiuse. Esattezza implica chiusura. L'integrale di una forma esatta lungo una curva è la differenza tra i valori di una primitiva agli estremi. Caratterizzazione dell'esattezza in termini di integrali lungo curve.	37
Lezione 055. Insiemi convessi, stellati, connessi, semplicemente connessi. Caratterizzazioni della semplice connessione e definizione di omotopia. Le forme chiuse sugli aperti stellati sono esatte.	43
Lezione 056. L'integrale di una forma chiusa su due curve omotope con gli stessi estremi coincide. Esempio di forma differenziale chiusa ma non esatta. Come testare l'esattezza di una forma chiusa in un aperto non semplicemente connesso. . .	48
Lezione 057. Quattro strategie per il calcolo dell'integrale di una forma differenziale lungo una curva: discussione ed esempi. Perché non è corretto identificare forme differenziali e campi di vettori: pull-back di forme differenziali.	55

Lezione 058. Superfici nello spazio: definizione e primi esempi. Piano tangente e vettore normale canonico. La retta tangente ad una curva su una superficie è contenuta nel piano tangente. Discussione della formula che genera un vettore normale a due vettori dati (prodotto vettore)	62
Lezione 059. Come non si definisce l'area di una superficie: esempio di Schwarz. Definizione di area di una superficie regolare e modi equivalenti di scrivere la formula per il calcolo. Caso delle superfici cartesiane.	68
Lezione 060. Superfici di rotazione: parametrizzazione, formule per il calcolo dell'area, teorema di Guldino. Integrali superficiali: idea della definizione e formula per il calcolo. Invarianza dell'area per riparametrizzazione.	73
Lezione 061. Gradiente, laplaciano, divergenza, rotore: definizioni e relazioni tra di esse. Significato di gradiente/divergenza/rotore nulli/uguali.	78
Lezione 062. Teorema di Gauss-Green e teorema della divergenza nel piano: enunciato. Calcolo del versore normale al bordo. Interpretazione del termine di bordo come integrale di flusso e come integrale di una forma differenziale.	83
Lezione 063. Equivalenza tra teorema di Gauss-Green e teorema della divergenza. Dimostrazione nel caso di insiemi normali. Idea euristica per trattare il caso generale scomponendo il dominio e sfruttando le cancellazioni sui bordi interni. Dimostrazione nel caso di campi vettoriali con supporto contenuto in particolari rettangoli.	88
Lezione 064. Dimostrazione del teorema della divergenza nel caso generale (due dimensionale) riducendosi all'enunciato locale mediante una partizione dell'unità. Enunciato del teorema della divergenza in dimensione tre.	94
Lezione 065. Applicazioni del teorema della divergenza: area ed integrale di funzioni su domini delimitati da curve date, calcolo di integrali di flusso attraverso curve date.	100
Lezione 066. Ulteriori applicazioni del teorema della divergenza. Interpretazione dell'integrazione in coordinate polari/sferiche in termini di integrali curvilinei/superficiali. Baricentro di una semisfera (come superficie).	106
Lezione 067. Orientazione del bordo di una superficie. Enunciato della formula di Stokes (teorema del rotore). L'integrale di un rotore su una superficie chiusa è nullo. Esempio di vettore a divergenza nulla che non è un rotore.	111
Lezione 068. Quattro strategie per calcolare un integrale di flusso attraverso una superficie. Esempio pratico di inversione del rotore.	116
Lezione 069. Dimostrazione della formula di Stokes. Dimostrazione via teorema della divergenza di un caso particolare (dimensione due e maggior regolarità) del cambio di variabili negli integrali multipli. Interpretazione delle dimostrazioni precedenti in termini di push-forward di curve e pull-back di forme differenziali.	122

Lezione 070. Inversione del rotore (trovare un vettore il cui rotore sia un vettore dato): condizione necessaria e algoritmo nel caso di un parallelepipedo. Laplaciano in coordinate polari e funzioni armoniche radiali nel piano (e nello spazio)	128
Lezione 071. Spazi metrici: distanza, palle, nozione di convergenza, diametro, funzioni Lipschitziane e Holderiane. Successioni di Cauchy e loro proprietà basilari. Completezza. Norme e spazi di Banach.	133
Lezione 072. Definizione di spazio di Hilbert. Esempi di spazi metrici. Distanze equivalenti e norme equivalenti. Equivalenza di tutte le norme in dimensione finita.	138
Lezione 073. Definizione di totale limitatezza. Caratterizzazione degli spazi metrici compatti: equivalenza tra completezza più totale limitatezza, compattezza per successioni, compattezza per ricoprimenti. Prima parte della dimostrazione.	143
Lezione 074. Lemma del raggio magico (numero di Lebesgue di un ricoprimento). Seconda parte della dimostrazione della caratterizzazione della compattezza. Criterio per dimostrare la totale limitatezza. Teorema di Heine-Cantor in spazi metrici. Due norme sono equivalenti se (e solo se) inducono la stessa nozione di convergenza.	148
Lezione 075. Teorema delle contrazioni in spazi metrici: enunciato, dimostrazione, esempi e controesempi. Completamento di uno spazio metrico: definizioni ed enunciato dei tre risultati principali (esistenza, unicità, estensione). Dimostrazione dell'unicità.	154
Lezione 076. Completamento di spazi metrici: dimostrazione del teorema di estensione e del teorema di esistenza.	159
Lezione 077. Teorema delle funzioni implicite: presentazione del problema, enunciato e dimostrazione nel caso di una equazione in due variabili (esistenza/unicità, continuità, derivabilità, ulteriore regolarità).	164
Lezione 078. Teorema delle funzioni implicite: enunciato e dimostrazione nel caso di una equazione in dimensione qualunque. Primi esempi ed esercizi: calcolo del polinomio di Taylor di funzioni definite implicitamente, limiti all'infinito di una funzione vs limitatezza del suo luogo di zeri.	170
Lezione 079. Teorema delle funzioni implicite dimostrato mediante punto fisso: illustrazione della tecnica nel caso di una equazione in dimensione 2, dimostrazione della parte di esistenza e unicità in dimensione e codimensione arbitraria.	174
Lezione 080. Teorema delle funzioni implicite in dimensione e codimensione arbitraria: continuità, lipschitzianità, differenziabilità, ulteriore regolarità. Esempi di applicazione.	180
Lezione 081. Teorema della funzione inversa (teorema di invertibilità locale). Esempio di funzione localmente invertibile in ogni punto ma non globalmente iniettiva. Teorema della mappa aperta (le funzioni con Jacobiano full rank mandano aperti in aperti).	186

Lezione 082. Esempi di studio di invertibilità locale/globale per funzioni di due variabili. 190

Lezione 083. Moltiplicatori di Lagrange: dimostrazione mediante esplicitazione del vincolo (nei tre casi progressivi: una equazione in dimensione 2, una equazione in dimensione qualunque, dimensione e codimensione arbitrarie). 194

Lezione 084. Moltiplicatori di Lagrange: dimostrazione mediante teorema della mappa aperta e dimostrazione mediante penalizzazione del vincolo. Semicontinuità del rango di una matrice. 200

Lezione 085. Moltiplicatori di Lagrange: condizione sufficiente per essere punto di massimo/minimo. Esercizi sulle funzioni definite implicitamente. 206

Note Title

24/11/2017

- Curve e integrali curvilinei
- Forme differenziali
- Superficie e integrali superficiali
- Teo. della divergenza (Gauss - Green)
- Teo. del rotore (Stokes)

CURVE

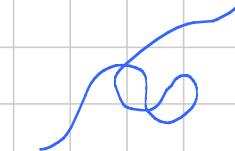
Defn. Una curva a valori in \mathbb{R}^m è una funzione

$$\gamma: \underbrace{[a, b]}_{\text{intervallo } \subseteq \mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Def. Si dice sostegno di una curva l'immagine della γ , cioè

$$\text{sostegno } (\gamma) := \{ \gamma(t) : t \in [a, b] \} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

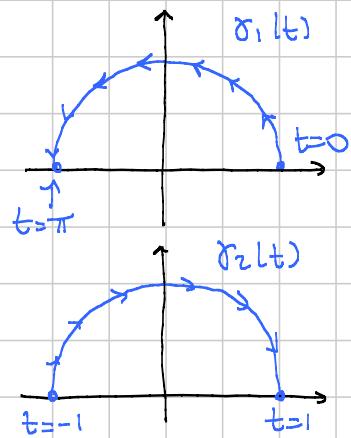
Achtung! Il "disegno" di una curva è il suo sostegno, la curva è il modo in cui il sostegno viene percorso.



Esempio 1 $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, \pi]$

$$[a', b']$$

$$\gamma_2(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) \quad t \in [-1, 1]$$



$$\gamma_3(t) = (\cos(\pi-t), \sin(\pi-t)) \quad t \in [0, \pi]$$

(-cost, sin t)

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ percorrono lo stesso sostegno

Esempio 2 $\gamma_4(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$
 $\gamma_5(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 8\pi]$

γ_4 e γ_5 percorrono lo stesso sostegno, ma γ_5 lo ripete 4 volte.

Def. Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva derivabile (cioè le singole componenti sono derivabili).

Dato $t_0 \in (a, b)$ si definisce

• **VELOCITY** il vettore $\dot{\gamma}(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \dots, \gamma'_n(t_0))$

• **SPEED** il numero $\|\dot{\gamma}(t_0)\|$

• **RETTA TANGENTE** in t_0 la retta di equ. parametrica

$$t \rightarrow \gamma(t_0) + \dot{\gamma}(t_0) t$$

↑ p.t. base ↑ direzione della retta

Esempio $\gamma(t) = (\sin t, t^2, \log t) \quad t \in [1, 3]$

$$t_0 = 2 \quad \dot{\gamma}(2) = (\cos 2, 4, \frac{1}{2}) \quad \dot{\gamma}(t) = (\cos t, 2t, \frac{1}{t})$$

La retta tangente è $\gamma(t_0) = (\sin 2, 4, \log 2)$

$$t \rightarrow (\sin 2 + t \cos 2, 4 + 4t, \log 2 + \frac{t}{2})$$

$$= \gamma(2) + t \dot{\gamma}(2)$$

— o — o —

Oss. Se la curva è continua, allora il sostegno è per forza compatto, quindi in particolare chiuso.

Def. Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice

- **CHIUSA** se $\gamma(a) = \gamma(b)$ (Achtung! non c'è nulla di logico in tutto questo)
- **SEMPLICE** se è iniettiva, tranne al più ai 2 estremi, cioè

$$\gamma(t) = \gamma(s) \Rightarrow t = s \text{ oppure } \{t, s\} = \{a, b\}$$

Domanda: se $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ è iniettiva, posso dire che è semplice?



Stabilire se una curva è chiusa è banale sostituzione.
La semplicità è più delicata.

Come dimostro che una curva è semplice?

Strategia 1 Se almeno una componente è strett. monotona allora la curva è semplice.

Se fosse $\gamma(t) = \gamma(s)$, dovrebbe essere $\gamma_i(t) = \gamma_i(s)$, ma se γ_i è strett. monot., questo implica $t = s$.

Strategia 2 Se esiste un invariante strett. monotono, allora la curva è semplice.
Quindi devo cercare $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$t \rightarrow f(\gamma(t)) \text{ sia str. monof.}$$

Dico. Se fosse $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, sarebbe $f(\gamma(t_1)) = f(\gamma(t_2))$...

Esempio $\gamma_1(t) = (\cos t, \boxed{t^3+t}, t^3 - 2t^2)$ $t \in [-5, 5]$
 str. cresc. $\Rightarrow \gamma_1$ è semplice

$\gamma_2(t) = (\cos t, \boxed{t^2+t}, t^3 - t^4)$ $t \in [0, 4]$
 str. cresc. per $t \geq 0 \Rightarrow \gamma_2$ è semplice

$\gamma_3(t) = (t \cos t, t \sin t)$ $t \in [0, 12\pi]$

↑
 Considero $x^2 + y^2$, che diventa $t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t = t^2$
 e questo è iniettivo per $t \in [0, 12\pi]$.

Strategia 3 Se riesco a scomporre $[a, b]$ in sottointervalli in cui γ è iniettiva e appartiene a zone disgiunte di \mathbb{R}^m , allora γ è semplice.

Esempio $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$

Scompongo $[0, 2\pi] = [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

In ogni sottointervalle la curva è iniettiva (entrambe le componenti sono monotone)

Inoltre nei 4 sottointervalli la curva sta in quadranti diversi e quindi questo escluso

$$\gamma(t) = \gamma(s)$$

con t ed s appartenenti ad intervalli diversi
 (in realtà occorre controllare gli assi).

Strategia 4] Usare la definizione negata.

Esempio $\gamma(t) = (t-t^2, t-t^3)$ $t \in [0, 1]$

Osservo che γ è chiusa $\Rightarrow 1$ e 2 falliscono.

Supponiamo che non sia semplice. Impongo

$$(t-t^2, t-t^3) = (s-s^2, s-s^3)$$

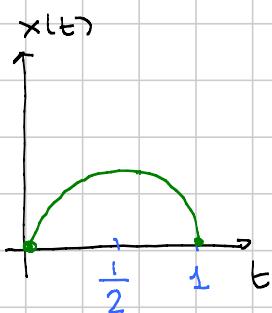
$$\begin{cases} t-t^2 = s-s^2 \\ t-t^3 = s-s^3 \end{cases} \quad \begin{cases} t-s = (t-s)(t+s) \\ t-s = (t-s)(t^2+ts+s^2) \end{cases}$$

Se $t=s$ nulla di male, altrimenti divido:

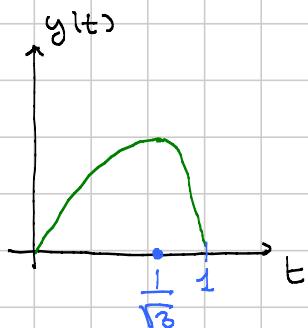
$$\begin{cases} 1 = t+s \\ 1 = t^2+ts+s^2 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = t+s \\ 1 = (t+s)^2-ts \end{cases} \quad \begin{cases} t+s = 1 \\ ts = 0 \end{cases} \Rightarrow \{t, s\} = \{0, 1\}$$

Disegnare il sostegno di γ Disegno separatamente le due componenti

$$x(t) := t-t^2$$



$$y(t) := t-t^3$$



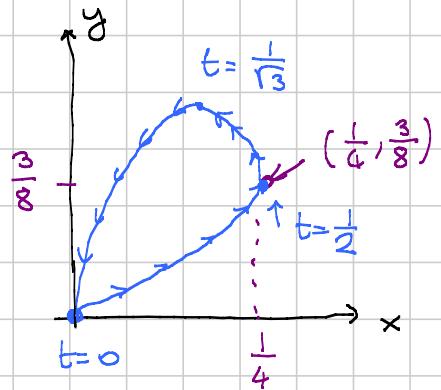
$$y'(t) = 1-3t^2 \quad t = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dall'andamento delle 2 componenti, deducere quello della curva

- Per $t \in [0, \frac{1}{2}]$ le $x(t)$ e $y(t)$ sono \nearrow

- Per $t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ la $x(t) \downarrow$ e $y(t) \uparrow$

- Per $t \in [\frac{1}{\sqrt{3}}, 1]$ abbiamo $x(t) \downarrow$ e $y(t) \downarrow$



Oss. Forse dal disegno si può dedurre una dim. di semplicità basata sulla strategia 3.

— o — o —

Note Title

24/11/2017

LONGHEZZA DI UNA CURVA

Def. Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva.

Si definisce lunghezza di γ (il sup delle lunghezze delle poligonalì inscritte) il

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^m \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b \right\}$$

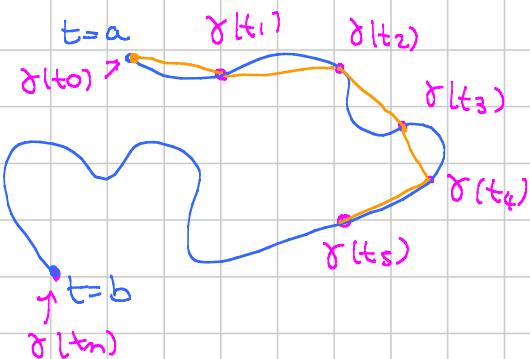
il sup è fatto al variare della partizione di $[a, b]$

Interpretazione geometrica

Fisso una partizione

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

e fotografo dove si trova la curva ai vari tempi



La lunghezza di ogni segmento è $\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|$

Sommando su k otengo la lunghezza della spezzata che moralmente è meno della lunghezza della curva.

Mi aspetto che rendendo la partizione più fitta finisco per approssimare la "lunghezza" della curva.

L'approssimazione avviene dal basso.

Def. Se lunghezza (γ) $\in \mathbb{R}$, si dice che la curva ha lunghezza finita oppure (similmente) che è rettificabile.

Prop. Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva Lipschitziana.

Allora

$$\text{Lung}(\gamma) \leq L \cdot (b-a)$$

↑
cost. di Lip.

Dim. Per ogni partizione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ vale

$$\sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \leq \sum_{k=1}^n L(t_k - t_{k-1}) = L(b-a).$$

— o — o —

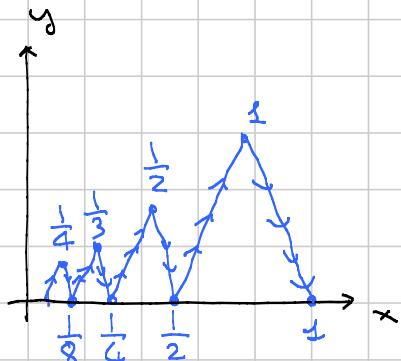
Esempi di curve di lunghezza infinita

Esempio 1 (Fatto apposta)

Il disegno in figura è il grafico di una funzione $f(x)$

$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
continua.

Considero la curva



$$\gamma(t) := (t, f(t)) \quad t \in [0, 1]$$

(curva cartesiana che percorre il grafico)

Per definizione $\text{Lung}(\gamma) \geq$ somma Lung lati obliqui

che è \geq della somma delle lunghez. delle altezze, la quale è una serie armonica divergente.

— o — o —

Esempio 2 (Fatto meno apposta)

$$\gamma(t) = (t, t \sin^2 \frac{1}{t}) \quad t \in [0, 1]$$

Stimo la lunghezza con la poligonale che sta sotto le ultime n "coline".

Le altezze dei triangoli sono corrispondenti a

$$\frac{1}{t_k} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Rightarrow \quad t_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} \approx \frac{1}{k}$$

Ancora una volta ottengo poligoni di lunghe almeno

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} \quad \text{e questa diverge.}$$

— o — o —

Esercizio Dimostrare che esiste una curva $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ che è α -Hölder per ogni $\alpha \in (0, 1)$ e che ha lunghezza infinita.

— o — o —

Teorema) Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1 .

Allora

$$\text{lunga}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

Fisicamente: la lunga. è l'integrale della speed

$$S = V \cdot T.$$



Domanda: se due curve percorrono lo stesso sostegno, avranno la stessa lunghezza?

No in generale, perché i tratti percorsi più volte contano con molteplicità.

Sì, se le due curve percorrono lo stesso sostegno "in maniera analoga".

Teorema 1 (Riparametrizzazione C^1)

Sia $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1 .

Sia $\psi: [c,d] \rightarrow [a,b]$ una funzione di classe C^1 monotona (debolmente) e surgettiva.

Consideriamo la curva $\tilde{\gamma}_2: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ def. da

$$\tilde{\gamma}_2(t) = \gamma(\psi(t)) \quad \forall t \in [c,d]$$

\uparrow
 è la "stessa curva" percorsa
 con un ritmo diverso

Allora $\text{lung}(\tilde{\gamma}_2) = \text{lung}(\gamma)$

Dim Per chain rule si ha che

$$\dot{\tilde{\gamma}}_2(t) = \dot{\gamma}(\psi(t)) \psi'(t)$$

Ma allora

$$\text{lung}(\tilde{\gamma}_2) = \int_c^d \|\dot{\tilde{\gamma}}_2(t)\| dt = \int_c^d \|\dot{\gamma}(\psi(t)) \psi'(t)\| dt$$

$$\begin{aligned} \text{ho supposto} \quad &= \int_c^d \|\dot{\gamma}(\psi(t)) \psi'(t)\| dt & s = \psi(t) \\ \psi'(t) \geq 0 & \quad \quad \quad ds = \psi'(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_a^b \|\dot{\gamma}(s)\| ds \end{aligned}$$

se fosse ≤ 0 dovo mettere segno - ma invertire gli estremi!

Teorema 2 (Riparametrizzazione C^0)

Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva (non deve nemmeno C^0)

Sia $\psi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ continua e debolmente inversa.

Sia γ_2 come prima. ψ conseguente e surgettiva

Allora

$$\text{Lunghe}(\gamma_2) = \text{Lunghe}(\gamma)$$

Dim. Occorre creare una corrisp. bimivoca tra le poligoniali per γ e quelle per γ_2 .

Da γ_2 a γ $c = s_0 < s_1 < \dots < s_m = d$

$$\sum_{k=1}^m \|\gamma_2(s_k) - \gamma_2(s_{k-1})\| = \sum_{k=1}^m \|\gamma(\psi(s_k)) - \gamma(\psi(s_{k-1}))\|$$

$\stackrel{\text{t}_k}{\text{t}_{k-1}}$

Ponendo $t_k := \psi(s_k)$, supponendo ψ deb. crescente vale

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = b.$$

e il RHS diventa poligonale per γ .

Da γ a γ_2 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$

$$\sum_{k=1}^m \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| = \sum_{k=1}^m \|\gamma_2(\psi(t_k)) - \gamma_2(\psi(t_{k-1}))\|$$

$$\text{con } c = s_0 < s_1 < \dots < s_m = d.$$

Per questo basta porre $\psi(s_k) = t_k$ per $k = 1, \dots, m$

\uparrow
per la surgettività posso
risolvere, magari in modo
non unico, ma le soluz.
verificano $s_k > s_{k-1}$

— o — o —

Casi speciali della formula per la lunghezza

① Curve cartesiane $(t, f(t)) \quad t \in [a, b]$.

Allora

$$\text{Lunghezza} (\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{f}(t)^2} dt$$

② Curve in coord. polari $\rho(t), \theta(t) \quad t \in [a, b]$

$$x(t) = \rho(t) \cos \theta(t)$$

$$y(t) = \rho(t) \sin \theta(t)$$

$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\dot{y} = \dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2$$

$$\text{Lunghezza} (\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{\rho}(t)^2 + \rho(t)^2 \dot{\theta}(t)^2} dt$$

— o — o —

Note Title

28/11/2017

Parentesi : stime su integrali vettorialiSia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ misurabile, sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ con $d \geq 1$ Si definisce $\int_{\Omega} f(x) dx$ come il vettore che ha comecomponenti l'integrale delle componenti di $f(x)$ (che assumiamo essere integrabili).Prop. 1 (Stima dall'alto per int. vettoriale)

$$\left\| \int_{\Omega} f(x) dx \right\| \leq \int_{\Omega} \|f(x)\| dx$$

(Norme di vettori)

Dim. (Si fa per dualità)Fisso un qualunque $v \in \mathbb{R}^d$. Allora

$$\langle v, \int_{\Omega} f(x) dx \rangle = \sum_{i=1}^d v_i \int_{\Omega} f_i(x) dx$$

linearità
dell'integr.

$$= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^d v_i f_i(x) \right) dx$$

$$= \int_{\Omega} \langle v, f(x) \rangle dx$$

c.s. $\geq \int_{\Omega} \|v\| \cdot \|f(x)\| dx$

$$= \|v\| \int_{\Omega} \|f(x)\| dx$$

Distinguo due casi:

① Se $\int_{\Omega} f(x) dx = 0$, allora non c'è nulla da dim.

② Se $\int_{\Omega} f(x) dx = w \neq 0$, allora uso $w := \frac{w}{\|w\|}$ e ottengo

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Omega} f(x) dx \right\| &= \frac{\left\langle \int_{\Omega} f(x) dx, \int_{\Omega} f(x) dx \right\rangle}{\left\| \int_{\Omega} f(x) dx \right\|} \\ &\leq \int_{\Omega} \|f(x)\| dx. \end{aligned}$$

— o — o —

Esercizio per capire la dimostrazione

→ Provare a generalizzare al caso della norma cubica.

→ " " " col una norma qualunque su \mathbb{R}^d .

— o — o —

Prop. 2 (Stima dal basso per integrale vettoriale)

Per ogni $x_0 \in \Omega$ vale la stima

$$\left\| \int_{\Omega} f(x) dx \right\| \geq \int_{\Omega} \|f(x)\| dx - 2 \int_{\Omega} \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

Dim. Ci sono due passaggi "ad operazioni scambiate"

Primo passo: scompongo, integro e triangolare \geq

$$f(x) = f(x_0) + f(x) - f(x_0)$$

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega} f(x_0) dx + \int_{\Omega} (f(x) - f(x_0)) dx$$

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \text{meas}(\Omega) f(x_0) + \int_{\Omega} (f(x) - f(x_0)) dx$$

Facendo le norme ottengo $(\|A+B\| \geq \|A\| - \|B\|)$

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Omega} f(x) dx \right\| &\geq \text{meas}(\Omega) \|f(x_0)\| - \left\| \int_{\Omega} (f(x) - f(x_0)) dx \right\| \\ &\geq \text{meas}(\Omega) \|f(x_0)\| - \int_{\Omega} \|f(x) - f(x_0)\| dx \\ &\stackrel{\text{Prop. 1}}{\geq} \end{aligned}$$

Secondo passo: scompongo, triangolare \leq , integro

$$f(x) = f(x_0) + f(x) - f(x_0) \quad (\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|)$$

$$\|f(x)\| \leq \|f(x_0)\| + \|f(x) - f(x_0)\|$$

$$\int_{\Omega} \|f(x)\| dx \leq \text{meas}(\Omega) \|f(x_0)\| + \int_{\Omega} \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

da cui

$$\text{meas}(\Omega) \|f(x_0)\| \geq \int_{\Omega} \|f(x)\| dx - \int_{\Omega} \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

Sostituendo nella disug. alla fine del primo passo ottengo la tesi.

— o — o —

Teorema Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ una curva di classe C^1 .

Allora

$$\text{length}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

Dim. Si tratta di dimostrare due diseguaglianze.

\leq Dico dimostrare che per ogni partizione

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$$

vale la stima

$$\underbrace{\sum_{k=1}^m \|\vec{\gamma}(t_k) - \vec{\gamma}(t_{k-1})\|}_{\text{lung. poligonale}} \leq \int_a^b \|\vec{\gamma}'(t)\| dt \quad (\text{da cui lung.}(\vec{\gamma}) \leq \int)$$

Basta osservare che

$$\vec{\gamma}(t_k) - \vec{\gamma}(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \vec{\gamma}'(t) dt$$

Usando la prop. 1 ottengo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \|\vec{\gamma}(t_k) - \vec{\gamma}(t_{k-1})\| &= \sum_{k=1}^m \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \vec{\gamma}'(t) dt \right\| \\ &\stackrel{\text{Prop. 1.}}{\leq} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\vec{\gamma}'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \|\vec{\gamma}'(t)\| dt \quad \text{smiley} \end{aligned}$$

\geq Dimostriamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b \quad \text{tale che}$$

$$\sum_{k=1}^m \|\vec{\gamma}(t_k) - \vec{\gamma}(t_{k-1})\| \geq \int_a^b \|\vec{\gamma}'(t)\| dt - \varepsilon$$

(da cui lung. $(\vec{\gamma}) \geq \int \dots - \varepsilon$)

Usiamo l'uniforme continuità di $\dot{\gamma}(t)$ e prendiamo il $\delta > 0$ che corrisponde a

$$\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

cioè

$$|t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow \|\dot{\gamma}(t_1) - \dot{\gamma}(t_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Prendo una partizione qualunque fatta da intervalli di ampiezza $\leq \delta$ e dico che questa va bene.

Per la prop. 2 vale la stima

$$\begin{aligned} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| &= \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{\gamma}(t) dt \right\| \quad \text{p.t.o a caso} \\ &\geq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}(t)\| dt - 2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(t_k)\| dt \\ &\qquad \qquad \qquad \downarrow \\ &\geq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}(t)\| dt - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (t_k - t_{k-1}) \end{aligned}$$

Quando sommo su k ottengo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| &\geq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}(t)\| dt - \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \\ &= \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt - \varepsilon. \quad \text{☺} \end{aligned}$$

— o — o —

Oss. Abbiamo usato Prop. 1 e 2 con $\Omega = [a, b]$ o $[t_{k-1}, t_k]$, comunque in dim 1 in partenza, ma d'arrivo.

Oss. Brutalmente, l'idea della dim. è semplice

$$\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{\gamma}(t) dt \sim (t_k - t_{k-1}) \dot{\gamma}(t_k)$$

se \uparrow l'interv.
 è "piccolo"

e quindi

$$\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \sim (t_k - t_{k-1}) \cdot \|\dot{\gamma}(t_k)\|$$

D'altra parte

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}(t)\| dt \sim (t_k - t_{k-1}) \cdot \|\dot{\gamma}(t_k)\|$$

e quindi i 2 sono uguali.

La dim. ufficiale precisa questi \sim .

Esempio 1 Lunghezza di parabola

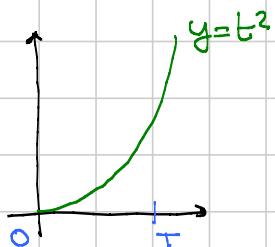
$$\gamma(t) = (t, t^2) \quad t \in [0, T]$$

$$\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix}$$

$$\text{Lunghezza}(\gamma) = \int_0^T \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

$$= \int_0^T \sqrt{1 + 4t^2} dt$$

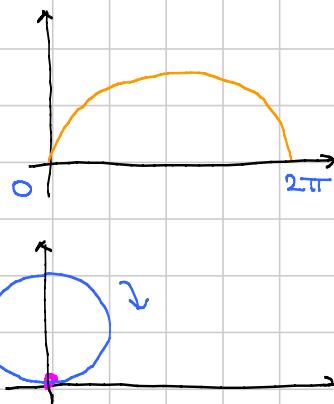
= si fa in vari modi.



Esempio 2 Cicloide

Traiettoria descritta da un p.t. fissato su una circ. che ruota in una direzione.

Si vede che



$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned} \text{Length} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt \quad \text{↑ pongo } t = 2y \text{ e se ne} \\ &\quad \text{va la radice.} \end{aligned}$$

Esempio 3 Curva a valori in una sfera di raggio 1.
Det. formula per la Length

$$x(t) = \cos \varphi(t) \cos \theta(t)$$

$$y(t) = \cos \varphi(t) \sin \theta(t)$$

$$z(t) = \sin \varphi(t)$$

$$\dot{x} = -\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \theta - \dot{\theta} \cos \varphi \sin \theta$$

$$\dot{y} = -\dot{\varphi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi \cos \theta$$

$$\dot{z} = \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi}$$

↑
vicino ai poli cambiano
& conta poco!

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 052

Note Title

28/11/2017

INTEGRALI CURVILINEI

(Integrali di funzioni lungo curve)

- ① Come si intendono
- ② Significato fisico / geometrico
- ③ Definizione (idea)
- ④ Come si calcolano

3 Notazioni

Indica che si tratta di
integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds$$

curva su cui si integra

integrandola

elemento di lunghezza per i fisici

Si intende che

- $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ è una curva (diciamo almeno cont.)
- $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ (basta che sia definita almeno sul supporto di γ).

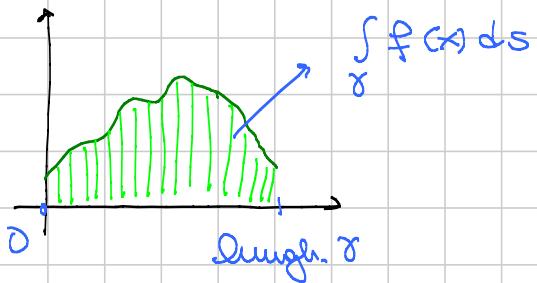
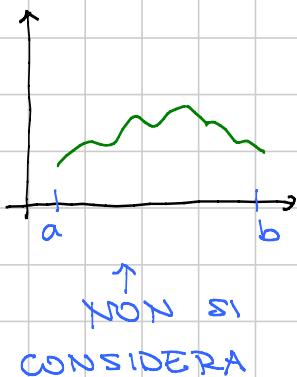
2 Significato geometrico

Data γ e data f , posso considerare

$f(\gamma(t)) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e descrive la quota dell'omino al tempo t .

Di questa ora non mi importa nulla.

Considero invece la quota come funzione dello spazio percorso (vedi video con GPS)



3 **Definizione** Si può dare in vari modi diversi

Alla DARBOUX Considero una partizione qualunque di $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$$

e poi faccio le somme inferiori e superiori del tipo

$$\sum_{k=1}^m [lunghe curva tra \tau(t_{k-1}) e \tau(t_k)] \sup \{f(\tau(t)) : t \in [t_{k-1}, t_k]\}$$

base altezza

e idem con il \inf per quelle inferiori.

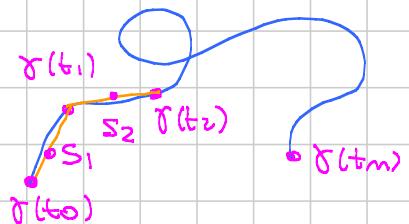
Poi la definizione prosegue come al solito: \inf somme superiori e \sup somme inferiori.

Alla RIEMANN (Usando le poligonal) (Usando le poligonal)

Assumiamo che $f(x)$ sia continua e definita almeno in un aperto che contiene il supporto

Considero la partizione di $[a, b]$ come sopra.

Vedo i cor. p.ti sulla curva



Unisco i punti ottenendo la poligonale

Scelgo un punto s_k come mi pare in ogni segmento

Costruisco infine la somma di Riemann

$$\sum_{k=1}^n \underbrace{\|\vec{\gamma}(t_k) - \vec{\gamma}(t_{k-1})\|}_{\text{lung. segm.}} \cdot \underbrace{f(s_k)}_{\substack{\text{altezza} \\ \text{rettangolo } k\text{-esimo}}}$$

Dico che $\int_{\gamma} f(x) ds = I$ se

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. \forall partizione di $[a,b]$ con interv. di ampiezza $\leq \delta$ e \forall taggamento dei segmenti

$$|\sum_{\text{riemann}} - I | \leq \varepsilon.$$

Teorema Se f è continua e la curva è rettificabile, allora le due definizioni coincidono.

Dim. È la solita.

—○—○—

4 Come si calcolano

Teorema Supponiamo $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continua e $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ di classe C^1 .

Allora

$$\int_{\gamma} f(x) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \underbrace{\|\vec{\gamma}'(t)\| dt}_{\substack{\text{fattore di conversione tra} \\ \text{disegno in tempo e disegno} \\ \text{in distanza}}}$$

Dim Dopo aver diviso in tratti, è la stessa della lunghezza di una curva.

Oss. L'integrale curvilineo non dipende dalla parametrizzazione allo stesso modo in cui non dipendeva la lunghezza.

Caso speciale: se $\gamma_2(t) = \gamma_1(\psi(t))$ con ψ di classe C^1 , deb. monotona e semp. $\psi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ allora

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_2} f(x) ds &= \int_c^d f(\gamma_2(t)) \|\dot{\gamma}_2(t)\| dt \\
 &= \int_c^d f(\gamma_1(\psi(t))) \|\dot{\gamma}_1(\psi(t))\| \cdot |\psi'(t)| dt \\
 y = \psi(t) &= \int_a^b f(\gamma_1(y)) \|\dot{\gamma}_1(y)\| dy \\
 &= \int_{\gamma_1} f(x) ds.
 \end{aligned}$$

— o — o —

Def. Il baricentro di una curva nel piano è il punto di coordinate

$$x_G = \frac{\int_{\gamma} x ds}{\text{lunghezza}(\gamma)}$$

$$y_G = \frac{\int_{\gamma} y ds}{\text{lunghezza}(\gamma)}$$

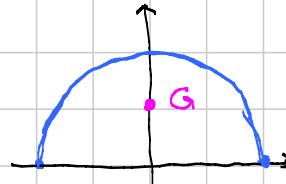
Esempio 1 (Baricentro semicirc.)

$$\gamma(t) = r(t, \sqrt{1-t^2}) \quad t \in [-1, 1]$$

o meglio

$$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t) \quad t \in [0, \pi] \quad \|\dot{\gamma}(t)\| = r$$

(spazio costante)



$$\int_{\gamma} x \, ds = \int_0^{\pi} \underbrace{r \cos t \cdot r}_{x} \, dt = r^2 \int_0^{\pi} \cos t \, dt = 0$$

(prevedibile per simmetria)

$$\int_{\gamma} y \, ds = \int_0^{\pi} r \sin t \cdot r \, dt = r^2 \int_0^{\pi} \sin t \, dt = 2r^2$$

$$y_G = \frac{2r^2}{\text{lunghezza}} = \frac{2r^2}{\pi r} = \frac{2}{\pi} r$$

(confrontare con baricentro semicircosfera)

Esempio 2 $\gamma(t) = (t^2, \cos t)$ $t \in [0, 2\pi]$
(semplice perché prima comp. monotona)

$$f(x, y) = x^2 - xy$$

$$\int_{\gamma} f(x, y) \, ds = \int_0^{2\pi} (t^4 - t^2 \cos t) \cdot \sqrt{4t^2 + \sin^2 t} \, dt$$

$\varphi(x(t), y(t))$

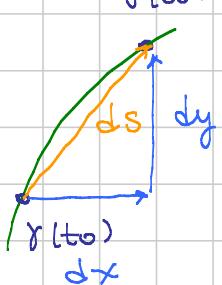
= non si fa per via elementare.

Oss. Per i fisici ds è l'"elemento di lunghezza" $\gamma(t_0 + dt)$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \, dt$$

$$dx = \dot{x}(t) \, dt$$

$$dy = \dot{y}(t) \, dt$$



Note Title

29/11/2017

FORME DIFFERENZIALI (Forme diff. lineari, dette anche 1-forme)

Def. (Da corso di servizio) Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, una forma diff. in Ω è un oggetto del tipo

$$\omega := \sum_{k=1}^m A_k(x) dx_k$$

dove $A_1(x), \dots, A_m(x)$ sono funzioni $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dette coeff. della forma.

Esempi (casi particolari)

$m=2 \quad \omega = A(x,y) dx + B(x,y) dy$

$m=3 \quad \omega = A(x,y,z) dx + B(x,y,z) dy + C(x,y,z) dz$

Def. (Vera) Una forma diff. in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è una applicazione

$$\omega : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$$

↑ Duale di \mathbb{R}^n

Parentesi di algebra lineare La base canonica e_1, \dots, e_n induce una base canonica del duale e_1^*, \dots, e_n^* definita da

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Ogni el. di $(\mathbb{R}^n)^*$ si scrive come $a_1 e_1^* + \dots + a_n e_n^*$

Interpretiamo dx_i come il differenziale della funzione

$$x \rightarrow x_i$$

Il differenziale dx_i è proprio e_i^* .

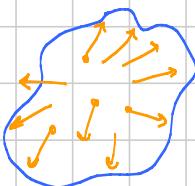
— o — o —

Def. Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto, si dice campo di vettori una applicazione

$$\Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$$

In poche parole, in ogni punto $x \in \Omega$ sto assegnando un vettore

$$(A_1(x), \dots, A_n(x)).$$



Oss. L'identificazione di una forma diff.

$$\omega = A_1(x) dx_1 + \dots + A_n(x) dx_n$$

con il campo di vettori $(A_1(x), \dots, A_n(x))$ è scontata, ma per molte questioni valida

— o — o —

Integrale di una forma diff. lungo una curva)

- ① Notazione
- ② Significato fisico
- ③ Definizione
- ④ Tecnica di calcolo

② Notazione

$$\int_{\gamma} \omega$$

↗ forma diff. definita
in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$

↑

$$\text{curva } \gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$$

Di solito si assume

→ ω di classe C^0 (i coeff. sono continui)

→ γ di classe C^1 .

(3-4) Nelle ipotesi di sopra si pone per definizione

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \left(\sum_{k=1}^m A_k(\gamma(t)) \dot{\gamma}_k(t) \right) dt$$

$m=2$ $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b [A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t)] dt$$

(ho sostituito x e y con $x(t)$ e $y(t)$ e
 $dx = \dot{x}(t) dt$ e $dy = \dot{y}(t) dt$)

[2] Significato fisico Supponiamo $m=2$ per semplicità e supponiamo di avere una forza \vec{F} su tutto il piano

$$\vec{F} = (A, B)$$



$$\begin{aligned} \text{Lavoro} &= \langle \text{Forza}, \text{Spostamento} \rangle \\ &= \langle \vec{F}, \vec{Q} - \vec{P} \rangle \end{aligned}$$

(se spostamento rettilineo e forza costante)

Se la forza non è costante $\vec{F}(x, y) = (A(x, y), B(x, y))$ e lo spostamento è una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ posso pensare di calcolare il lavoro facendo una specie di somma di Riemann sommando tratto per tratto

$$\langle \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}), \vec{F}(\gamma(t_k)) \rangle$$

$$= \left\langle \frac{\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}, \vec{F}(\gamma(t_k)) \right\rangle (t_k - t_{k-1})$$



Sto facendo una somma di Riemann per l'integrale

$$\int_a^b \langle F(\vec{\gamma}(t)), \dot{\vec{\gamma}}(t) \rangle dt$$

$$\stackrel{''}{=} \int_a^b (A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t)) dt \quad \text{😊}$$

Conclusion: se identifichiamo una forma con il campo che ha gli stessi coefficienti, e lo giudichiamo con F , allora

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \langle F(\vec{\gamma}(t)), \dot{\vec{\gamma}}(t) \rangle dt$$

Achtung! Occhio a non confondere l'integrale di una forma con quello di una funzione.
Sono imparentati nel senso che

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b (A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t)) dt$$

$$= \int_a^b \left(A(x, y) \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + B(x, y) \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

posto che sia definito, è
il versore tangente

Quindi posso pensare $\int_{\gamma} \omega$ come l'integrale su γ della

funzione "prod. scalare tra campo associato e versore tang."

— o — o —

Comportamento per riparametrizzazione

- Brutalmente :
- Se percorro lo stesso sostegno nel verso opposto, allora l'integrale di una forma CAMBIA SEGNO
 - Se faccio avanti / indietro viene 0.
 - Tratti percorsi avanti / indietro si cancellano.

Teorema Sia ω una forma diff. continua in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Sia $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva di classe C^1 .

Sia $\psi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ una funzione C^1 senza ipotesi di monotonia, ma con

$$\psi(c) = a \quad \text{e} \quad \psi(d) = b$$

e sia $\gamma_2(t) := \gamma_1(\psi(t)) \quad (\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \Omega)$

Allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Se invece $\psi(c) = b$ e $\psi(d) = a$, allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = - \int_{\gamma_2} \omega.$$

Dim Uso la definizione e cambio variabile negli integrali:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \omega &= \int_c^d \left(\sum_{k=1}^m A_k(\gamma_2(t)) \dot{\gamma}_{2,k}(t) \right) dt \\ &= \int_c^d \left(\sum_{k=1}^m A_k(\gamma_1(\psi(t))) \dot{\gamma}_{1,k}(\psi(t)) \psi'(t) \right) dt \quad (s = \psi(t)) \\ &= \int_a^b \left(\sum_{k=1}^m A_k(\gamma_1(s)) \dot{\gamma}_{1,k}(s) \right) ds = \int_{\gamma_1} \omega \end{aligned}$$

Non ho cambiato il segno se $\gamma(c) = a$ e $\gamma(d) = b$.
 Altrimenti gli estremi di integrazione vengono scambiati, da cui il cambio segno.

— o — o —

Oss. La definizione di integrale si estende a curve C^1 a tratti, cioè curve

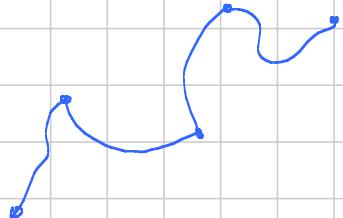
$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

continue per cui esiste una partizione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tale che

γ è di classe C^1 in ogni sottointervallo $[t_{k-1}, t_k]$

L'integrale si definisce sommando i vari tratti

$$\int_{\gamma} \omega := \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \omega$$



dove γ_k è la restrizione di γ a $[t_{k-1}, t_k]$.

Oss. Se devo calcolare $\int_{\gamma} \omega$, posso scegliere la param. che semplifica maggiormente i calcoli!

Esempio $\omega = (x+y)dx + x^2dy$ $\gamma_1(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$, $t \in [-1, 1]$
 $\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, \pi]$

$$\int_{-1}^1 \left[(t + \sqrt{1-t^2}) 1 + t^2 (\sqrt{1-t^2})^1 \right] dt = \text{auguri! oppure}$$

$$-\int_0^\pi [(\cos t + \sin t)(-\sin t) + \cos^2 t \cdot \cos t] dt$$

γ_2 gira al contrario di γ .



— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 054

Note Title

29/11/2017

Setting: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto, ω forma differenziale in Ω

$$\omega = \sum_{k=1}^m A_k(x) dx_k$$

Def. (Forma ESATTA) Si dice che ω è **esatta** in Ω se esiste una funzione $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\partial V}{\partial x_k}(x) = A_k(x) \quad \forall k \in \{1, \dots, m\}$$

La funzione V si dice **primitiva** della forma differenziale

Oss. Nel linguaggio dei fisici

- forma diff. esatta = campo di vettori conservativo
- primitiva = potenziale.

Achtung! Mai parlare di ω esatta senza specificare DOVE.

Infatti

- una stessa ω può essere esatta in Ω_1 ma non in Ω_2
- ω può essere esatta in Ω_1 e Ω_2 , ma non esatta in $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Def. (Forma CHIUSA) Si dice che ω è **CHIUSA** in Ω se è di classe C^1 e vale (che le derivate in croce sono =)

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall x \in \Omega$$

Oss. La chiusura si comporta bene rispetto all'unione.

Casi in dim. bassa

$$[m=2] \quad \omega = A(x,y) dx + B(x,y) dy$$

$$\text{Chiusa} \Leftrightarrow A_y(x,y) = B_x(x,y)$$

$$[m=3] \quad \omega = A(x,y,z) dx + B(\dots) dy + C(\dots) dz$$

$$\text{Chiusa} \Leftrightarrow \begin{cases} A_y = B_x \\ A_z = C_x \\ B_z = C_y \end{cases}$$

Quante sono le condizioni in \mathbb{R}^n ? $\frac{m(m-1)}{2} = \binom{m}{2}$

Teorema 1 ω esatta e di classe $C^1 \Rightarrow \omega$ chiusa
in Ω in Ω

Dim. È l'inclusione dell'ordine di derivazione.

Se è esatta, allora

$$A_k(x) = \frac{\partial V}{\partial x_k}(x)$$

e quindi

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{uguali}$$

$$\frac{\partial A_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i}$$

Corollario Se una forma ω di classe C^1 non è CHIUSA,
allora di sicuro non è esatta.
(La chiusura è facile da controllare).

Prop Sia ω esatta su Ω . Sia V una primitiva di ω .
 Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva C^1 a tratti.
 Allora

$$\boxed{\int_{\gamma} \omega = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a))}$$

Dim. Basta usare la definizione. Supponiamo γ tutta C^1 .

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n A_k(\gamma(t)) \dot{\gamma}_k(t) \right) dt \\ &= \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k}(\gamma(t)) \dot{\gamma}_k(t) \right) dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{d}{dt} V(\gamma(t)) \right] dt \\ &= \left[V(\gamma(t)) \right]_{t=a}^{t=b} = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a)) \end{aligned}$$

— o — o —

Oss. Se ω è esatta, l'integrale di ω dipende solo dagli estremi della curva.

Se inverti il verso di percorrenza, vedo bene che il segno cambia.

Oss. Nella dim., se la curva è solo C^1 a tratti, allora ripeto il ragionamento su ogni tratto e i punti intermedii se ne ranno telescopicamente.

Teorema (Caratterizzazione dell'esattezza)

Sia ω una forma diff. in Ω .

Allora i seguenti fatti sono equivalenti:

(i) ω è esatta

(ii) per ogni coppia di curve γ_1 e γ_2 con gli stessi estremi vale

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

(iii) per ogni curva γ chiusa vale $\int_{\gamma} \omega = 0$

Dcm.

(i) \Rightarrow (ii) è la Prop. precedente

(i) \Rightarrow (iii) pure

(ii) \Rightarrow (iii) una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ chiusa ha gli stessi estremi della curva che resta sempre ferma in $\gamma(a)$. L'integrale di ω su una curva costante è nullo perché $\dot{\gamma}(t) \equiv 0$.

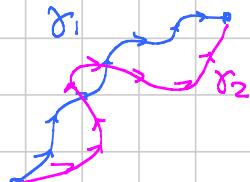
(iii) \Rightarrow (ii) Basta considerare la curva γ_3 ottenuta facendo

\rightarrow prima γ_1

\rightarrow poi γ_2 in senso inverso

(scrivere per esercizio la formula per γ_3)

Allora



$$0 = \int_{\gamma_3} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega \quad \rightsquigarrow \text{(ii)}$$

verso opposto

L'unica parte vera è dimostrare che $C(i) \Rightarrow C(i)$.

Sotto l'ipotesi 2 devo trovare una primitiva.

Scelgo a caso un p.t. $x_0 \in \Omega$.

Per ogni altro $x \in \Omega$ considero una curva C^1 a tratti a caso che unisce x_0 a x , cioè $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ t.c.

$$\gamma(a) = x_0 \text{ e } \gamma(b) = x.$$

Ora pongo

$$V(x) := \int_{\gamma} \omega \quad (\text{non dipende da } \gamma \text{ per la (ii)})$$

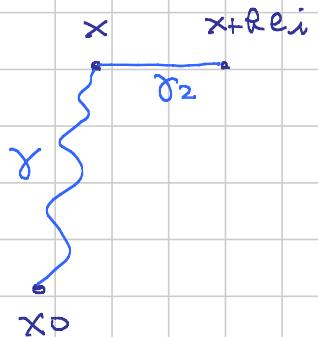
Devo dimostrare che è una primitiva, cioè

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(x) = A_i(x)$$

Quiudi prendo i rapporti incrementali

$$\frac{V(x + \rho e_i) - V(x)}{\rho}$$

Per definire $V(x + \rho e_i)$ uso una curva che segue γ da x_0 ad x e poi prosegue sul segmento



$$\gamma_2(t) := x + t\rho e_i \quad t \in [0, 1]$$

$$V(x + \rho e_i) = \int_{\gamma} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = V(x) + \int_0^1 A_i(x + t\rho e_i) \rho dt$$

resta solo questa
perché le altre componenti
della curva sono costanti

Quiudi

$$\begin{aligned} \frac{V(x + \rho e_i) - V(x)}{\rho} &= \int_0^1 A_i(x + t\rho e_i) dt \\ &= A_i(x + c\rho e_i) \quad \text{con } c \in [0, 1] \quad (\text{teo. media integrale}) \end{aligned}$$

Quando $\alpha \rightarrow 0$ otteniamo che

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\nabla(x + \alpha e_i) - \nabla(x)}{\alpha} = A_i(x)$$

"

$$\frac{\partial \nabla}{\partial x_i}(x).$$

— o — o —

Esempio

$$\omega = xy \, dx + \frac{x^2}{2} \, dy$$

$$\gamma(t) = (t^2 - \sqrt{t^2 + 1}, \arctan(t^2)) \quad t \in [0, 1]$$

$$\int_{\gamma} \omega$$

La forma è esatta e una primitiva è

$$\nabla(x, y) = \frac{1}{2}x^2y$$

$$\text{Inoltre } \gamma(0) = (-1, 0) \quad \gamma(1) = (1 - \sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$$

Ora basta sostituire gli estremi

$$\int_{\gamma} \omega = \nabla(1 - \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) - \nabla(-1, 0).$$

Note Title

01/12/2017

Domanda: ω forma diff. chiusa $\Rightarrow \omega$ esatta?

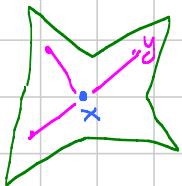
Sì, sotto certe ipotesi sull'insieme di definizione Ω .

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme non vuoto. Si dice che Ω è

• **CONVESSO** se $\forall x \in \Omega \ \forall y \in \Omega \ \forall \lambda \in [0,1] \ \lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega$

• **STELLATO** se $\exists x \in \Omega \ \forall y \in \Omega \ \forall \lambda \in [0,1] \ \lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega$

\uparrow
Fisso



Brutalmente: posso piazzare un guardiano in x e questo vede tutto.

• **CONNESSO** se $\forall A$ aperto in $\Omega \ \forall B$ aperto in Ω

$$A \cap B = \emptyset, \ A \cup B = \Omega, \ A \neq \emptyset \Rightarrow A = \Omega \ \text{e} \ B = \emptyset$$

• **SEMPLICEMENTE CONNESSO** se è connesso e vale uno dei seguenti fatti equivalenti.

Prop. (Misteriosa) Sia \mathbb{X} uno spazio topologico connesso.

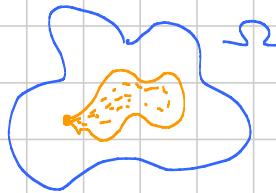
Allora sono fatti equivalenti

(i) ogni curva chiusa è omotopa ad una curva costante

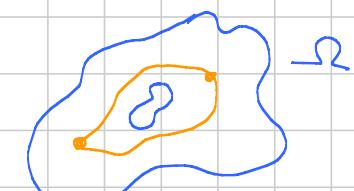
(ii) se γ_1 e γ_2 sono due curve con gli stessi estremi, allora sono omotope mediante una omotopia che lascia gli estremi fissi

(iii) ogni $f: S^1 \rightarrow \mathbb{X}$ continua si estende a tutto il disco D , ovviamente in modo continuo.

Brutalmente: Ω è semp.连通的 if it is connected and every closed curve γ in Ω can be contracted to a point within Ω .



Qui si può



Qui si curastra
nel buco

$\mathbb{R}^3 \setminus$ palla è semp.连通的: "posso fare il giro intorno"
 $\mathbb{R}^3 \setminus$ retta oppure $\mathbb{R}^3 \setminus$ toro non sono semp.连通的.

Fatto quasi ovvio:

CONNESSO \Rightarrow STELLATO \Rightarrow SEMPL. CONN. \Rightarrow CONN.

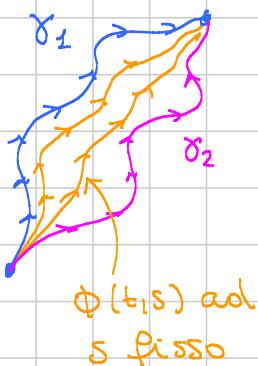
Non vale nessuna delle inverse.

Def. Siamo $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow \Omega$ e $\gamma_2: [0, 1] \rightarrow \Omega$ due curve con $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ e $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$.

Una omotopia che fissa gli estremi è una funzione

$\Phi: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ (tutto continuo)

- (i) $\Phi(t, 0) = \gamma_1(t) \quad \forall t \in [0, 1]$
- (ii) $\Phi(t, 1) = \gamma_2(t) \quad \forall t \in [0, 1]$
- (iii) $\Phi(0, s) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0) \quad \forall s \in [0, 1]$
- (iv) $\Phi(1, s) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1) \quad \forall s \in [0, 1]$



[Lemma] (Misterioso) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ semplicemente connesso. APERTO

Sia γ_1 e γ_2 due curve $\gamma_1, \gamma_2: [0, 1] \rightarrow \Omega$ con gli stessi estremi di classe C^1 .

[Essendo semp. conn. sappiamo che c'è una omotopia continua che lascia fissi gli estremi]

Esiste anche una omotopia più regolare, cioè con

$$\Phi_t(t, s), \quad \Phi_s(t, s), \quad \Phi_{ts}(t, s)$$

continue.

[Lemma] (Dimostrato forse a suo tempo)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.

Allora sono fatti equivalenti

(i) Ω è connesso

(ii) Ω è connesso per archi (continui)

(iii) Ω è connesso per archi C^∞ .

— o — o —

[Teorema 1] (versione facile)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto stellato.

Sia ω forma diff. in Ω di classe C^1 e chiusa.

Allora ω è esatta.

[Teorema 2] (versione più difficile)

Stessa cosa (chiusa \Rightarrow esatta) assumendo solo semp. connesso.

— o — o —

[Teorema alla base di tutto] Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.

Sia ω CHIUSA in Ω e di classe C^1 . Siano γ_1 e γ_2 due curve con gli stessi estremi di classe C^1 e omotope.

Allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Dim Teo. 1 con $m=2$

Ipotesi: ω chiusa

Tesi: ω esatta, cioè esiste una primitiva

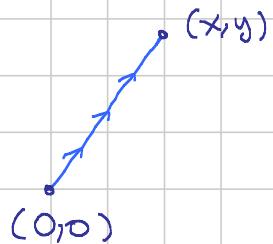
$$\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy$$

Supponiamo wlog che Ω sia stellato rispetto all'origine

Voglio definire una primitiva $V(x, y)$

Considero la curva "direttissima"

(tx, ty) $t \in [0, 1]$ e pongo



$$V(x, y) = \int_0^1 \omega = \int_0^1 [A(tx, ty)x + B(tx, ty)y] dt$$

Dico che va bene

$$V_x(x, y) = \int_0^1 [A_x(tx, ty)tx + A(tx, ty) + B_x(tx, ty)ty] dt$$

\uparrow $\frac{dt}{dt}$
 int. dip.
 da parametro

\uparrow
 $A_y(tx, ty)$
 (per chiusura)

$$= \int_0^1 [A_x(tx, ty)tx + A_y(tx, ty)ty + A(tx, ty)] dt$$

(niente panico! È una derivata!)

$$= \int_0^1 \left[\frac{d}{dt} (t A(tx, ty)) \right] dt = [t A(tx, ty)]_0^1$$

$= A(x, y)$

Allo stesso modo se denso risp. ad y .

— o — o —

Dim. Teo. 1 in dim n Ω stellato risp. a 0.

$$\omega = \sum_{i=1}^m A_i(x) dx_i$$

Dimostrazione $\delta(t) := tx \quad t \in [0, 1]$

$$V(x) = \int_{\Omega} \omega = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^m A_i(tx) x_i \right) dt$$

Calcolo la derivata parziale j -esima

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_j}(x) &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial A_i}{\partial x_j}(tx) t x_i + A_j(tx) \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial A_j}{\partial x_i}(tx) t x_i + A_j(tx) \right) dt \\ &\quad \uparrow \text{chiusura} \\ (\text{vale anche per } j=i) &= \int_0^1 \left[\frac{d}{dt} (t A_j(tx)) \right] dt \\ &\quad \uparrow \text{chain rule} \\ &= [t A_j(tx)]_{t=0}^{t=1} = A_j(x). \end{aligned}$$

— o — o —

Il teorema 2 segue dal teorema alla base di tutto e dalla caratterizzazione dell'esattezza

$$\omega \text{ esatta} \Leftrightarrow \int_{\delta_1} \omega = \int_{\delta_2} \omega \quad \forall \delta_1 \text{ e } \delta_2 \text{ con gli stessi estremi}$$

Ω semp. conn. \Rightarrow $\delta_1 \text{ e } \delta_2$
2 curve con gli stessi estremi sono sempre omotope

$\downarrow \omega \text{ è chiusa}$

$$\int_{\delta_1} \omega = \int_{\delta_2} \omega$$

ANALISI 2

-

LEZIONE 056

Note Title

01/12/2017

Teorema base

 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso. ω forma diff. C^1 chiusa. γ_1 e γ_2 due curve omotope con gli stessi estremi di classe C^1 .

Allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

Dim. per $m=2$

$$\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy$$

Per il lemma misterioso esiste una omotopia abbastanza regolare. Poniamo

$$\Phi(t, s) := (x(t, s), y(t, s))$$

Pongo

$$\varphi(s) := \int \omega \text{ sulla curva a } s \text{ fisso, cioè}$$

$$= \int_0^1 [A(x(t, s), y(t, s)) x_t(t, s) + B(x(t, s), y(t, s)) y_t(t, s)] dt$$

Per $s=0$ viene $\int_{\gamma_1} \omega$; per $s=1$ viene $\int_{\gamma_2} \omega$.

Spero che sia $\varphi'(s) = 0$ per ogni $s \in [0, 1]$.

Si tratta di derivare un integrale dipendente da parametro.

$$\varphi^1(s) = \int_0^1 [A_x x_s x_t + A_y y_s x_t + A x_{ts} \\ + B_x x_s y_t + B_y y_s y_t + B y_{ts}] dt$$

Integro per parti i termini con le derivate seconde.

$$\begin{aligned} \int_0^1 A x_{ts} dt &= \int_0^1 A(x_s)_t dt \\ &= - \int_0^1 \frac{d}{dt} A \cdot x_s + [A x_s]_{t=0}^{t=1} \\ &\quad \uparrow \text{gli estremi sono fissi} \\ &= - \int_0^1 A_x x_t x_s + A_y y_t x_s \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \int_0^1 B y_{ts} dt &= \int_0^1 B(y_s)_t dt \\ &= - \int_0^1 \frac{d}{dt} B \cdot y_s + [B y_s]_0^1 \\ &= - \int_0^1 B_x x_t y_s + B_y y_t y_s \end{aligned}$$

Metendo tutto insieme viene

$$\begin{aligned} \varphi^1(s) &= \int_0^1 \cancel{A_x x_s x_t} + \cancel{A_y y_s x_t} - \cancel{A_x x_t x_s} - \cancel{A_y y_t x_s} \\ &\quad + \cancel{B_x x_s y_t} + \cancel{B_y y_s y_t} - \cancel{B_x x_t y_s} - \cancel{B_y y_t y_s} \\ &= 0 \quad \text{😊} \end{aligned}$$

Dim. su dim. n

Ora l'autopia la indico con $\Phi(t, s)$ e le sue componenti con $\Phi_i(t, s)$.

$$\omega = \sum_{i=1}^n A_i(x) dx_i$$

$$\varphi(s) := \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^n A_i(\Phi(t, s)) \Phi_{i,t}(t, s) \right] dt$$

$$\varphi'(s) = \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial A_i}{\partial x_j}(\Phi) \Phi_{j,s} \Phi_{i,t} + \sum_{i=1}^n A_i(\Phi) \Phi_{i,ts} \right] dt$$

Integro per parti gli addendi della seconda sommatoria

$$\int_0^1 A_i(\Phi) \Phi_{i,ts} dt = \int_0^1 A_i(\Phi) (\Phi_{i,s})_t dt$$

$$= - \int_0^1 \frac{d}{dt} A_i(\Phi) \cdot \Phi_{i,s} dt + [A_i(\Phi) \cdot \Phi_{i,s}]_{t=0}^{t=1}$$

$$= - \int_0^1 \sum_{j=1}^m \frac{\partial A_i}{\partial x_j}(\Phi) \Phi_{j,t} \cdot \Phi_{i,s} dt$$

Andando a sostituire diventa

$$\varphi'(s) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial A_i}{\partial x_j}(\Phi) \Phi_{j,s} \Phi_{i,t} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial A_i}{\partial x_j}(\Phi) \Phi_{j,t} \cdot \Phi_{i,s}$$

uguali perché
la forma è
chiusa.

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial A_j}{\partial x_i}(\Phi) \Phi_{i,t} \cdot \Phi_{j,s}$$

— o — o —

LA SOLITA

Consideriamo la forma diff.

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Dico che è chiusa, ma non esatta.

Dim. che è chiusa

$$A_y = -\frac{(x^2+y^2) - 2y \cdot y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

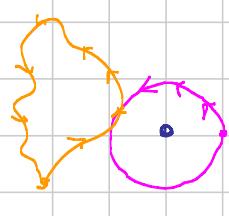
$$B_x = \frac{(x^2+y^2) - 2x \cdot x}{(-\dots)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$



Dimostra che non è esatta] Basta trovare una curva chiusa
sulla quale l'integrale viene $\neq 0$.

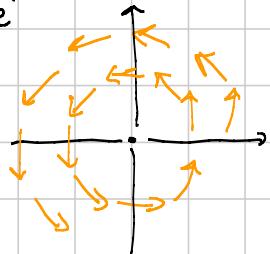
$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_0^{2\pi} -\frac{\sin t}{1} (-\sin t) + \\ &\quad + \frac{\cos t}{1} \cdot \cos t \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi. \end{aligned}$$



l'int. su questa viene 0,
perché omotopa a
curva costante.

Oss. Il campo vettoriale associato alla solita è il campo tangente alle circ. con centro nell'origine.



Oss. generale ciclistica Se faccio un giro in bici e ho sempre vento contrario, posso dire che il campo del vento non è gradiente di un potenziale.

Se il vento è contrario, il prod. scalare tra campo e δ è sempre negativo, quindi $\int \omega < 0 \Rightarrow$ NO esattezza.

La solita ammette primitiva? Dipende da dove fa cerchi.

Ammette una primitiva

- per $x > 0$, per $x < 0$, per $y > 0$, per $y < 0$
- su $\mathbb{R}^2 \setminus$ semiasse positivo degli x .

(Basta osservare che è chiusa e sono insiemi semp. conn.)

Una primitiva per $x > 0$ è $V(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$$V_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{e idem } V_y \text{ funziona!}$$

Una primitiva per $y > 0$ è $V(x, y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$

$$V_x = \frac{-1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{-x}{x^2 + y^2} \quad \text{e idem } V_y \text{ funziona.}$$

La prima funziona anche per $x < 0$, la seconda per $y < 0$.

In qualunque quadrante funzionano entrambe e infatti la loro diff. è costante

$$\arctan \frac{y}{x} + \arctan \frac{x}{y} = \frac{\pi}{2} \quad \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0$$

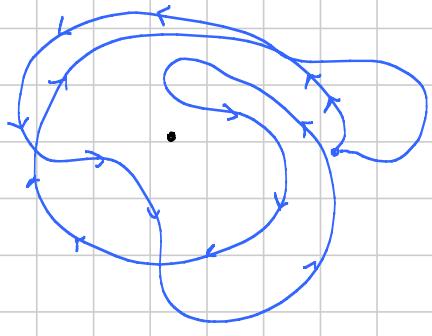
$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \text{per } x > 0 \quad (\text{Precauto!})$$

Chi è primitiva su $1^\circ, 2^\circ$ e 3° quadrante?

$$V(x, y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{sul } 1^\circ \text{ e } 2^\circ \\ -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\pi}{2} & \text{sul } 2^\circ \text{ e } 3^\circ \end{cases}$$

\uparrow
se scegliere la costante
che le fa coincidere sul 2°

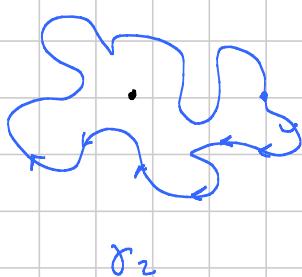
Esempio $\omega = \text{la solita}$



γ_1

$$\int_{\gamma_1} \omega = 0$$

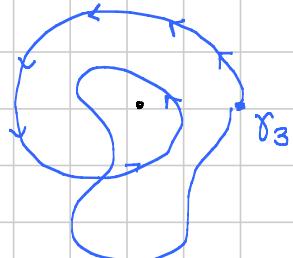
(è omotopa alla curva costante)



γ_2

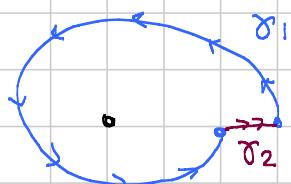
$$\int_{\gamma_2} \omega = -2\pi$$

(è omotopa a
- circ. classica)



$$\int_{\gamma_3} \omega = 4\pi$$

(è omotopa a
2 volte la circ.
classica)



$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \omega = 2\pi$$

La solita è tale perché "c'è solo lei"

Sia ω_s la solita. Sia ω una forma diff. chiusa su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Allora

$$\omega = c \omega_s + \omega_e$$

↑ esatta

Dim. Basta dim. che esiste $c \in \mathbb{R}$ t.c. $\omega - c \omega_s$ è esatta.

È chiusa per ogni valore di c .

Dico trovare c in modo che $\int_{\gamma} (\omega - c \omega_s) = 0$

su tutte le γ chiuse.

Alla fine basta verificarlo sulla circ. che fa un giro.

Questo determina c univocamente.

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 057

Note Title

05/12/2017

Come calcolo l'integrale di una forma diff. lungo una curva?

Quattro strategie :

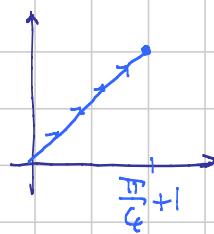
- 1 - Uso la formula
- 2 - Uso la formula dopo aver riparametrizzato la curva
- 3 - Spero che la forma sia esatta, calcolo una primitiva e faccio la diff. tra i valori negli estremi.
- 4 - Spero che la forma sia chiusa (se esatta è ancora meglio) e sostituisco la curva con una omotopia (con omotopia che lascia gli estremi fissi).

Esempio 1 $\omega = x dx + x^3 dy$

$$\gamma(t) = (\text{constant} + t^2, \arctan t + t^2) \quad t \in [0, 1]$$

La curva $\gamma(t)$ è semplice (componenti monotone) e percorre il segmento di estremi $(0, 0)$ e $(\frac{\pi}{4} + 1, \frac{\pi}{4} + 1)$

La forma non è chiusa $Ay \neq Bx$.



Uso strategia 2 e riparametrizzo il segu. come

$$\gamma_1(t) = (t, t) \quad t \in [0, \frac{\pi}{4} + 1] \quad (\text{riparam. stesso verso})$$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega = \int_0^{\frac{\pi}{4} + 1} (t + t^3) dt = \text{si fa.}$$

— o — o —

Esempio 2 $\omega = x^3 y^6 dx + (\alpha x^4 y^5 + e^y) dy$

Determinare per quali α la forma è esatta in \mathbb{R}^2

Essendo C^1 in \mathbb{R}^2 vale esatta \Leftrightarrow chiusa
 \uparrow semp. conn.

$$Ay = 6x^3 y^5 \quad B_x = 4\alpha x^3 y^5 \quad \text{chiusa} \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{2}$$

$$\rightsquigarrow x^3 y^6 dx + \left(\frac{3}{2} x^4 y^5 + e^y\right) dy$$

Cerco una primitiva "a occhio".

• Faccio la primitiva di $A(x,y)$ risp. ad x

$$\frac{1}{4} x^4 y^6 + \varphi(y)$$

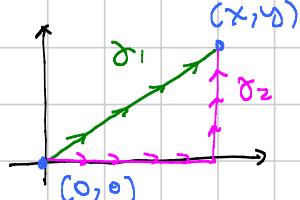
• Derivo risp. ad y e impone venga $B(x,y)$

$$\frac{3}{2} x^4 y^5 + \varphi'(y) \rightsquigarrow \varphi(y) = e^y$$

$$\boxed{V(x,y) = \frac{1}{4} x^4 y^6 + e^y}$$

Oss. Se uno è disperato, può provare ad usare la costruzione della primitiva data dal teorema

$V(x,y) = \int_{\gamma} \omega$ dove γ è una qualunque curva che congiunge un punto scelto a caso con (x,y)



Punto fisso: $(0,0)$

curva: direttissima γ_1 e/o γ_2

Oss. 2 Due primitive della stessa forma differiscono per una funzione localmente costante, cioè costante sulle componenti connesse di Ω .

Dim. $V_1 - V_2 = \phi$ allora $\nabla \phi = \text{vettore nullo}$
e le funzioni con gradiente nullo sono costanti sui connessi.

Oss 3 Se $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, e ω è esatta in Ω_1 ed in Ω_2 ,
allora è esatta in $\Omega_1 \cup \Omega_2$ e la primitiva è
"l'unione" delle 2 primitive.

Se $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$, allora possono essere gnal

Esempio 3 $\omega = \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy$

$$\gamma(t) = (1+t^2 \sin(t^3), 2+\cos(t^6)) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Calcolare $\int_{\gamma} \omega$

La forma non è la solita, ed è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Una primitiva è

$$V(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2)$$

(senza vedere la primitiva, potrei sapere che è esatta se
controllo che
→ è chiusa
→ l'integrale su una curva che gira intorno all'origine
viene 0).

Ora uso la strategia 3 e faccio diff. tra valore negli estremi.

Esempio 4 $\omega = (y e^{xy}) dx + (x e^{xy} + e^{y^2}) dy$

$$\gamma(t) = (t + t^3, t - t^2) \quad t \in [0, 1]$$

$$\int_{\gamma} \omega.$$

ω è chiusa in \mathbb{R}^2 , quindi esatta

$$A_y = e^{xy} + xy e^{xy} \quad B_x = e^{xy} + xy e^{xy} \quad \text{☺}$$

Una primitiva è: $V(x, y) = e^{xy} + \text{primitiva di } e^{y^2} \quad \text{☹}$

La curva è semplice (prima componente), parte da $(0, 0)$ e arriva in $(2, 0)$

Essendo la forma chiusa, posso sostituire γ con

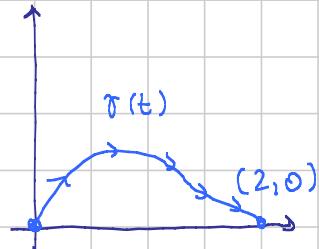
$$\gamma_1(t) = (t, 0) \quad t \in [0, 2]$$

e quindi

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega = \int_0^2 0 \, dt = 0$$

sulla prima componente
per colpa di $y e^{xy}$, sulla seconda

↑ Comp. per colpa di γ_1
che ha seconda comp. = 0



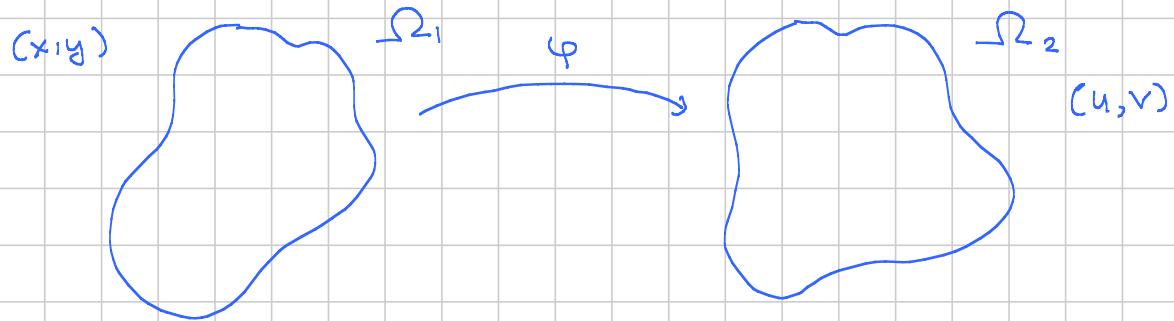
Oss. Veniva anche scrivendo la primitiva come

$$V(x, y) = e^{xy} + F(y)$$

↑ primitiva di e^{y^2}

e sostituendo gli estremi

Tornando agli inizi: perché non è corretto identificare le forme con i campi di vettori.



$$\varphi(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$$

$$\text{Curve } (\Omega_1) = \{ \text{curve } \gamma: [a, b] \rightarrow \Omega_1 \}$$

$$\text{Curve } (\Omega_2) = \{ \text{ " } \gamma: [a, b] \rightarrow \Omega_2 \}$$

Le curve vanno AVANTI: data $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega_1$, definisco

$$\varphi_{\#} \gamma: [a, b] \rightarrow \Omega_2$$

Come

$$\varphi_{\#} \gamma(t) = \varphi(\gamma(t)).$$

$$\text{Funzioni } (\Omega_1) = \{ f: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R} \}$$

$$\text{ " } (\Omega_2) = \{ f: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R} \}$$

Le funzioni vanno INDIETRO: data $g: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ posso definire

$$\varphi_{\#} g: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\varphi_{\#} g)(x) = g(\varphi(x)) \quad \forall x \in \Omega_1$$

Stessa cosa se in arrivo c'è \mathbb{R}^d o un insieme X qualunque. Morale: i campi di vettori vanno INDIETRO per composizione

Forme $(\Omega_1) = \{ \text{forme diff. su } \Omega_1 \}$
 " $(\Omega_2) = \{ \text{ " " " " } \Omega_2 \}$.

Voglio che vadano indietro salvando la dualità con le curve, cioè voglio definire

$$\varphi_{\#} : \text{Forme } (\Omega_2) \longrightarrow \text{Forme } (\Omega_1)$$

tale che

$$\int_{\varphi_{\#} \gamma} \omega = \int_{\gamma} \varphi_{\#} \omega \quad \begin{array}{l} \forall \text{ curva in } \Omega_1 \\ \forall \text{ forma in } \Omega_2 \end{array}$$

Come devo definire $\varphi_{\#} \omega$? È un conto da fare...
 e il risultato è che dà

$$\omega = A(u, v) du + B(u, v) dv$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\#} \omega &= [A(f(x, y), g(x, y)) f_x(x, y) + B(f(x, y), g(x, y)) g_x(x, y)] dx \\ &\quad + [A(\dots) f_y(x, y) + B(\dots) g_y(x, y)] dy \end{aligned}$$

La regola del tornare indietro per i campi di vettori è
 per le forme è diversa!!!

Brutalmente $\varphi_{\#} \omega = A(f, g) df + B(f, g) dg$
 $= A(f, g) (f_x dx + f_y dy) + B(f, g) (g_x dx + g_y dy)$



Per giustificare rigorosamente la regola, scrivo

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$$\begin{aligned}\varphi_{\#} \sigma(t) &= (f(x(t), y(t)), g(x(t), y(t))) \\ &= (u(t), v(t))\end{aligned}$$

e quindi

$$\int_{\varphi_{\#} \gamma} \omega = \int_a^b [A(u(t), v(t)) \dot{u}(t) + B(u(t), v(t)) \dot{v}(t)] dt$$

Ora con la chain rule

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) &= f_x(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + f_y(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \\ \dot{v}(t) &= \dots\end{aligned}$$

Sostituendo ottengo l'uguaglianza voluta

$$\int_{\varphi_{\#} \gamma} \omega = \int_{\gamma} \varphi_{\#} \omega$$

ANALISI 2

LEZIONE 058

Titolo nota

05/12/2017

SUPERFICI IN \mathbb{R}^3

Def. (Superficie) Una superficie è una funzione

$$\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (\mathbb{R}^3)$$

dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è un sottoinsieme non vuoto.

Def. (Supporto) Il supporto di una superficie è l'immagine cioè

$$\Phi(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Notazione Indicheremo con (u, v) le coordinate in Ω e con X, Y, Z le componenti di Φ , quindi

$$\Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$$

Ipotesi classiche Di solito si assume che

- Ω sia connesso, compatto, chiusura di un aperto con $\partial\Omega$ abbastanza regolare (ad esempio Ω = rettangolo, oppure Ω = disco)
- Φ con componenti di classe C^1 e magari iniettiva nella parte interna di Ω , con Φ_u e Φ_v lin. indip.

— o — o —

Esempio 1 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

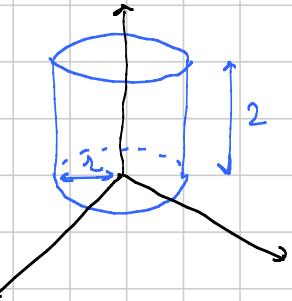
Allora il grafico di f è una superficie con parametrizz.

$$(u, v, f(u, v)) \quad (u, v) \in \Omega$$

Superficie CARTESIANA: grafico di una funzione

Esempio 2 Cilindro con asse lungo asse z

$$(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \quad \theta \in [0, 2\pi] \\ z \in [0, 2]$$



r è un parametro fisso

$$(r \cos u, r \sin u, v) \quad (u, v) \in \Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2]$$

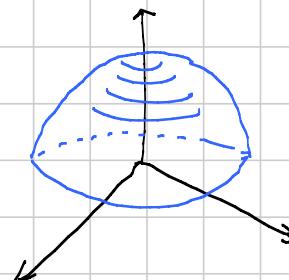
sviluppo piano del cilindro.

Esempio 3 (Semisfera con centro nell'origine, raggio 3 e $z \geq 0$)

In coord. sferiche si parametrizza come

$$(3 \cos \varphi \cos \theta, 3 \cos \varphi \sin \theta, 3 \sin \varphi)$$

$$(\theta, \varphi) \in \Omega = [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$$



Esercizio Parametrizzazione la superficie (hint: ha 2 comp. comp.)

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = 15, y^2 + z^2 \leq 18\}$$

PIANO TANGENTE E VETTORE NORMALE

Consideriamo una sup.

$$\Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \quad (u, v) \in \Omega$$

Consideriamo un p.t. $(u_0, v_0) \in \Omega$.

Def. Il piano tangente alla sup. nel punto $\Phi(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$ è quello di equazione parametrica

$$(t, s) \rightarrow \Phi(u_0, v_0) + t \Phi_u(u_0, v_0) + s \Phi_v(u_0, v_0)$$

Caso speciale della sup. cartesiana

$$\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

$$\Phi_u(u, v) = (1, 0, f_u(u, v))$$

$$\Phi_v(u, v) = (0, 1, f_v(u, v))$$

$$(t, s) \rightarrow (u_0, v_0, f(u_0, v_0)) + t (1, 0, f_u(u_0, v_0)) + s (0, 1, f_v(u_0, v_0))$$

Passando alla forma cartesiana si ottiene (verificare!)
il solito piano

$$z = f(u_0, v_0) + f_u(u_0, v_0)(x - u_0) + f_v(u_0, v_0)(y - v_0).$$

— o — o —

Esercizio Sia data una superficie, ed una curva a valori nella superficie.

Allora la retta tangente alla curva in un punto è contenuta nel piano tangente alla superficie.

La sup sia $(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$ con $(u, v) \in \Omega$

Sia $(u(t), v(t))$ con $t \in [a, b]$ una funzione a valori in Ω .

Considero la curva

$$\gamma(t) := (X(u(t), v(t)), Y(u(t), v(t)), Z(u(t), v(t)))$$

definita per $t \in [a, b]$. Questa ha valori nella sup.

Prendo $t_0 \in (a, b)$ e calcolo la retta tangente, ponendo $u(t_0) = u_0$ e $v(t_0) = v_0$.

$$t \rightarrow \gamma(t_0) + t \dot{\gamma}(t_0) \quad (\text{eq. param. retta tang.})$$

$$\gamma(t_0) = (X(u_0, v_0), Y(u_0, v_0), Z(u_0, v_0))$$

$$\dot{\gamma}(t_0) = (X_u(u_0, v_0) \dot{u}(t_0) + X_v(u_0, v_0) \dot{v}(t_0), \dots, \dots)$$

Quindi

$$\gamma(t_0) + t \dot{\gamma}(t_0) = \Phi(u_0, v_0) + t \underbrace{\dot{u}(t_0) \Phi_u(u_0, v_0) + t \dot{v}(t_0) \Phi_v(u_0, v_0)}_{\text{comb. lin. di } \Phi_u \text{ e } \Phi_v}$$

Oss. L'eq. del piano tangente è il Taylor di ordine 1 della $\Phi(u, v)$. Quando Φ_u e Φ_v sono lin. indip., il piano tangente è un vero piano affine.

Parantesi di algebra lineare

Dati due vettori v_1 e v_2 in \mathbb{R}^3 , come trovo un vettore v_3 ortogonale ad entrambi?

Con la formula misteriosa ottenuta sviluppando formalmente il determinante

$$v_1 \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \boxed{(b_1 c_2 - c_1 b_2, -a_1 c_2 + c_1 a_2, a_1 b_2 - b_1 a_2)}$$

↑
vettore causulco ortogonale a v_1 e v_2

Notazione Nel seguito indichiamo le componenti (M_1, M_2, M_3)

Perché è ortogonale? Se al posto di (i, j, k) metto (a_1, b_1, c_1) il determinante viene = 0 (2 righe uguali).

Se sviluppo rispetto alla prima riga

$$a_1 M_1 + b_1 M_2 + c_1 M_3 = 0$$

Stessa cosa se metto (a_2, b_2, c_2) .

Prop. Il vettore v_3 ottenuto dalla formula misteriosa è tale che (v_1, v_2, v_3) è una base di \mathbb{R}^3 (se v_1 e v_2 erano lin. indip.) con la stessa orientazione della base causulca. (cioè il det. della matrice di cambio di base è positivo).

Oss. $(M_1, M_2, M_3) = \underline{v_1 \wedge v_2}$,
prodotto vettore

Con qualche calcolo si vede che

$$\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = \|(M_1, M_2, M_3)\|$$

$$= \|v_1 \wedge v_2\|$$



= area parallelogrammo
generato da v_1 e v_2

$$= \text{Det} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \quad \text{Trasposta}$$

aggiunto dopo video:
qui servono delle
radici

$$= \text{Det} \begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle & \|v_2\|^2 \end{pmatrix}$$

Nel futuro useremo tutto questo con $v_1 = \Phi u$
 $v_2 = \Phi v$.

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 059

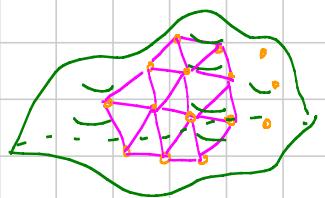
Note Title

06/12/2017

AREA DI UNA SUPERFICIE

Come NON si definisce

L'analogia con le curve porterebbe a "triangolare" una superficie, calcolare la somma delle aree dei triangoli, e fare il sup al variazione della triangolazione



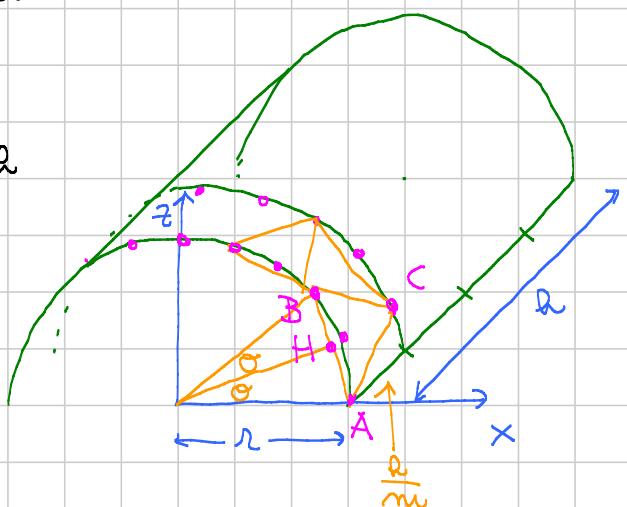
:(Il sup viene quasi sempre $+\infty$

ESEMPIO DI SCHWARZ

Cilindro di raggio r ed altezza h

Divido l'altezza in m parti

Divido la semicirc. in
 $2m$ parti



Calcoliamo l'area del singolo
triangolo, dopo aver posto
 $\theta := \frac{\pi}{2m}$

Base $AB = 2r \sin \theta$

$$A = (r, 0, 0) \quad B = (r \cos(2\theta), 0, r \sin(2\theta))$$

$$C = (r \cos \theta, \frac{r}{m}, r \sin \theta)$$

$$H = \left(r \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}, 0, r \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) = (r \cos^2 \theta, 0, r \sin \theta \cos \theta)$$

$$\text{Altezza } CH = \left[r^2 \cos^2 \theta (1 - \cos \theta)^2 + \frac{R^2}{m^2} + r^2 \sin^2 \theta (1 - \cos \theta)^2 \right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{R^2}{m^2} + r^2 (1 - \cos \theta)^2 \right]^{1/2}$$

$$\text{Area singolo triangolo} = \frac{1}{2} r^2 \sin \theta \left[\dots \right]^{1/2}$$

Quanti sono i triangoli, se considero l'intero cilindro?

Sono $4mn$ (ci sono m strisce, ciascuna con $4n$ Δ , $2n$ con la base da una parte e $2n$ dall'altra).

$$\text{Area totale} = 4mn r \sin \theta \left[\dots \right]^{1/2}$$

$$= 4mn r \sin \frac{\pi}{2n} \left[\frac{R^2}{m^2} + r^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{2n} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Dico fare il sup al variare di m ed n

- Pongo $n=k$, $m=k$ e faccio tendere $k \rightarrow +\infty$

$$r 4k^2 \sin \frac{\pi}{2k} \left[\frac{R^2}{k^2} + r^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{2k} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$4r \cancel{k^2} \underbrace{\sim \frac{\pi}{2k}}_{\cancel{k^2}} \left[\frac{R^2}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right]^{1/2} \rightarrow 2\pi r R \quad \text{😊}$$

Funzione analogo se prendo $n=k$, $m=k^a$ con $a < 2$
(verifica per esercizio)

- Pongo $n=k$, $m=k^3$ e faccio tendere $k \rightarrow +\infty$

$$4\pi k k^3 \sin\left(\frac{\pi}{2k}\right) \left[\frac{\pi^2}{k^6} + r^2 \left(1 - \cos\frac{\pi}{2k}\right)^2 \right]^{1/2}$$

$$4\pi k \cdot k^3 \sim \frac{\pi}{2k} \left[\frac{\pi^2}{k^6} + r^2 \left(\frac{\pi^2}{4k^2}\right)^2 \right]^{1/2} \rightarrow +\infty$$

$\sim \frac{1}{k^2}$

Interpretazione geometrica : EFFETTO FISARMONICA

Quando n è molto più grande, i triangoli tendono ad uscire dalla superficie, come nella fisarmonica chiusa. Quindi i triangoli non approssimano più la superficie.

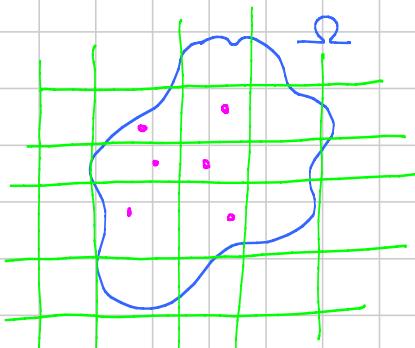
Con le curve non succedeva: le poligonalì tendevano ad approssimare le rette tangenti alla curva.

— o — o —

Come si definisce l'area nel caso di superfici regolari

$$\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ di classe } C^1$$

- Suddivido Ω in rettangoli R_i
- In ogni rettangolo R_i scelgo un pto (u_i, v_i) (taggo i rettangoli)



- Invece di considerare l'immagine di R_i mediante Φ (che sarebbe un pess. di sup), considero l'imm. di R_i mediante il differenziale di Φ in (u_i, v_i) . Questo è un pess. del piano tangente nel p.to della sup. con. a (u_i, v_i) . Questo pess. è un parallelogrammo.

Brutalmente: sto approx. la sup. con piastrelle a forma di parallelogrammi sistamate tangenti.

- Sommo le aree dei parallelogrammi
- Faccio il limite "alla Riemann", cioè dico che l'area è S se

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. A rettangolazione con rettangoli di diametro $\leq \delta$
 A taggig dei rettangoli

$$|\sum \text{aree parallelogrammi} - S| \leq \varepsilon.$$

Come si calcola? Tutto dipende dall'area del parallelogrammo.

Per le formule di algebra lineare della lez. prec.

$$\text{Area parallelogrammo } i = \text{Area}(R_i) \cdot \|\phi_u(u_i, v_i) \wedge \phi_v(u_i, v_i)\|$$

Sommando sui i e facendo il limite viene

$$\text{Area}(\text{sup}) = \iint_{\Omega} \|\phi_u \wedge \phi_v\| \, du \, dv$$

$$= \iint_{\Omega} \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} \, du \, dv$$

$$= \iint_{\Omega} \sqrt{\det((J\phi)^t (J\phi))} \, du \, dv$$

Caso cartesiano $(u, v, f(u, v))$

$$J\phi = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (J\phi)^t (J\phi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + f_u^2 & f_u f_v \\ f_u f_v & 1 + f_v^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Det} &= 1 + f_u^2 + f_v^2 + f_u^2 f_v^2 - f_u^2 f_v^2 \\ &= (1 + f_u^2 + f_v^2) \end{aligned}$$

$$\text{Area (sup)} = \iint_{\mathbb{R}^2} \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} \, du \, dv$$

$1 + f_u^2 + f_v^2$
 \uparrow
 \uparrow
 \uparrow
 $m_0^2 \quad m_1^2 \quad m_2^2$

ANALISI 2

LEZIONE 060

Note Title

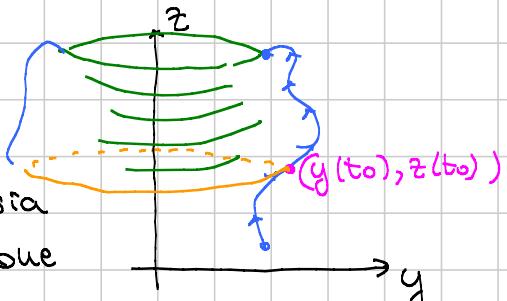
06/12/2017

Area di una sup.

$$\begin{aligned} \text{Area}(S) &= \iint_{\Omega} \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} \, du \, dv = \iint_{\Omega} \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| \, du \, dv \\ &= \iint_{\Omega} \sqrt{\det[(J\Phi)^t J\Phi]} \, du \, dv \quad \text{Matrice } 2 \times 2 \\ &\quad J\Phi = \text{matrice } 3 \times 2 \end{aligned}$$

SUPERFICI DI ROTAZIONE

Da una curva γ nel piano yz , sia S la superficie data dalla rotazione completa intorno all'asse z del sostegno di γ (che pensiamo semplice)

Parametrizzazione della sup.

La curva sia $\gamma(t) := (y(t), z(t)) \quad t \in [a, b]$

La sup. diventa

$$(y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta, z(t))$$

raggio

$$(t, \theta) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$$

Calcolo dell'area

$$\begin{pmatrix} x_t & y_t & z_t \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \cos \theta & \dot{y}(t) \sin \theta & \dot{z}(t) \\ -y(t) \sin \theta & y(t) \cos \theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = -\dot{z}(t) y(t) \cos \theta$$

$$M_2 = -\dot{z}(t) y(t) \sin \theta \quad (\text{det con segno cambiato})$$

$$M_3 = y(t) \dot{y}(t)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} &= \sqrt{\dot{z}(t)^2 y(t)^2 + \dot{y}(t)^2 y(t)^2} \\ &= y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} \\ &\quad \uparrow \\ &\text{sto pensando } y(t) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Area}(S) = \int_0^{2\pi} \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt d\theta$$

$$= 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

Teorema (Guldino 2) L'area di una sup. di rotazione è data da

$$\text{Area} = \text{lunghe}(\delta) \cdot 2\pi y_G$$

↓ Lunghe. della circ. descritta dal baricentro della curva durante la rotazione

Dim] Dalla formula di sopra

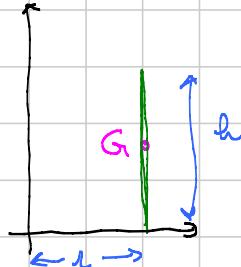
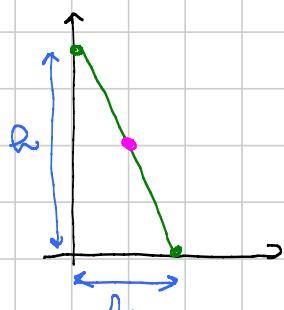
$$\text{Area} = \text{lunghe}(\delta) \cdot 2\pi \frac{\int_a^b y(t) \sqrt{\dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt}{\text{lunghe}(\delta)} =$$

$$= \text{Lengen}(\delta) \cdot 2\pi \frac{\int_{\gamma} y \, ds}{\text{Lengen}(\delta)} = \text{Lengen}(\delta) \cdot 2\pi y_G$$

— o — o —

Esempio 1 Cilindro

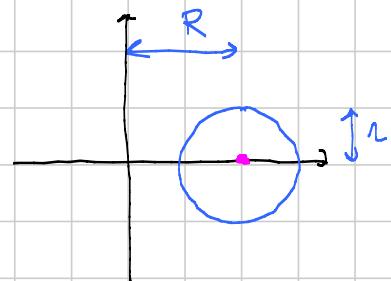
$$\text{Sup. Laterale} = R \cdot 2\pi r$$

Esempio 2 Cono

$$\begin{aligned} \text{Sup. Laterale} &= \sqrt{R^2 + r^2} \cdot 2\pi \frac{r}{2} \\ &= \pi r \sqrt{R^2 + r^2} \end{aligned}$$

Esempio 3 Tono

$$\text{Sup. Laterale} = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 r R$$

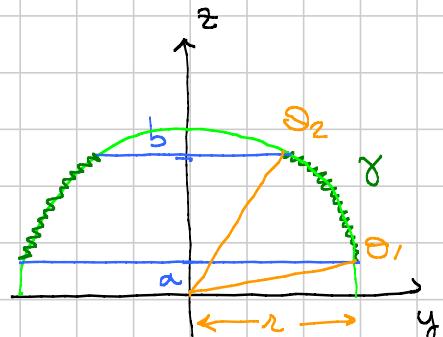
Esempio 4 Segmento sferico

Uso la formula generale

$$\text{Area} = 2\pi \int_{\gamma} y \, ds$$

$$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t) \quad t \in [\theta_1, \theta_2]$$

$$\begin{aligned} \text{Area} &= 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r \cos t \cdot r \, ds = 2\pi r^2 [\sin \theta_2 - \sin \theta_1] \\ &\quad y \sqrt{y^2 + z^2} \\ &= 2\pi r (b - a) \quad (\text{caso piano: } b = r, a = -r) \end{aligned}$$



Integrali superficiali

1 Notazioni

superficie
su cui integro
 $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

$f(x, y, z) d\sigma$
 ↑
 funzione che si integra
(definita almeno sul supporto)

d σ indica insieme che si tratta
di un integrale superficiale

2-3 Definizione e significato geometrico

Faccio somme alla Riemann o Darboux dividendo Ω
in rettangolini R_i e sommando

Area ($\Phi(R_i)$) · $\sup_{\text{sup}} \{ f \text{ in } \Phi(R_i) \}$ alla Darboux
 $f(\Phi(u_i, v_i))$ alla Riemann
 ↑
 p.t.o scelto
in R_i

4 Come si calcolano

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_{\Omega} f(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \cdot \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} du dv$$

Comportamento per riparametrizzazione (vale sia per l'area, sia per l'integrale superficiale)

Sia $\Phi_1: \Omega_1 \rightarrow \overset{\text{R}^3}{\underset{\text{R}^2}{\Omega_1}}$ una superficie (tutto regolare)

Sia $\psi: \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$, di classe C^1 invertibile con inversa di classe C^1 .

Considero la nuova sup. $\Phi_2: \Omega_2 \rightarrow \overset{\text{R}^3}{\Omega_2}$ definita da

$$\Phi_2(u, v) := \Phi_1(\psi(u, v))$$

Prop. Le due superfici Φ_1 e Φ_2 hanno la stessa area

Dim. Calcolo le matrici jacobiane

$$J\Phi_2(u, v) = J\Phi_1(\psi(u, v)) J\psi(u, v) \quad (\text{check dimensioni})$$

$$(J\Phi_2)^t \cdot (J\Phi_2) = (J\psi)^t (J\Phi_1)^t (J\Phi_1) J\psi$$

$$\det[\dots] = |\det J\psi|^2 \cdot \det[(J\Phi_1(\psi(u, v)))^t J\Phi_1(\psi\dots)]$$

$$\text{Area}(\Phi_2) = \iint_{\Omega_2} \sqrt{\det J\Phi_2^t J\Phi_2}$$

$$= \iint_{\Omega_2} |\det J\psi| \cdot \sqrt{\det[(J\Phi_1 \circ \psi)^t (J\Phi_1 \circ \psi)]}$$

$$= \iint_{\Omega_1} \sqrt{\det (J\Phi_1^t J\Phi_1)} = \text{Area}(\Phi_1)$$

ANALISI 2

LEZIONE 061

Note Title

07/12/2017

GRADIENTE, LAPLACIANO, DIVERGENZA, ROTORE

Prendono in input funzioni / campi di vettori e restituiscono funzioni / campi di vettori

Setting: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n$ $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funzione

$\vec{E}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \circ \mathbb{R}^3$ a seconda dei casi

$$\vec{E}(x, y, z) = (A(x, y, z), B(x, y, z), C(x, y, z))$$

GRADIENTE

funzione \rightarrow vettore

$$\nabla f(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$$

In n variabili ∇f è il vettore che ha come componenti

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$$

LAPLACIANO

funzione \rightarrow funzione

In due variabili

$$\Delta f(x, y) = f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)$$

Delta

Oss Il Laplaciano è la traccia della matrice Hessiana.

Se $f(x, y)$ è convessa, allora $\Delta f(x, y) \geq 0$.

(Non vale il viceversa)

In n variabili

$$\Delta f(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1, \dots, x_n)$$

DIVERGENZA

Vettore \rightarrow funzione

In due variabili

$$\vec{E}(x, y) = (A(x, y), B(x, y))$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = A_x + B_y$$

In 3 variabili

$$\operatorname{div} \vec{E} = A_x + B_y + C_z$$

In n variabili*i*-esima componente

$$\operatorname{div} \vec{E} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_i}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$$

ROTORE

Vettore \rightarrow Vettore

CURL in inglese

Si fa solo per campi in \mathbb{R}^3

Si ottiene sviluppando formalmente il det. della matrice

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} C_y - B_z, & -C_x + A_z, & B_x - A_y \\ \end{pmatrix}$$

$=: \operatorname{rot} \vec{E}$

In due variabili si definisce pensando di estendere con $C=0$

$$\operatorname{rot}(A, B) = \operatorname{rot}(A, B, 0) = (0, 0, B_x - A_y)$$

Notazioni dei fisici

Gradiente : $\nabla \leftarrow \text{Nabla}$

Laplaciano : ∇^2

Divergenza : $\text{div } \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E}$

Rotore : $\text{rot } \vec{E} = \nabla \wedge \vec{E}$

Finestra sul futuro : il rotore è il caso speciale in dim. 3 di un oggetto molto più generale, che è il differenziale delle 2-forme, che viene una 2-forma.

— o — o —

PROPRIETÀ BASE

$$\text{div } \nabla f = \Delta f$$

$$\text{div}(f_x, f_y, f_z) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$

$$\text{rot } \nabla f = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}$$

$$= (f_{zy} - f_{yz}, -f_{zx} + f_{xz}, f_{yx} - f_{xy}) \quad \text{Schwarz.}$$

Oss. Funziona anche in dim 2 con il rotore dei fisici

Dim. dei fisici : la 2^a e 3^a riga sono lin. dip.

$$\text{div}(\text{rot } \vec{E}) = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = (C_y - B_z, -C_x + A_z, B_x - A_y)$$

$$\text{div}(\text{rot } \vec{E}) = C_y - B_z - C_x + A_z + B_x - A_y = 0.$$

Molte operazioni non hanno senso:

$$\text{rot}(\text{div } \vec{E}) \quad \Delta(\nabla f) \quad \text{div}(\Delta f) \quad \dots$$

— o — o —

GRADIENTE NULLO / UGUALE

- Se $\nabla f = 0$ in Ω , allora f è localmente costante in Ω , quindi costante se Ω è connesso
- Se $\nabla f_1 = \nabla f_2$ in Ω , e Ω è connesso, allora

$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f_1(x) = f_2(x) + c \text{ in } \Omega$$

ROTORE NULLO / UGUALE

- Se $\text{rot}(\vec{E}) = 0$ in Ω , allora la forma diff.

$$\omega = A dx + B dy + C dz$$

è chiusa in Ω . Se Ω è semipl. connesso, allora ω è esatta. cioè

$$\exists f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } \vec{E} = \nabla f$$

Oss. Vale la stessa cosa in \mathbb{R}^2 con il rotore dei fisici.

Oss. Se $\text{rot } \vec{E} = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, allora

$$\vec{E} = \nabla f + c \cdot \text{campo associato alla "solita"}$$

↑ ↑
funzione cost.

- Se $\operatorname{rot} \vec{E}_1 = \operatorname{rot} \vec{E}_2$, e Ω è semp. connesso, allora

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 + \nabla f \quad (\text{esiste } f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c.})$$

DIVERGENZA NULLA / UGUALE

- Se $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, allora (teorema per ora misterioso) sotto opportune misteriose ipotesi su Ω , vale che

$$\text{esiste campo } \vec{F} \text{ t.c. } \vec{E} = \operatorname{rot} \vec{F}$$

Le ipotesi misteriose sono ok se Ω è **stellato**

In generale basta 2-connesso, cioè ogni mappa continua da $S^2 \rightarrow \Omega$ si estende ad una mappa dalla sfera piena in Ω .

($\mathbb{R}^3 \setminus p$ va bene, $\mathbb{R}^3 \setminus$ retta sì)

- Se $\operatorname{div} \vec{E}_1 = \operatorname{div} \vec{E}_2$, e Ω è 2-connesso, allora

$$\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \operatorname{rot} \vec{F}$$

The slope of a scalar function has no curl.

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$$

The curl of a vector function has no divergence.

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{E}) = 0$$

The divergence of the slope of a scalar function is its concentration.

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f$$

The concentration of a vector function is the slope of its divergence, together with the curl of its curl.

$$\pm \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) \mp \nabla(\operatorname{div} \vec{E}) = (\Delta A, \Delta B, \Delta C)$$

Esercizio Mettendo bene i segni questa identità torna (vedi AM2-16).

[Dall'articolo originale di Maxwell, vedi CURL su WIKI].

ANALISI 2

-

LEZIONE 062

Note Title

07/12/2017

TEOREMA DI GAUSS - GREEN

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Setting : caso in dimensione 2.

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funzione

$\vec{E}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo di vettori

$$\vec{E}(x, y) = (A(x, y), B(x, y))$$

Teorema (Gauss - Green) Sotto opportune ipotesi vale

$$\iint_{\Omega} f \cdot \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} f \cdot \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds - \iint_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle \, dx \, dy$$

normale esterna
a Ω

Teorema della divergenza Sotto opportune ipotesi vale

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

Commenti sulle tesi

- In Gr-G il primo e ultimo integrale sono integrali doppi su Ω . Sono integrali di funzione.
- Il primo integrale al RHS è l'integrale di una funzione

su "una" curva. Si intende che $\partial\Omega$ è l'unione dei supporti di un numero finito di curve semplici

- Con \vec{n} si indica il VERSORE normale esterno al bordo di Ω .

Come calcolo \vec{n} ?

- Scrivo una parametrizzazione dei vari pezzi di $\partial\Omega$.

- Se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ è la param. di un pezzo, ed il verso di percorrenza è tale che Ω si trova a sx dell'orario che percorre la curva, allora il versore tangente alla curva è

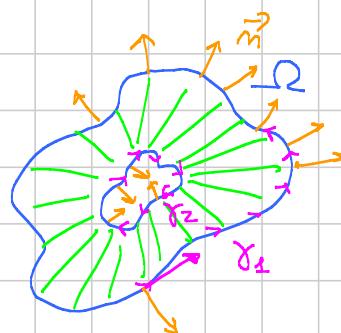
$$\left(\frac{\overset{\circ}{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \frac{\overset{\circ}{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) = \text{tangente}$$

- \vec{n} si trova facendo una rotazione di 90° in verso orario
Quindi

$$\vec{n} = \left(\frac{\overset{\circ}{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, -\frac{\overset{\circ}{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right)$$

Vale se la curva
è nel verso giusto

Oss. Più formalmente, posso dire che (normale, tangente) è una base di \mathbb{R}^2 ortogonale e orientata come la base canonica.



Gli integrali auxiliari ai RHS dei due teoremi si possono riscrivere come integrali di forme diff., in particolare

$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \int_{\gamma} (-Bdx + Ady)$$

curva o sistema di
curve che percorre $\partial\Omega$
lasciando Ω a sinistra

Dim Usando \vec{n} come calcolato sopra otteniamo

$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \int_a^b [A(x(t), y(t)) \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} - B(x(t), y(t)) \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}] dt$$

$$= \int_a^b [A(x(t), y(t)) \dot{y}(t) - B(x(t), y(t)) \dot{x}(t)] dt$$

$$= \int_{\gamma} -Bdx + Ady.$$

Riscrittura s del teorema della divergenza

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy = \int_{\partial\Omega^+} -Bdx + Ady$$

sistema di curve
che percorre $\partial\Omega$ con verso giusto.

Riscrittura 2 del teorema della divergenza

$$\int_{\partial\Omega^+} Adx + Bdy = \iint_{\Omega} (-Ay + Bx) dx dy$$

Dim Si tratta di applicare la riscrittura 1 al campo

$$\vec{E} = (B, -A)$$

— o — o —

Due casi speciali di G-G

$$\iint_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} dx dy = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds - \iint_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle dx dy$$

• Caso 1: $f = u$, $\vec{E} = \vec{\nabla}v$ con u, v funzioni

$$\iint_{\Omega} u \Delta v = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} ds - \iint_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx dy$$

\uparrow \uparrow
 $\operatorname{div}(\nabla v)$ $\langle \nabla v, \vec{n} \rangle$
 $=$ derivata direzionale

• Caso 2: $f = u$, $\vec{E} = \vec{v}$ vettore costante

$$0 = \int_{\partial\Omega} u \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle ds - \iint_{\Omega} \langle \nabla u, \vec{v} \rangle dx dy$$

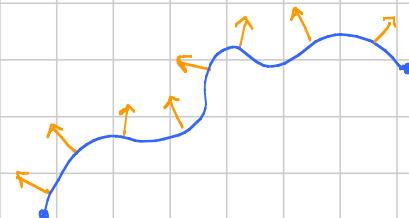
$$= - \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{v}} dx dy$$

Altra interpretazione del RHS del teorema della divergenza

[INTEGRALI DI FLUSSO] Caso 2 dimensionale

Sia data una **curva orientata**, cioè una curva semplice su cui ho assegnato in modo continuo un verso normale.

Sia dato un campo \vec{E} , definito almeno sul supporto della curva



$$\int_{\gamma} \langle \vec{E}, \vec{m} \rangle ds =: \text{flusso di } \vec{E} \text{ attraverso } \gamma$$

orientata

Rilettura teo. divergenza

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{m} \rangle ds$$

L'integrale della divergenza di \vec{E} all'interno di Ω è uguale al flusso di \vec{E} uscente da Ω .

Interpretazione ciclistica Se faccio un giro in bici lungo una curva semplice e il vento lo sento sempre da destra, di sicuro il campo velocità del vento ha $\operatorname{div} \neq 0$, quindi non è un notore.

ANALISI 2

LEZIONE 063

Note Title

12/12/2017

Teo. della divergenza e Gauss-Green in dim. 2

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega^+} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

$$\iint_{\Omega} (Ax + By) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega^+} A \, dy - B \, dx = \int_{\partial\Omega^+} (-B \, dx + A \, dy)$$

$$\int_{\partial\Omega^+} (Cx + Dy) = \iint_{\Omega} (D_x - C_y) \, dx \, dy$$

$$\iint_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds - \iint_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle \, dx \, dy$$

Oss. L'ultima formula (teo. di Gauss-Green) è la formula di integrazione per parti in \mathbb{R}^2 .

Equivalenti tra teo. div. e G.G.

GG \Rightarrow teo. div. Prendo $f \equiv 1$.

teo. div. \Rightarrow G.G. Calcoliamo $\operatorname{div}(f \vec{E})$

$$\operatorname{div}(f \vec{E}) = \operatorname{div}(fA, fB) = (fA)_x + (fB)_y$$

$$= f_x A + f A_x + f_y B + f B_y$$

$$= \langle \nabla f, \vec{E} \rangle + f \operatorname{div} \vec{E}$$

Oss. In ogni numero di variabili vale la formula

$$\operatorname{div}(f\vec{E}) = \langle \nabla f, \vec{E} \rangle + f \operatorname{div} \vec{E}$$

Applichiamo il teo. della div. al campo $f\vec{E}$

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div}(f\vec{E}) dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle f\vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

$$\left. \begin{array}{c} \{ \\ \downarrow \end{array} \right\} \quad \quad \quad \begin{array}{c} " \\ \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds \end{array}$$

$$\iint_{\Omega} (f \operatorname{div} \vec{E} + \langle \nabla f, \vec{E} \rangle) dx dy$$

Riorganizzando i termini otteniamo G.O.

— o — o —

Basta dim. il teorema della divergenza.

Caso speciale degli insiemi normali) Supponiamo Ω insieme normale risp. all'asse x , cioè

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

Supponiamo φ e ψ di classe C^1 (ma C^1 a tratti va bene uguale).

Supponiamo che \vec{E} sia di classe C^1 in un aperto $\Omega' \supset \Omega$.

Allora vale la formula

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

[Dim.] Dens dim. che

$$\iint_{\Omega} (A_x + B_y) dx dy = \int_{\partial\Omega^+} A dy - B dx$$

Dimostra che vale

$$\iint_{\Omega} B y \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega^+} -B \, dx$$

$$\iint_{\Omega} A_x \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega^+} A \, dy$$

$\partial\Omega$ è fatto da 4 curve

$$\delta_1(t) := (t, \varphi(t)) \quad t \in [a, b] \quad \quad \delta_2(t) := (b, t) \quad t \in [\varphi(b), \varphi(b)]$$

$$\delta_2(t) := (t, \varphi(t)) \quad t \in [a, b] \quad \delta_4(t) = (a, t) \quad t \in [\varphi(a), \varphi(b)]$$

$$\int_{\partial\mathcal{E}^+} \omega = \int_{\overline{\sigma}_1} + \int_{\overline{\sigma}_2} - \int_{\overline{\sigma}_3} - \int_{\overline{\sigma}_4}$$

sistemano le orientazioni.

Dim. B

$$\iint_{\Omega} B_y(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy B_y(x, y)$$

$$= \int_a^b d x \left[B(x, y) \right]_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)}$$

$$= \int_a^b B(x, \varphi(x)) dx - \int_a^b B(x, \varphi(x)) dx$$

Calcolo $\int B dx$

$$\int_{\delta_1} B dx = \int_a^b B(t, \varphi(t)) \dot{\varphi}(t) dt$$

$$-\int_{\delta_3} B dx = -\int_a^b B(t, \varphi(t)) \dot{\varphi}(t) dt$$

$$\int_{\delta_2} B dx = \int_{\delta_4} B dx = 0 \text{ per colpa di } \dot{\varphi}(t) \equiv 0.$$

Dim. A) Idea: considerare la funzione

$$G(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A(x, y) dy$$

Per analisi 1 vale

$$G(b) - G(a) = \int_a^b G'(x) dx$$

Calcolo $G'(x)$ con gli int. dip. da parametro

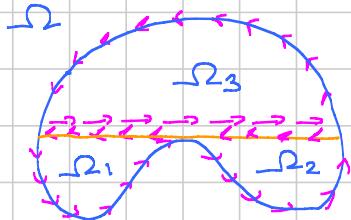
$$G'(x) = A(x, \psi(x)) \dot{\psi}(x) - A(x, \varphi(x)) \dot{\varphi}(x) + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A_x(x, y) dy$$

Vado a sostituire

$$\begin{aligned} \int_a^b G'(x) dx &= \int_a^b A(x, \psi(x)) \dot{\psi}(x) dx & \int_{\delta_1} A dy \\ &- \int_a^b A(x, \varphi(x)) \dot{\varphi}(x) dx & - \int_{\delta_3} A dy \\ &+ \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A_x(x, y) dy & \int_{\delta_2} \int A_x(x, y) dx dy \\ &= G(b) - G(a) & \int_{\delta_2} A dy - \int_{\delta_4} A dy \end{aligned}$$

Riorganizzando i parti si ha la tesi.

Conclusione brutale Oggi Ω si spetta come unione di insiemi normali e osservi le cancellazioni.



In Ω_1, Ω_2 e Ω_3 vale il teorema.

Osservi che i bordi creati artificialmente vengono percorsi nei 2 versi opposti e quindi si cancellano.

— o — o —

Casi preparatori ad una dim. più rigorosa

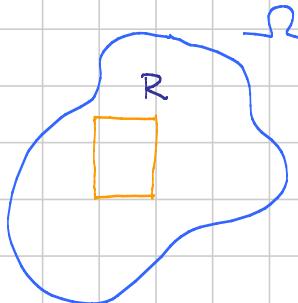
Caso 1 Il supporto di \vec{E} è contenuto in un rettangolo R con

$$\text{clos}(R) \subseteq \text{Int}(\Omega)$$

Dim. Le componenti di \vec{E} sono nulle fuori di R .

$$\iint_{\Omega} \text{div}(\vec{E}) dx dy = \iint_{R} \text{div}(\vec{E}) dx dy$$

fuori
vale 0



$$= \int_{\partial R} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = 0 = \int_{\partial \Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

\uparrow
 $\vec{E} = 0$
su ∂R

\uparrow
 $\vec{E} = 0$
su $\partial \Omega$.

R è normale, quindi vale il teo.

Caso 2 Il supporto di \vec{E} è contenuto in un rettangolo R tale che

$$\Omega \cap R$$

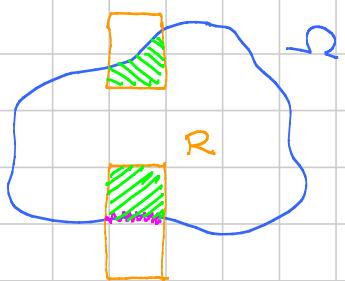
è un insieme normale (sopra / sotto o dx / sx)

Dim.

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy = \iint_{\Omega \cap R} \operatorname{div} \vec{E} dx dy$$

$\uparrow_{\Omega \cap R}$

$\vec{E} = 0$ fuori
di R



$$= \int_{\partial(\Omega \cap R)} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \int_{\partial \Omega \cap R} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

$\uparrow_{\Omega \cap R \text{ è normale}}$

l'unico dei 4
punti di $\partial(\Omega \cap R)$
su cui $\vec{E} \neq 0$

$$= \int_{\partial \Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

$\uparrow_{\text{sul resto di } \partial \Omega}$

$\vec{E} = 0.$

— o — o —

ANALISI 2 - LEZIONE 064

Note Title

12/12/2017

Teo. div. (caso abbastanza generale)

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

Ipotesi su Ω :

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è compatto e per ogni $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$ esiste un rettangolo R centrato in (x_0, y_0) tale che $\Omega \cap R$ è un insieme normale alto/basso oppure dx/dx e la funzione che descrive l'insieme normale è di classe C^1 .

Ipotesi su \vec{E} :

- esiste un aperto $\Omega' \supseteq \Omega$ in cui le componenti di \vec{E} sono di classe C^1 .

— o — o —

La dimostrazione sfrutta le PARTIZIONI DELL'UNITÀ
 che è una tecnica
 che permette il passaggio

cose valide localmente \rightsquigarrow cose valide globalmente

Div.Passo 1: costruzione di un ricoprimento

Ad ogni p.t. $(x, y) \in \Omega$ associo un rettangolo $R_{(x,y)}$ che ha centro in (x, y) e costruito così:
 → se $(x, y) \in \text{Int}(\Omega)$, faccio in modo che

$$\text{Clos}(R_{(x,y)}) \subseteq \text{Int}(\Omega)$$

→ Se $(x, y) \in \partial \Omega$, scegli $R_{(x,y)}$ in modo che $\Omega \cap R_{(x,y)}$ sia sormontata come nelle ipotesi messe all'inizio.

Passo 2: sottocoperto finito Per costruzione

$$\Omega \subseteq \bigcup_{(x,y) \in \Omega} \text{Int}(R_{(x,y)})$$

Essendo Ω compatto, basta sottocopr. finito

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^n \text{Int}(R_i)$$

Passo 3: partizione dell'unità Per Analisi 1, per ogni $i = 1, \dots, n$ esiste

$$\varphi_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

di classe C^∞ tale che

$$\varphi_i(x, y) \neq 0 \quad (\Rightarrow (x, y) \in \text{Int}(R_i))$$

\uparrow
e anzi > 0

(quindi φ_i è positiva dentro e nulla fuori)

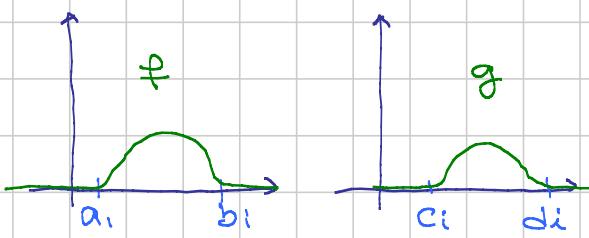
Sia $R_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$

basta prendere

$$\varphi_i(x, y) = f_i(x) g_i(y)$$

\uparrow
 > 0 solo in
 $\in (a_i, b_i)$

\uparrow
 > 0 solo in
 $\in (c_i, d_i)$



Pongo

$$\psi_i(x, y) := \frac{\varphi_i(x, y)}{\sum_{i=1}^n \varphi_i(x, y)}$$

Dico che il denominatore è >0 per ogni $(x, y) \in \Omega$, anzi per ogni

$$(x, y) \in \bigcup_{i=1}^n \text{Int}(R_i)$$

quindi le ψ_i sono ben definite in un intorno aperto di Ω .

Inoltre

$$\sum_{i=1}^n \psi_i(x, y) = 1 \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

Inoltre, ogni $\psi_i(x, y)$ è di classe C^∞ , positiva in $\text{Int}(R_i)$ e nulla altrove.

Questa è una partizione dell'unità subordinata alla scelta degli insiemi R_i .

Passo 4: gran finale

$$\iint_{\Omega} \text{div} \vec{E} = \iint_{\Omega} \text{div} \left[\left(\sum_{i=1}^n \psi_i \right) \vec{E} \right] = \iint_{\Omega} \text{div} \left[\sum_{i=1}^n (\psi_i \vec{E}) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^n \iint_{\Omega} \text{div} (\psi_i \vec{E}) \, dx \, dy$$

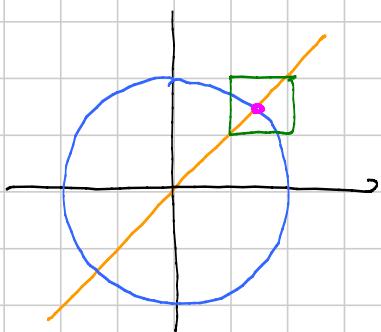
↑
campo nullo fuori da R_i , e R_i
ricade nei due casi speciali del
finale della lezione precedente

$$= \sum_{i=1}^n \int_{\partial \Omega^+} \langle \psi_i \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

$$= \int_{\partial \Omega} \langle \sum_{i=1}^n \psi_i \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds = \int_{\partial \Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds.$$

— o — o —

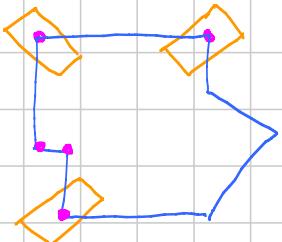
Oss. Alcuni testi fanno una dim. di questo tipo usando solo i quadrati. Non funziona nemmeno nel caso del cerchio perché non si può garantire un quadrato in cui vale la rapp. alto/basso o dx/sx



In ogni quadrato centrato nel punto segnato non vale la rappresentazione desiderata come insieme normale.

Oss. La dimostrazione fatta copre tutti i casi in cui $\partial\Omega$ è discio a sufficienza.

Non copre certi casi in cui il bordo ha degli "angoli" perché non è garantita la rapp. alto/basso o dx/sx .



Per uscirne occorre un enunciato locale che ammetta rettangoli rotati, cioè

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

quando $\vec{E} = 0$ fuori da R (rettangoli rotati).

Questo è un esercizio che si può fare

→ mediante cambio di variabili

→ mediante decomposizione in insiemi normali.

(Basta dividere in 3 pezzi).

— o — o —

Gauss-Green e teo. della divergenza valgono in ogni dimensione, ma si perde l'interpretazione con le forme differenziali.

In \mathbb{R}^3 l'enunciato diventa

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

integrare triplo superficie
 integrare superficiale

normale esterna a $\partial\Omega$

Il RHS è un integrale di flusso attraverso una superficie orientata.

Come si calcolerebbe...

→ scrivo una parametrizzazione della sup.

$$\Phi : \Omega' \rightarrow \partial\Omega \quad (\Omega' \subseteq \mathbb{R}^2)$$

→ calcolo il vettore normale alla sup con la formula

$$\Phi_u \times \Phi_v = (M_1, M_2, M_3)$$

→ aggiusto il verso (mettendo segno - se serve) in modo che punti all'esterno

$$\rightarrow \text{a quel p.t.} \quad \vec{n} = \frac{\pm 1}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}} (M_1, M_2, M_3)$$

$$= (m_1, m_2, m_3)$$

→ Finalmente

$$\iint_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \iint_{\Omega'} (A m_1 + B m_2 + C m_3) \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} du dv$$

integgr. sup.

Conclusione

$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \iint_{\Omega'} (AM_1 + BN_2 + CM_3) du dv$$

scelto in modo che sia la normale esterna.

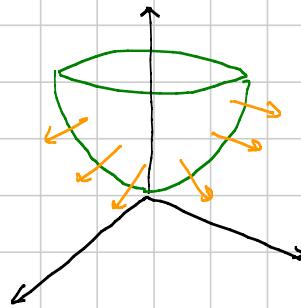
$\Omega' \subseteq \mathbb{R}^2$ ed è
dove variano u e v

La dim. in dim 3 è analoga a quella in dim 2, fatta a partire dagli insiemi normali.

Esempio $z = x^2 + y^2$

$$(u, v, u^2 + v^2)$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix}$$



$$(M_1, M_2, M_3) = (-2u, -2v, 1)$$

questa punta
verso l'alto

Quindi se voglio il flusso verso il basso

$$(M_1, M_2, M_3) = (2u, 2v, -1)$$

— o — o —

Note Title

13/12/2017

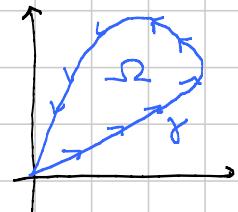
Esercizi classici su G - G e teo. divergenza:

- ① Dato un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ descritto mediante il bordo, calcolare l'area o l'integrale su Ω di una funzione data.
- ② Calcolo di integrali di flusso lungo curve (o superfici).

Esempio 1 $\gamma(t) = (t-t^2, t-t^3)$ $t \in [0,1]$.

Visto a suo tempo: è una curva semplice e chiusa

Calcolare area e coordinate del baricentro di Ω .



Teo. div.

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{E}) dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

$$= \int_{\partial\Omega^+} A dy - B dx$$

Cerco un campo \vec{E} t.c. $\operatorname{div} \vec{E} = 1$. Una possibilità è

$$\vec{E}(x,y) = (0, y)$$

A B

Dalla formula sopra:

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Omega) &= \iint_{\Omega} 1 dx dy = \iint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{E}) dx dy \\ &= \int_{\partial\Omega^+} A dy - B dx \quad = \int_{\gamma} -y dx \end{aligned}$$

Occhio all'orientazione: γ percorre $\partial\Omega$ nel verso giusto, cioè lasciamolo a sx.

$$\begin{aligned} - \int_{\gamma} y \, dx &= - \int_0^1 \underbrace{(t-t^3)(1-2t)}_{y} \, dt \\ &= - \int_0^1 (t-2t^2-t^3+2t^4) \, dt = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = \dots \end{aligned}$$

In alternativa potevo usare $\vec{E}(x, y) = (x, 0)$ ottenerlo

$$\begin{aligned} \text{Area } (\Omega) &= \int_{\gamma} x \, dy = \int_0^1 (t-t^3)(1-3t^2) \, dt \\ &= \int_0^1 (t-3t^3-t^2+3t^4) \, dt = \dots = \text{controllare che venga uguale.} \end{aligned}$$

Oss. Cosa hanno in comune le 2 formule?

S: ottengono l'una dall'altra integrandi per parti

$$\int_0^1 (t-t^3)(1-3t^2) \, dt = [\dots]_0^1 - \int_0^1 (1-2t)(t-t^3) \, dt$$

\downarrow \downarrow
 deriv. prim. " "
 perché γ è
 chiusa

Formule per l'area di una regione Ω dato il bordo

$$\text{Area } (\Omega) = \int_{\partial\Omega^+} x \, dy = - \int_{\partial\Omega^+} y \, dx$$

occhio al verso!

Si possono ottenere formule misurando le precedenti

$$\text{Area } (\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega^+} (x \, dy - y \, dx) = \int_{\partial\Omega^+} \left(\frac{1}{3} x \, dy - \frac{2}{3} y \, dx \right)$$

Tornando all'esempio, per avere le coord. del baricentro servono

$$\iint_{\Omega} x \, dx \, dy$$

$$\iint_{\Omega} y \, dx \, dy$$

Facciamo il 1^o. Sia \vec{E} con $\operatorname{div} \vec{E} = x$, ad esempio

$$\vec{E}(x, y) = (0, xy) \text{ oppure } \left(\frac{x^2}{2}, 0 \right)$$

$$\iint_{\Omega} x \, dx \, dy = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega^+} (A \, dy - B \, dx)$$

$$= \int_{\partial\Omega^+} -xy \, dx = - \int_{\gamma} xy \, dx$$

$$= - \int_0^1 (t-t^2)(t-t^3) \underbrace{(1-2t) \, dt}_{dx} = \text{si fa...}$$

$$\iint_{\Omega} y \, dx \, dy = \int_{\gamma} (A \, dy - B \, dx) \quad (A, B) = (xy, 0)$$

$$= \int_{\gamma} xy \, dy = \int_0^1 (t-t^2)(t-t^3)(1-3t^2) \, dt$$

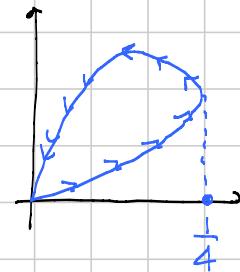
= si fa...

— o — o —

Oss. Volendo **NON** usare questi strumenti, avrei dovuto scrivere Ω come insieme normale, cosa in questo caso possibile

Normale asse x

$$\begin{matrix} (t-t^2, t-t^3) \\ \text{``} \quad \text{``} \\ x \quad y \end{matrix}$$



Ricavo t in funzione di x

$$-t^2 + t = x \rightarrow t^2 - t + x = 0 \rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$$

Ora possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \Omega := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, & \quad \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} \right)^3 \leq y \leq \\ & \leq \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2} - \left(\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2} \right)^3 \} \end{aligned}$$

$$\text{Area } (\Omega) = \int_0^{\frac{1}{4}} dx \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} 1 dy = \text{con passiuta forse si fa.}$$

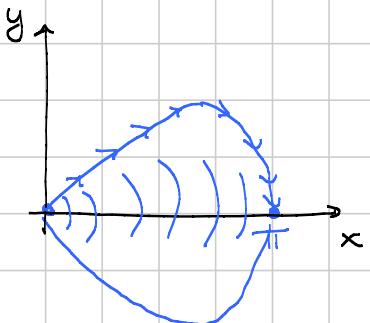
— o — o —

Esempio 2 $\gamma(t) = (t + \sin t, \sin t)$ $t \in [0, \pi]$

① Stabilire se la curva è chiusa e/o semplice.

$x(t)$ è strett. cresc. \Rightarrow semplice, ma non chiusa

② Detta Ω la regione tra la curva e l'asse x , calcolare il volume del solido che si ottiene ruotando Ω attorno all'asse x .



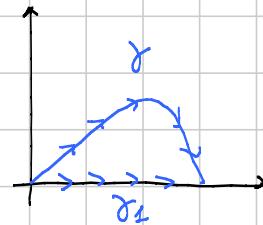
Oss. Esplicitare come insieme normale non è possibile con le sole funz. elementari (dovrei risolvere $x = t + \sin t$)

Per il volume potrei usare Gradius, ma dovrei calcolare l'area per poi semplificarla 😊.
In realtà basta usare la formula

$$\text{Vol} = 2\pi \iint_{\Omega} y \, dx \, dy = 2\pi \int_{\partial\Omega^+} (A \, dy - B \, dx) \quad (A, B) = (xy, 0)$$

$$= 2\pi \int_{\partial\Omega^+} xy \, dy$$

Ora $\partial\Omega^+$ è fatto da 2 curve



- $\gamma_1(t) = (t, 0) \quad t \in [0, \pi] \rightarrow$ perno di asse x
- $\gamma(t)$ al contrario

$$\int_{\partial\Omega^+} xy \, dy = \int_{\gamma_1} xy \, dy - \int_{\gamma} xy \, dy = - \int_0^{\pi} (t + \sin t) \sin t \cos t \, dt$$

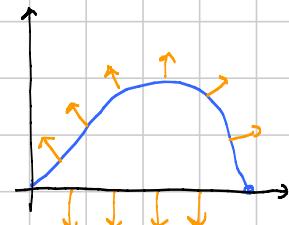
$\underbrace{\phantom{\int_0^{\pi} (t + \sin t) \sin t \cos t \, dt}}_{0} \quad \underbrace{\phantom{\int_0^{\pi} (t + \sin t) \sin t \cos t \, dt}}_{x} \quad \underbrace{\phantom{\int_0^{\pi} (t + \sin t) \sin t \cos t \, dt}}_{y} \quad \underbrace{\phantom{\int_0^{\pi} (t + \sin t) \sin t \cos t \, dt}}_{dy}$

(sono 0 sia y
sia dy) = si fa...

- ③ Calcolare il flusso attraverso γ "verso l'alto" del campo vettoriale

$$\vec{E} = (x + y \arctan(e^{y^2}), \log(1+x^2) + y)$$

Idea 1 : Calcolo il versore normale esterno prenendendo il tangente alla curva ruotato di 90° in senso antiorario



$$\vec{\gamma}(t) = (1 + \cos t, \cos t) \rightsquigarrow (-\cos t, 1 + \cos t)$$

Ora basta calcolare

$$\int_0^{\pi} [A(t + \sin t, \sin t) (-\cos t) + B(t + \sin t, \sin t) (1 + \cos t)] dt$$

dove $\vec{E} = (A, B)$ = simpatico cauto ☺

Idea 2: usare teo. div.

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy &= \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds \\ &= \int_{\substack{\text{supp } \tau_1 \\ \uparrow}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds + \int_{\substack{\text{supp } \tau \\ \uparrow}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds \\ &\quad \text{quello che voglio} \\ &\quad (\text{e' } \vec{n} \text{ che voglio e'} \\ &\quad \text{quello esterno a } \Omega) \end{aligned}$$

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy = \iint_{\Omega} 2 dx dy = 2 \text{ Area } (\Omega)$$

$$\begin{aligned} \int_{\text{supp } \tau_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds &= \int_0^{\pi} -B ds \\ &\quad \uparrow \quad \vec{\gamma}_1(t) = (0, t) \rightsquigarrow ds = dt \\ &= \int_0^{\pi} -\log(1+t^2) dt = \text{tranquillo per} \\ &\quad \text{parti.} \\ &\quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \end{aligned}$$

Note Title

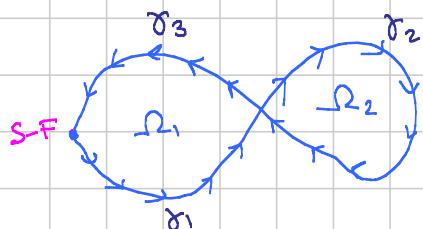
13/12/2017

Esempio 1 Calcola con le formule per l'area.

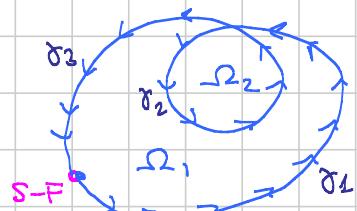
Cosa ottengo se calcolo

$$\int_{\gamma} x \, dy$$

(formula per l'area)

dove γ è una delle curve in figura?

$$\text{Area}(\Omega_1) - \text{Area}(\Omega_2)$$



$$\text{Area}(\Omega_1) + 2 \text{Area}(\Omega_2)$$

$$\int_{\gamma_1} x \, dy + \int_{\gamma_3} x \, dy = \text{Area}(\Omega_1)$$

$$\int_{\gamma_1} x \, dy + \int_{\gamma_3} x \, dy = \text{Area}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$$

$$\int_{\gamma_2} x \, dy = -\text{Area}(\Omega_2)$$

verso sbagliato

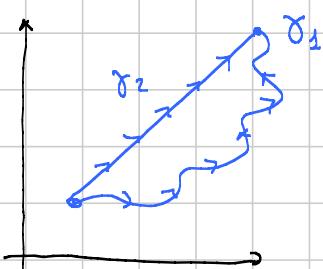
$$\int_{\gamma_2} x \, dy = \text{Area}(\Omega_2)$$

verso corretto.

Esempio 2 Rapporto con le forme diff. rivisitato.

Consideriamo la forma

$$\omega = \underbrace{(x+e^y) \, dy}_{D} + \underbrace{(\log x + y) \, dx}_{C}$$

Dimostrare che $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$

→ All'autica: La forma è chiusa nel 1º quadrante, quindi esatta, quindi tesi.

$$\rightarrow \int_{\partial\Omega^+} C \, dx + D \, dy = \iint_{\Omega} (D_x - C_y) \, dx \, dy = 0 = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega.$$

(chiusura)

Oss. Nuova interpretazione di forma chiusa \Rightarrow integrale su curve chiuso con estremi uguali coincide

Se ω non è chiusa, sappiamo fare la differenza tra i due integrali.

Esempio 3 Coordinate polari e integrali curvilinei.

Vogliamo integrare $f(x,y)$ sulla palla con centro in $(0,0)$ e raggio R dato.

$$\iint_{B_R} f(x,y) dx dy = \int_0^R d\rho \left[\int_0^{2\pi} d\theta f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \rho \right]$$

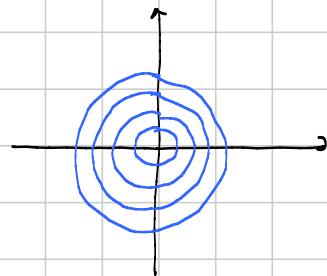
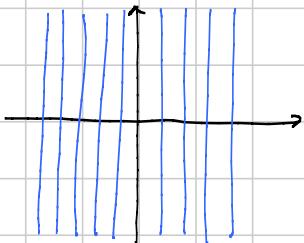
$$\int_{C_\rho} f(x,y) ds$$

circconferenza di raggio ρ

Una parametrizzazione di C_ρ è $(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$ $\theta \in [0, 2\pi]$

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \rho d\theta$$

\rightarrow Delirio 1 L'integrale in coord. polari è un Fubini-Tonelli distorto !!!



Prima integro lungo le singole C_ρ , poi integro in $d\rho$, cioè in "d'circconferenza"

\rightarrow Delirio 2 Poniamo

$$\varphi(r) = \iint_{B_r} f(x,y) dx dy$$

\leftarrow raggio variabile

Voglio calcolare $\varphi'(r)$.

Soluzione: scrivo in coord. polari e poi derivo l'integrale dipendente da parametro

$$\varphi(r) = \int_0^r \int_0^{2\pi} f(p \cos \theta, p \sin \theta) p \, d\theta \, dp$$

$$\varphi'(r) = \int_0^r r f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta = \int_{C_r} f(x, y) ds$$

Oss. Nel caso specifico $f(x, y) \equiv 1$, otteniamo che la derivata dell'area è il perimetro.

Esempio 4 Calcolare il baricentro di una semisfera (superf.)

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$$

Ovvio $x_G = y_G = 0$. Resta da trovare z_G . Parametrizzo S usando le sferiche

$$(R \cos \varphi \cos \theta, R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi)$$

$$(\theta, \varphi) \in \Omega := [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$$

Deno procurandomi M_1, M_2, M_3 con il solito Det

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ -R \cos \varphi \sin \theta & R \cos \varphi \cos \theta & 0 \\ -R \sin \varphi \cos \theta & -R \sin \varphi \sin \theta & R \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$M_1 = R^2 \cos^2 \varphi \cos \theta$$

$$M_2 = R^2 \cos^2 \varphi \sin \theta$$

$$M_3 = R^2 \cos \varphi \sin \varphi$$

$$\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = R^2 \cos \varphi$$

$$\begin{aligned}
 \int_S z \, d\sigma &= \iint_D \underbrace{R \sin \varphi}_z \cdot \underbrace{\frac{R^2 \cos \varphi}{\sin \varphi} \, d\theta \, d\varphi}_{d\sigma} \\
 &= R^3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \underbrace{\sin \varphi \cos \varphi}_{\uparrow \text{prima} = \frac{1}{2} \sin^2 \varphi} \\
 &= R^3 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi R^3 \\
 z_G &:= \frac{\pi R^3}{\text{Area}} = \frac{\pi R^3}{2\pi R^2} = \frac{R}{2} \quad (\text{controllare ...})
 \end{aligned}$$

Oss. Lo stesso conto ci dice che l'integrale in coord. sferiche ha la stessa interpretazione di quello in coord. polari, ed in particolare

$$\frac{d}{dr} \iiint_{B_r} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{S_r} f(x, y, z) \, d\sigma$$

\uparrow palla raggio r
 \uparrow ∂B_r
e centro $(0, 0, 0)$

Esempio 5 Data la semisfera come prima, calcolare il flusso uscente del campo

$$\vec{E}(x, y, z) = \underbrace{(x + y^2)}_A, \underbrace{(y + z \arctan x)}_B, \underbrace{(z + e^{xy} \sin x)}_C$$

Soluzione: basta fare

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \underbrace{A M_1 + B M_2 + C M_3}_{\uparrow \uparrow \uparrow} \quad \text{sostituisco } x, y, z \text{ con le sferiche}$$

NO! Bisogna controllare che μ_1, μ_2, μ_3 sia nel verso giusto!!!!

Sostituisco un valore a caso $\theta = 0, \varphi = 0$

→ viene il pto della sfera $(R, 0, 0)$, mi aspetto un vettore normale con x positiva

$M_1(0, 0) > 0$, quindi andava Bene 😊
Solo ora lo so.

Il calcolo non sembra piacevolissimo 😕.

Proviamo con teo. div.: Sia B la semisfera "piena".
Allora

$$\begin{aligned} \iint\limits_B \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz &= \int \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma \\ &= 3 \operatorname{vol}(B) \\ &= \int \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma + \int \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma \\ &\quad \uparrow \quad \uparrow \\ &\quad \text{quello che} \quad \text{concluisi bene} \\ &\quad \text{voglio} \end{aligned}$$

Resta da calcolare

$$\begin{aligned} \int \limits_C -C \, d\sigma &= - \iint \limits_{x^2+y^2 \leq R^2} \sin R \times e^{xy} \, dx \, dy = 0 \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{terra} \\ &\quad \text{comp. di } E \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{z vale 0 sul} \\ &\quad \text{cerchio di base} \\ &\quad \text{simmetria} \\ &\quad \text{--- 0 ---} \end{aligned}$$

Note Title

14/12/2017

ORIENTAZIONE DEL BORDO DI UNA SUPERFICIE

Ingredienti di partenza: superficie orientata con bordo

Ipotesi classiche:

→ la superficie è parametrizzata

$$\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ con } \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

→ Φ è di classe C^1 e rango $J_\Phi = 2$ in

$$\text{ogni p.t.} \quad (\Rightarrow (M_1, M_2, M_3) = \Phi_u \wedge \Phi_v \neq 0)$$

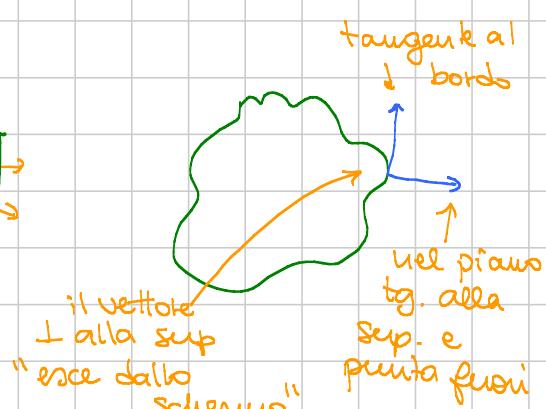
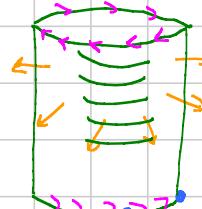
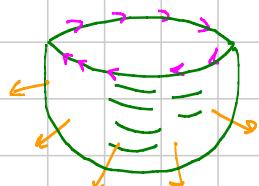
→ Φ è iniettiva almeno rispetto a $J_{\text{ut}}(\Omega)$



Una orientazione della sup. è una scelta del vettore canonico normale tra $\pm (M_1, M_2, M_3)$

Il bordo della sup. è per definizione $\Phi(\partial\Omega)$

Def. L'orientazione canonica del bordo della sup. è il verso di percorrenza di un senso in piedi secondo la direzione del vettore normale alla sup che percorre il bordo avendo la sup. a sinistra.



Più rigorosamente: i 3 vettori

→ normale esterna alla sup. nel punto del bordo

→ tangente al bordo

→ normale alla superficie

sono una base di \mathbb{R}^3 orientata come la canonica.

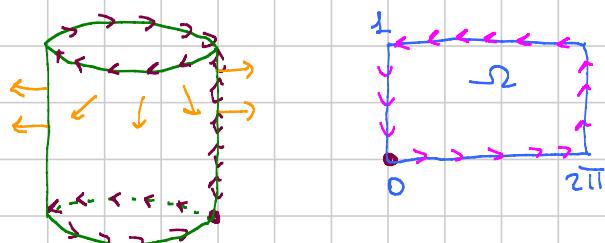
Fatto che si verifica

Se la parametrizz. $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ è tale che (M_1, M_2, M_3) è l'orientazione della sup., allora l'orientazione del bordo è quella che proviene percorrendo $\partial\Omega$ in modo da lasciare Ω a sx.

Esempio cilindro

$$\Phi(\theta, \mu) = (\cos\theta, \sin\theta, \mu) \quad (\theta, \mu) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (M_1, M_2, M_3) = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \quad (\text{vettore normale esterno})$$



Esistono dei tratti che non sono vero bordo della superficie e vengono percorsi con verso opposto in questo caso 2 volte.

— o — o —

TEOREMA DEL ROTORE (teorema di Stokes)

Sia S una superficie orientata.

Sia \vec{E} un campo di vettori definito almeno in un intorno del supporto di S .

Allora sotto certe ipotesi vale che

$$\int_S \langle \text{rot } \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle ds$$

orient. di S

integrale curv.: linea di una funzione

flusso di rot \vec{E} attraverso S

bordo di S

versone tangente a ds nel verso indicato come sopra

Riscrittura di LHS e RHS : $E = (A, B, C)$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{rot } \vec{E} = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$$

$$\int_S \langle \text{rot } \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \iint_D (C_y - B_z) M_1 + (A_z - C_x) M_2 + (B_x - A_y) M_3$$

Passiamo al RHS : supponiamo di aver parametrizzato ∂S con una curva (o più curve)

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad t \in [a, b]$$

che lo percorre con il verso giusto. Allora

$$\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

$$\int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle ds = \int_a^b (A \dot{x} + B \dot{y} + C \dot{z}) dt$$

$\underbrace{}_{A(x(t), y(t), z(t)) \dot{x}(t)}$

$$= \int_S (A dx + B dy + C dz)$$

$$= \int_{\partial S^+} (A dx + B dy + C dz)$$

\uparrow
bordo con il verso
scelto bene

$$\boxed{\int_S \langle \text{rot } \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S^+} (A dx + B dy + C dz)}$$

Oss. Di solito in fisica si enuncia dicendo che il flusso del rotore attraverso una superficie è uguale alla circuitazione del campo lungo il bordo.

—○—○—

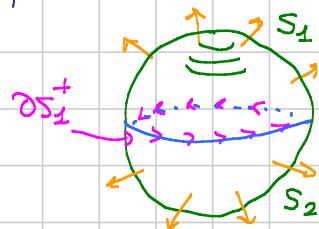
Corollario Il flusso di un rotore attraverso una superficie chiusa è uguale a 0.

(occhio: si intende chiusa una superficie senza il bordo, ad esempio una sfera, o un cilindro con le basi comprese)

Dim. meno brutale: nella formula di Stokes "non c'è il RHS"

Dim. meno brutale: Divido la sup. in 2 e applico Stokes nelle due parti

$$\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle dS = \int_{S_1} \dots + \int_{S_2} \dots$$



$$= \int_{\delta S_1} \langle \vec{E}, \vec{t} \rangle ds + \int_{\delta S_2} \langle \vec{E}, \vec{t} \rangle ds$$

sono lo stesso, ma
con i 2 t opposti.

—○—○—

Oss. Posto $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{E}$, posso applicare il teo. della div.
Nell'esempio della sfera troverei

$$\int_S \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle dS = \iiint_B \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz$$

\uparrow palla

$$\text{Ma } \operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{E}) = 0.$$

Esempio (La solita col rotore)

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x, y, z)$$

Con qualche calcolo si vede che $\operatorname{div}(\vec{E}) = 0$

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{1}{()^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{2x^2}{()^{5/2}} \\ &= \frac{x^2+y^2+z^2 - 3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

e analogo per le altre componenti.

Quindi

$$\iiint_B \operatorname{div} \vec{E} dx dy dz = 0$$

"

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_S \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} d\sigma > 0 \quad !!!$$

\uparrow
 $(x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Dove sta il guaio: che nel centro di B il calcolo della $\operatorname{div} \vec{E}$ non ha senso.

ANALISI 2

-

LEZIONE 068

Note Title

14/12/2017

QUATTRO STRATEGIE PER IL CALCOLO DI UN FLUSSO

ATTRaverso UNA SUPERFICIE

Situazione classica. Sono dati

- una superficie S
- una orientazione \vec{m}
- un campo di vettori \vec{E}

Voglio calcolare l'integrale di flusso

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{m} \rangle d\sigma$$

Quattro possibili approcci

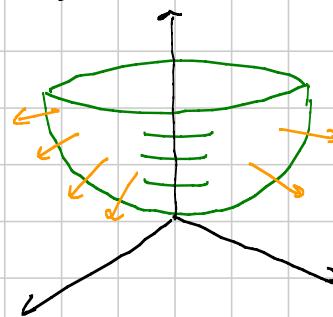
- ① utilizzo banale della definizione
- ② Stokes con inversione del rotolo
- ③ Stokes con cambio superficie
- ④ Teo. divergenza con i tappi.

Consideriamo per esempio il campo

$$\vec{E}(x, y, z) = (2x + y, z - y, 3x^2 - z)$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 1\}$$

con orientazione esterna.



- ① Uso la definizione \rightarrow parametrizzo S
 \rightarrow calcolo (M_1, M_2, M_3)
 \rightarrow controllo il verso
 \rightarrow integro

$$\pm \iint_{\Omega} (A M_1 + B M_2 + C M_3) \, du \, dv$$

$$\Phi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

$$\Omega := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (M_1, M_2, M_3) = (-2u, -2v, 1)$$

↑
punta verso l'alto,
quindi devo
cambiare segno

$$\begin{aligned} \int_S \langle \vec{E}, \vec{m} \rangle \, d\sigma &= - \iint_{\Omega} \left\{ \begin{array}{c} (2u + v(u^2 + v^2)) (-2u) \\ A \\ M_1 \\ + (u^2 + v^2 - v) (-2v) \\ B \\ M_2 \\ + (3u^2 - u^2 - v^2) \cdot 1 \\ C \\ M_3 \end{array} \right\} \, du \, dv \\ &= \text{integrale che si fa (sfruttare le simm.)!} \end{aligned}$$

- Vantaggi / svantaggi: \rightarrow funziona sempre (non servono ipotesi speciali su E)
 \rightarrow occorre parametrizzare S .
 \rightarrow occorre calcolare (M_1, M_2, M_3)
 \rightarrow l'integrale finale è un integrale doppio
- o — o —

② Stokes con inversione del rotore

→ spero che \vec{E} sia il rotore di un certo \vec{F}

→ trovo \vec{F} tale che $\text{rot } \vec{F} = \vec{E}$

→ a quel punto uso Stokes

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_S \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S^+} (A dx + B dy + C dz)$$

$\vec{F} = (A, B, C)$

Nell'esempio $\vec{E} = (2x + yz, z - y, 3x^2 - z)$

$\text{div } \vec{E} = 2 - 1 - 1 = 0$ ☺. Su tutto \mathbb{R}^3 questo significa che \vec{E} è il rotore di un certo \vec{F}

Cerco $\vec{F} = (A, B, C)$. Invertire il rotore significa risolvere

$$B_z - C_y = 2x + yz$$

$$C_x - A_z = z - y$$

$$A_y - B_x = 3x^2 - z$$

Algoritmo: ① Metto 0 una componente a piacere, ad esempio $A \equiv 0$. La 2^a e 3^a diventano

$$C_x = z - y \quad C = zx - yx + \varphi(y, z)$$

$$B_x = z - 3x^2 \quad B = zx - x^3 + \psi(y, z)$$

② Metto 0 una a scelta fra φ e ψ , ad esempio $\varphi(y, z) \equiv 0$.

Sostituisco B e C nella 2^a:

$$\frac{x + \varphi_z}{B_z} + \frac{x}{-C_y} = 2x + yz$$

Deve succedere
che se we valiamo
le x

③ Trovo $\varphi(y, z) = \frac{1}{2}yz^2$

Conclusione

$$\vec{F}(x, y, z) = (0, zx - x^3 + \frac{1}{2}yz^2, zx - yx)$$

Verifico con le derivate che effett. not $\vec{F} = \vec{E}$
Non resta che calcolare

$$\int_{\partial S^+} (A dx + B dy + C dz)$$

Dico parametrizzazione ∂S^+

$$\gamma(t) = (\cos \theta, \sin \theta, 1) \quad \text{questa ha l'orientazione sbagliata !!}$$

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{m} \rangle d\sigma = - \int_0^{2\pi} \{ 0 \cdot (-\sin \theta) + (\cos \theta - \cos^3 \theta + \frac{1}{2} \sin \theta) \cos \theta \\ + (\dots) \cdot 0 \} d\theta \\ = \text{si fa}$$

- Vantaggi / svantaggi:
- se ne div $\vec{E} = 0$
 - occorre invertire il rotore
 - occorre parametrizzare ∂S^+
 - l'integrale finale è in una variabile.
- o — o —

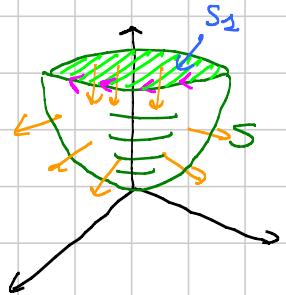
3 Stokes senza convertire il rotore

→ spero che \vec{E} sia il rotore di un certo \vec{F}

→ scelgo un'altra superficie S_1 con lo stesso bordo di S

→ calcolo il flusso attraverso S_1 .

$$\begin{aligned}
 \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \int_S \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma \\
 &= \int_{\partial S} \langle \vec{F}, \vec{\tau} \rangle dS \\
 &= \int_{\text{FSE}} \langle \vec{F}, \vec{\tau} \rangle dS \\
 &= \int_{S \times \mathbb{R}} \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma \\
 &= \int_{S \times \mathbb{R}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma
 \end{aligned}$$



Nell'esempio so che \vec{F} esiste perché dico $\vec{E} = 0$. Uso come
S1 la base superiore orientata verso il basso, cioè con
 $\vec{m} = (0, 0, -1)$.

Non resta che calcolare

$$\int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{S_1} -C d\sigma = - \int_{S_1} (3x^2 - z) d\sigma$$

\uparrow
 terza comp.
 di E

$$= - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (3x^2-1) \, dx \, dy = \text{davvero immediato.}$$

Vantaggi / svantaggi : \rightarrow senza dir $\vec{E} = 0$

→ now serve invertive & rotore

→ l'integrale finale è doppio

— 0 — 0 —

4 Teorema della divergenza con i tappi

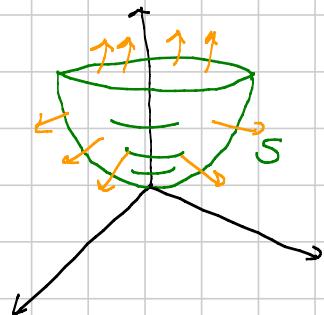
→ chiudo la superficie aggiungendo i tappi

→ applico il teorema della divergenza

Uso come tappo la S_2 di prima.

Chiamiamo V il solido di cui è bordo.

Applico il teo. della divergenza:



$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz = \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

\uparrow
normale esterna a V

$$= \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma + \int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

\uparrow
coludendo con
quella voluta

\uparrow
 $(0,0,1)$

Viene lo stesso conto di prima perché $\operatorname{div} \vec{E} = 0$

Vantaggi / svantaggi: → non serve che $\operatorname{div} \vec{E} = 0$
 → occorre calcolare i tappi
 → ci si riduce ad un integrale
 triplo + gli integrali di sup.
 sui tappi.

Oss. Se avessi preso

$$\vec{E} = (2x + yz + \sinh x^6, z - y, 3x^2 - z)$$

Le strategie 2 e 3 non funzionavano ($\operatorname{div} \vec{E} \neq 0$).

La 4 funzionava ugualmente e l'integrale triplo era 0 per simmetria.

— 0 — 0 —

ANALISI 2

LEZIONE 069

Note Title

15/12/2017

DIMOSTRAZIONE DI STOKES

$$\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle ds = \int_{\partial S^t} (A dx + B dy + C dz)$$

Notazioni $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

• $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è un insieme come nel teo. della divergenza

• Φ di classe C^1 in un aperto $\Omega' \supseteq \Omega$ con J_Φ di rango due in ogni punto

• \vec{n} è il versore normale indotto dalla parametrizzazione

$$\vec{n} = \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|}$$

Il bordo di Ω , percorso con il verso giusto, è una curva (o una unione di curve)

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$$

$$\gamma(t) = (u(t), v(t))$$

Supponiamo γ di classe C^1 (almeno a tratti)

$$\vec{E}(x, y, z) = (A(x, y, z), B(x, y, z), C(x, y, z))$$

dove A, B, C sono di classe C^1 almeno in un intorno del supporto di $S = \Phi(\Omega)$.

Per un fatto noto sotto queste ipotesi la curva

$$\Phi \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

percorre ∂S con il verso giusto.

Idea della dim:

- ① riscrivo LHS come int. doppio su Ω
- ② " RHS " " lungo $\partial\Omega$
- ③ mostro che sono uguali per teo. div.

1 Riscrivo LHS

$$\operatorname{rot} \vec{E} = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$$

$$\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \iint_{\Omega} (C_y - B_z) M_1 + (A_z - C_x) M_2 + (B_x - A_y) M_3$$

$$\begin{pmatrix} X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (M_1, M_2, M_3) = \\ = (Y_u Z_v - Z_u Y_v, Z_u X_v - X_u Z_v, X_u Y_v - Y_u X_v)$$

$$\text{LHS} = \iint_{\Omega} \{ (C_y - B_z)(Y_u Z_v - Z_u Y_v) + (A_z - C_x)(Z_u X_v - X_u Z_v) \\ + (B_x - A_y)(X_u Y_v - Y_u X_v) \} dudv$$

$$= \iint_{\Omega} 12 \text{ simpatici termini}$$

... quelli con B sono

$$\boxed{-B_z Y_u Z_v + B_z Z_u Y_v + B_x X_u Y_v - B_x Y_u X_v}$$

$$B_z (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) Y_u (u, v) Z_v (u, v)$$

2 Riscrivo RHS

$$\int_{\partial\Omega^+} (A dx + B dy + C dz)$$

$$(x(t), y(t), z(t)) = (X(u(t), v(t)), Y(u(t), v(t)), Z(u(t), v(t)))$$

$$\text{RHS} = \int_a^b A(x(t), y(t), z(t)) \dot{x}(t) + B(\dots) \dot{y}(t) + C(\dots) \dot{z}(t)$$

$$= \int_a^b A(X_u \dot{u} + X_v \dot{v}) + B(Y_u \dot{u} + Y_v \dot{v}) + C(Z_u \dot{u} + Z_v \dot{v})$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^b (A X_u + B Y_u + C Z_u) \dot{u} + (A X_v + B Y_v + C Z_v) \dot{v} \\
 &= \int_{\partial\Omega^+} \underbrace{(A X_u + B Y_u + C Z_u)}_D du + \underbrace{(A X_v + B Y_v + C Z_v)}_E dv
 \end{aligned}$$

3 Spero in Gauss-Green nella forma

$$\int_{\partial\Omega^+} D du + E dv = \iint_{\Omega} (E_u - D_v) dx dy$$

Per concludere devo calcolare $E_u - D_v$ e sperare che venga lo stesso del punto ①.

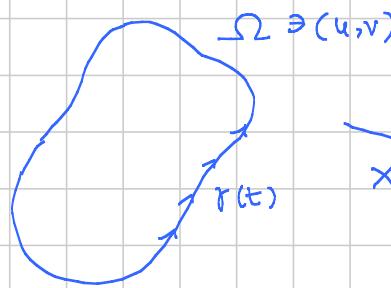
Limitiamoci ai termini con B

$$\begin{aligned}
 E_u - D_v &= \dots = \frac{\partial B}{\partial u} Y_v + B \cancel{Y_{uu}} - \frac{\partial B}{\partial v} Y_u - B \cancel{Y_{uv}} \\
 &= (B_x X_u + B_y Y_u + B_z Z_u) Y_v \\
 &\quad \text{chain rule} \quad - (B_x X_v + B_y Y_v + B_z Z_v) Y_u \\
 &= B_x X_u Y_v + B_y \cancel{Y_u Y_v} + B_z Z_u Y_v \\
 &\quad - B_x X_v Y_u - B_y \cancel{Y_v Y_u} - B_z Z_v Y_u \\
 &\quad \boxed{- B_z Y_u Z_v + B_z Z_u Y_v + B_x X_u Y_v - B_x Y_u X_v}
 \end{aligned}$$

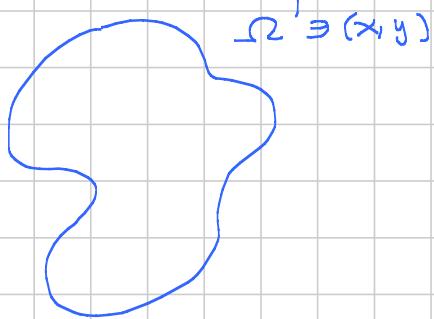
Coincide con quello che volevo !!! 😊

— o — o —

Altro caso analogo



$\Omega \ni (u, v)$
 Φ
 $x(u, v), y(u, v)$



Sia $f(x, y)$ una funzione $f: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$

Voglio calcolare con il teo. della div. $\iint_{\Omega'} f(x, y) dx dy$

Cerco un campo \vec{E} la cui divergenza sia $f(x, y)$, ad esempio

$$\vec{E}(x, y) = (F(x, y), 0) \quad \text{con } F_x(x, y) = f(x, y)$$

$$\iint_{\Omega'} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega'} \operatorname{div} \vec{E} dx dy = \int_{\partial \Omega'} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

$$\iint_{\Omega'} \operatorname{div} \vec{E} = \int_{\partial \Omega'^+} A dy - B dx$$

$$= \int_{(\partial \Omega'^+)} F dy$$

Il bordo è parametrizzato da $(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)))$

$x(t)$

$y(t)$

$$= \int_a^b F(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t))) (y_u \dot{u} + y_v \dot{v}) dt$$

$$= \int_{\partial \Omega'^+} (F y_u) du + (F y_v) dv$$

Ora applico il teo. della divergenza su Ω

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\Omega^+} D u + E dN &= \iint_{\Omega} (E_u - D_v) dx dy \\
 &= \iint_{\Omega} \{ (F_{Yv})_u - (F_{Yu})_v \} du dv \\
 &= \iint_{\Omega} \{ (F_x X_u + F_y Y_u) Y_v + \cancel{F_x Y_u} - (F_x X_v + F_y Y_v) Y_u - \cancel{F_y X_v} \} \\
 &= \iint_{\Omega} F_x (X_u Y_v - X_v Y_u) du dv
 \end{aligned}$$

Mettendo tutto insieme abbiamo ottenuto

$$\iint_{\Omega'} f(x,y) dx dy = \dots = \iint_{\Omega} f(x(u,v), y(u,v)) \underbrace{(X_u Y_v - X_v Y_u)}_{\text{Det } J_{\Phi}(u,v)} du dv$$

Questo dimostra il cambio di variabili per integrali doppi.

Osservazioni

- abbiamo supposto che $\partial\Omega'$ fosse param. da $\Phi(\tau|t)$ con il verso giusto (altrimenti servirebbe un segno -)
- NON abbiamo supposto che $\text{Det } J_{\Phi}$ abbia segno costante ma solo che conservi l'orientazione dei bordi.
- Abbiamo supposto tanta regolarità di Φ (derivate seconde fino ai bordi) e di f (forse almeno continua per fare la primitiva).
- Abbiamo usato uno strumento avanzato.

—o —o —

Oss. In entrambe le dim. abbiamo usato il PULL-BACK
di forme differenziali.

1^a dim.: avevamo la forma $A dx + B dy + C dz$
in \mathbb{R}^3

La vogliamo "trone indietro in \mathbb{R}^2 " usando la Φ
Come forma indietro?

Rigorosamente come nella dim.

Brutalmente come mettere $X(u, v)$, $Y(u, v)$, $Z(u, v)$ al
posto di $x, y, z \dots$

$$A(X(u, v) \dots) (X_u du + X_v dv) + B(\dots) (Y_u du + Y_v dv) + \dots$$

$$= (A X_u + B Y_u + C Z_u) du + (A X_v + B Y_v + C Z_v) dv$$

PULL BACK FORMA INIZIALE

e vale la proprietà

$$\int_{\gamma} \Phi_{*} \omega = \int_{\Phi_{*} \gamma} \omega$$

ANALISI 2

-

LEZIONE 070

Note Title

15/12/2017

Oss. Si può dim. Stokes sotto ipotesi più generali su S .

Basta che per ogni punto del supporto di S esista un intorno in cui S si scrive come un'immagine di un certo S_2 , che può variare da punto a punto.

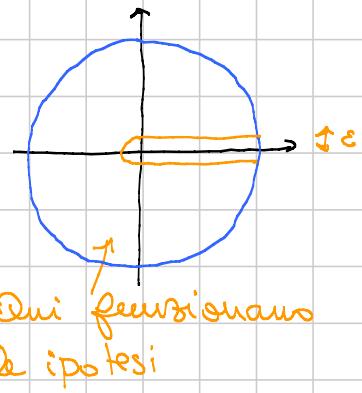
(Solita idea delle partizioni dell'unità)

Oss. Il teo. di cambio di variabili negli integrali multipli, così come enunciato e dim., non funziona nemmeno per le polari nel piano !!

Il problema è almeno nell'origine dove il determinante di J si annulla.

Per rimediare basta restringere la zona di integrazione lasciando fuori l'origine e un raggio (avevamo supposto l'invertibilità).

Poi quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ e se la funzione è limitata non ci sono pblm.



INVERSIONE DEL ROTORE

Problema: dato un campo \vec{E} in \mathbb{R}^3 , trovare \vec{F} tale che

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{E}$$

1) Se $\text{div } \vec{E} \neq 0$ non c'è soluzione

2 Se $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, le cose possono andare comunque male
Ad esempio il solito

$$\vec{E} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} (x, y, z)$$

ha $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, ma non è il rotore di nulla nell'intorno
di ogni superficie chiusa che racchiude l'origine
(vedi lezione 67 o 68)

3 Se $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ e la zona Ω è un parallelepipedo
(o comunque stellata, o più in generale ...), allora
posso trovare \vec{F} con l'algoritmo.

$$\vec{E} = (A, B, C) \quad \vec{F} = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}) \text{ e voglio}$$

$$\hat{C}_y - \hat{B}_z = A, \quad \hat{A}_z - \hat{C}_x = B, \quad \hat{B}_x - \hat{A}_y = C$$

① Scelgo $\hat{C} \equiv 0 \Rightarrow -\hat{B}_z = A \quad \hat{A}_z = B$

$$\hat{B} = -\bar{A} + \varphi(x, y) \quad \hat{A} = \bar{B} + \varphi(x, y)$$

primitive di A e B nisp. z

② Scelgo $\varphi \equiv 0$ e sostituisco nella 3^a eq.

$$\hat{B}_x - \hat{A}_y = -\bar{A}_x + \varphi_x - \bar{B}_y = C$$

$$\Rightarrow \varphi_x(x, y) = \bar{A}_x + \bar{B}_y + C$$

Questa riesco a risolverla se RHS non dipende da z

$$(RHS)_z = \bar{A}_{xz} + \bar{B}_{yz} + C_z = A_x + B_y + C_z = 0 \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$(\hat{A}_z)_x = A_x \quad \text{☺}$

Oss 1 Abbiamo usato che \vec{E} è di classe C^1 .

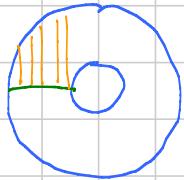
Oss. Dove è intervenuta la topologia?

Come faccio a definire / scegliere la primitiva di A rispetto alla variabile z ?

$$\bar{A}(x, y, z) := \int_0^z A(x, y, t) dt$$

La possibilità di integrare da un livello fisso c'è solo nei parallelepipedi.

In una corona circolare ci sarebbero problemi...
volendo superabili.



... capire perché dicono insomma...
tabili sulla corona sferica.

Laplaciano in coordinate polari

Trovare tutte le funzioni radiali nel piano t.c.

$$\Delta u(x, y) = 0$$

Ponentesi su Δ in coord. polari

$$u(x, y)$$

$$\nabla(p, \theta) = u(p \cos \theta, p \sin \theta)$$

$$\Delta u(x, y) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y)$$

$$\Delta u(p \cos \theta, p \sin \theta)$$

Quale operazione su ∇ fornisce risultato analogo?

$$x = p \cos \theta$$

$$y = p \sin \theta$$

$$v_p = u_x x_p + u_y y_p = u_x \cos\theta + u_y \sin\theta$$

$$v_\theta = u_x x_\theta + u_y y_\theta = u_x (-\rho \sin\theta) + u_y (\rho \cos\theta)$$

Visto a suo tempo

$$v_p^2 + \frac{1}{\rho^2} v_\theta^2 = u_x^2 + u_y^2$$

Calcolo le derivate seconde

$$v_{pp} = u_{xx} x_p \cos\theta + u_{xy} y_p \cos\theta + u_{yx} x_p \sin\theta + u_{yy} y_p \sin\theta$$

$$= u_{xx} \cos^2\theta + 2 u_{xy} \cos\theta \sin\theta + u_{yy} \sin^2\theta$$

$$v_{\theta\theta} = (u_{xx} x_\theta + u_{xy} y_\theta) (-\rho \sin\theta) + u_x (-\rho \cos\theta) \\ + (u_{yx} x_\theta + u_{yy} y_\theta) (\rho \cos\theta) + u_y (-\rho \sin\theta)$$

$$= u_{xx} \rho^2 \sin^2\theta - 2 u_{xy} \rho^2 \cos\theta \sin\theta - u_x \rho \cos\theta \\ + u_{yy} \rho^2 \cos^2\theta - u_y \rho \sin\theta$$

$$v_{pp} + \frac{1}{\rho^2} v_{\theta\theta} = u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{\rho} v_p$$

Morale

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{pp} + \frac{1}{\rho^2} v_{\theta\theta} + \frac{1}{\rho} v_p$$

Laplaciano
in coord. polari

Le funzioni radiali le posso pensare come $v(p)$, quindi
hanno Laplaciano nullo se e solo se

$$v_{pp} + \frac{1}{\rho} v_p = 0$$

$$\text{Posto } f = v_p \text{ devo risolvere } f' = -\frac{1}{\rho} f$$

$$\int \frac{1}{f} df = \int -\frac{1}{p} dp \rightsquigarrow \log f = -\log p + c$$

$$\rightsquigarrow \log f = \log \left(\frac{k}{p} \right)$$

$$\rightsquigarrow f(p) = \frac{k}{p} \rightsquigarrow v_p = \frac{k}{p} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow v(p) = k \log p + c$$

Se le voglio definite su \mathbb{R}^2 (tutto \mathbb{R}^2) restano solo le costanti ($k=0$)

— o — o —

Variante nello spazio:

→ si calcola il Laplaciano in coord. sferiche (una volta nella vita) poi si cerca su wiki

→ Restringendosi alle sole radiali viene

$$\Delta u = v_{pp} + \frac{2}{p} v_p \quad \text{venerdì in dim m}$$

→ Si risolve come sopra

$$\dots \log f = \log \left(\frac{k}{p^2} \right) \rightsquigarrow f = \frac{k}{p^2}$$

$$\rightsquigarrow v_p = \frac{k}{p^2} \rightsquigarrow v(p) = \left[\frac{k}{p} \right] + c$$

↑
i potenziali elettrici
divengono come $\frac{1}{p}$ nell'origine...

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 071

Note Title

26/02/2018

- $X \rightarrow$ insieme
- \rightarrow spazi metrici
- \rightarrow spazi di BANACH
- \rightarrow spazi di Hilbert
- $\rightarrow \mathbb{R}^n$

Spazi metrici Sia X un insieme ($\neq \emptyset$)

Def. Una DISTANZA su X è una funzione $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ che verifica 4 proprietà

- (d1) $d(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in X^2$,
- (d2) $d(x,y) = 0$ se e solo se $x = y$,
- (d3) $d(x,y) = d(y,x)$ per ogni $(x,y) \in X^2$, (simmetria)
- (d4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ per ogni $(x,y,z) \in X^3$.

↑ disug. triangolare

Def. Un sp. metrico è una coppia (X,d) con X insieme e d distanza su X .

Oss. Occorre verificare sempre anche

- (d0) d è definita per ogni $(x,y) \in X^2$

Oss. Dalla (d4) seguono anche diseguaglianze del tipo

$$|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z)$$

Dow $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (d4)

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$
 (d4)

Mettendo insieme ho la tesi. \square

Dalla distanza seguono le palle, il linguaggio topologico, la convergenza

Def. (Palle aperte/chuse) Sia (X, d) metrico.

Allora

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\} \quad \text{palla aperta}$$

$$\overline{B}_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\} \quad \text{palla chiusa}$$

con centro in $x_0 \in X$ e raggio $r > 0$.

- Esercizio
- Se una palla è contenuta strettamente in un'altra, ha necess. il raggio $< ?$
 - Ha necessariamente raggio $\leq ?$

Def. Sia (X, d) metrico e sia $\{x_n\} \subseteq X$ una successione.

Si dice che

$$x_n \rightarrow x_\infty \in X$$

se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_\infty) = 0$$

^{↑ limite di numeri}

In modo equivalente

$$\forall r > 0 \quad x_n \in B_r(x_\infty) \quad \text{definitivamente}$$

Linguaggio topologico Dato $x_0 \in X$ e un sottoinsieme $A \subseteq X$ si definisce quando

$$\rightarrow x_0 \in \text{Int}(A) \quad [\exists r > 0 \text{ t.c. } B_r(x_0) \subseteq A]$$

$$\rightarrow x_0 \in \text{Clos}(A) \quad [\forall r > 0 \quad B_r(x_0) \cap A \neq \emptyset]$$

$$\rightarrow x_0 \in \partial A$$

$\rightarrow x_0$ è isolato in A oppure di accumulazione

Def Sia (X, d) metrico e sia $\{x_m\} \subseteq X$ una successione.

Si dice che x_m è una succ. di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m_0 \quad \forall m \geq m_0 \quad d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$$

Prop. Sia (X, d) metrico.

Allora valgono i seguenti fatti.

(i) Le successioni che hanno limite sono di Cauchy

(ii) Le successioni di Cauchy sono limitate (contenute in una palla).

(iii) Se una succ. di Cauchy ha una s.succ. conv., allora converge tutta quantità (allo stesso limite).

Dim. (i) e (ii) per esercizio.

(iii) Sia x_m di Cauchy e sia $x_{m_k} \rightarrow x_\infty \in X$.

Dico che $x_m \rightarrow x_\infty$.

Mi viene dato $\varepsilon > 0$. Scelgo $m_0 \in \mathbb{N}$ in maniera tale che

$$d(x_m, x_{m_0}) \leq \frac{1}{2}\varepsilon \quad \forall m \geq m_0 \quad \forall m \geq m_0.$$

Scelgo $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$d(x_{m_k}, x_\infty) \leq \frac{1}{2}\varepsilon \quad \forall k \geq k_0$$

Wlog posso assumere che $m_{k_0} \geq m_0$.

Allora dico che

$$d(x_m, x_\infty) \leq \varepsilon \quad \forall m \geq m_{k_0}$$

Infatti $d(x_m, x_\infty) \leq d(x_m, x_{m_{k_0}}) + d(x_{m_{k_0}}, x_\infty)$

$$\leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon$$

— o — o —

Def. Un spazio metrico (\mathbb{X}, d) si dice **COMPLETO** se tutte le succ. di Cauchy hanno limite.

Def. Si dice diametro di un spazio metrico (\mathbb{X}, d) la quantità

$$\text{diam } (\mathbb{X}) := \sup \{ d(x, y) : (x, y) \in \mathbb{X}^2 \} \quad \begin{array}{l} \nearrow \in [0, +\infty) \\ \searrow = +\infty \end{array}$$

Def. Un spazio metrico (\mathbb{X}, d) si dice **limitato** se

$$\text{diam } (\mathbb{X}) < +\infty$$

Equivalentemente, se

$$\exists R \geq 0 \quad \exists x_0 \in \mathbb{X} \quad \text{t.c.} \quad \mathbb{X} = B_R(x_0)$$

Dim: esercizio.

Def. Siamo (\mathbb{X}, d_x) e (\mathbb{Y}, d_y) due spazi metrici.

Sia $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ una funzione.

Si dice che f è

• Lipschitziana se

$$\exists L \in \mathbb{R} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{X}^2 \quad d_y(f(x), f(y)) \leq L d_x(x, y)$$

• Hölderiana se

$$\exists H \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in (0, 1] \quad \forall (x, y) \in \mathbb{X}^2 \quad d_y(f(x), f(y)) \leq H d_x(x, y)^\alpha$$

• unif. cont. se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{X}^2$ vale

$$d_x(x, y) \leq \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Oss. $\text{Lip} \Rightarrow \text{U.C.}$ $\text{Höld} \Rightarrow \text{U.C.}$

$\text{Lip} \Rightarrow \text{Höld}$ se (X, d) è LIMITATO

$$[d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)]$$

$$= [d_X(x, y) \underbrace{\underbrace{L}_{\leq \text{diam}(X)}^{1-\alpha} d_X(x, y)^\alpha}_{H}]$$

Def. Sia X uno sp. vettoriale. Una NORMA in X è una funzione

$$n: X \rightarrow \mathbb{R}$$

talé che

$$(n_1) \quad n(x) \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in X$$

$$(n_2) \quad n(x) = 0 \quad \text{se e solo se } x = 0$$

$$(n_3) \quad n(\lambda x) = |\lambda| n(x) \quad \text{per ogni } x \in X \text{ e per ogni } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(n_4) \quad n(x+y) \leq n(x) + n(y) \quad \text{per ogni } (x, y) \in X^2.$$

Fatto fondamentale. Se X è uno sp. vett. e $n: X \rightarrow \mathbb{R}$ è una norma, allora

$$d(x, y) := n(x-y)$$

è una distanza su X .

Dim. Basta verificare $(d_1), (d_2), (d_3), (d_4)$.

Def. Uno sp. di BANACH è uno sp. vett. X sul quale è definita una norma che lo rende un metrico completo.

Titolo nota

26/02/2018

Def. Sia \mathbb{X} uno sp. vettoriale. Un prodotto scalare su \mathbb{X} è una funzione $\dots \langle x, y \rangle \dots$

- bilineare
- simmetrico
- definito positivo ($\langle x, x \rangle \geq 0$ sempre con uguali $\Leftrightarrow x = 0$)

Fatto : se $\langle x, y \rangle$ è un prodotto scalare, allora

$$n(x) := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \forall x \in \mathbb{X}$$

è una norma su \mathbb{X} .

Def. Uno sp. di HILBERT è uno sp. vett. \mathbb{X} sul quale è definito un prod. scalare che induce una norma che induce una distanza che lo rende un metrico completo.

Esempi di spazi metrici

① Metrica banale \mathbb{X} insieme qualunque

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases} \quad (\text{limitato e completo})$$

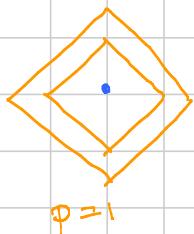
② \mathbb{R}^n con la metrica euclidea (è pure Banach e Hilbert)

③ \mathbb{R}^n con la distanza MANHATTAN o TAXI DRIVER o TAXICAB.

$$d(x, y) := |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| + \dots + |y_n - x_n|$$



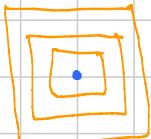
- ④ \mathbb{R}^m con la distanza p -esima con $p \geq 1$ \rightsquigarrow serve per la triangolazione
 $d_p(x, y) := \left(\sum_{i=1}^m |y_i - x_i|^p \right)^{1/p}$ $p=1 \rightsquigarrow$ TAXI DRIVER
 $p=2 \rightsquigarrow$ EUCLIDEA



Esercizio (non banale): dimostrare che d_p è una distanza e che solo per $p=2$ è un Hilbert.

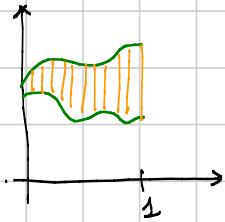
- ⑤ \mathbb{R}^m con la distanza del sup.

$$d_{\infty}(x, y) := \sup \{ |y_i - x_i| : i \in \{1, \dots, n\} \}$$



- ⑥ $\mathbb{X} = \{ \text{funzioni } f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ limitate} \}$

$$d(f, g) := \sup \{ |f(x) - g(x)| : x \in [0, 1] \}$$



Oss. Se non avessi messo limitate nella def. di \mathbb{X} , la distanza non sarebbe stata ben definita.

- ⑦ $\mathbb{X} := \{ \text{funzioni } f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \}$

$$d(f, g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

Oss. Se avessi messo integrabili invece di continue non era una distanza perché mancava (d1): due funzioni che differiscono in un solo p.t. avrebbero distanza 0.

— o — o —

Def. Due distanze su uno stesso insieme si dicono EQUIVALENTI se inducono la stessa nozione di convergenza, cioè determinano le stesse funzioni continue

Prop. Siamo (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, e sia $x_0 \in X$.

Allora sono fatti equivalenti

(i) (Continuità ε/δ)

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \quad d_Y(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon}$$

(ii) (Continuità per successioni)

Per ogni succ. $x_n \rightarrow x_0$ in X vale che $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ in Y .

Dm. Stessa di Analisi 1 (rifone per esercizio).

Def. Sia X uno spazio vettoriale. Due norme m_1 ed m_2 in X si dicono equivalenti se esistono due costanti reali $A \geq a > 0$ tali che

^{↑ importante}

$$a m_2(x) \leq m_1(x) \leq A m_2(x) \quad \forall x \in X.$$

Teorema 1 Due norme sono equiv. nel senso di a, A se e solo se inducono la stessa nozione di conv.

Teorema 2 In uno spazio vett. di dim. finita tutte le norme sono equivalenti.

Dim 2] Idea pericolosa. Chiamiamo $\|x\|_1$ e $\|x\|_2$ le due norme.

Considero

$$\varphi(x) := \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1} \quad \forall x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$$

È una funzione 0-omogenea, quindi il suo sup è riferito a $\mathbb{X} \setminus \{0\}$ coincidendo con quelli su una qualunque sfera unitaria (rispetto alla $\|x\|_1$ o $\|x\|_2$).

L'inf lo chiamo a e il sup lo chiamo A , ed essendo min/max sono reali e > 0 .

Problemi: continuità di φ e compattezza delle sfere

Step 1] Sia e_1, \dots, e_m una base di \mathbb{X} . Dato $x \in \mathbb{X}$ lo posso scrivere come

$$x = c_1 e_1 + \dots + c_m e_m$$

in modo unico.

Pongo

$$\|x\| := (c_1^2 + \dots + c_m^2)^{1/2}$$

e la chiamo norma euclidea rispetto alla base scelta.

Mi basta ora dimostrare che una qualunque norma strana $\|\cdot\|$ è equivalente alla euclidea $\|x\|$.

Step 2] Dimostro la parte dall'alto, cioè

$$\exists A > 0 \text{ t.c. } \|\cdot\| \leq A \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{X}$$

$$\|\cdot\| = \|(c_1 e_1 + \dots + c_m e_m)\| \leq |c_1| \cdot \|e_1\| + \dots + |c_m| \cdot \|e_m\|$$

$$\leq (c_1^2 + \dots + c_m^2)^{1/2} \cdot (\|e_1\|^2 + \dots + \|e_m\|^2)^{1/2}$$

c.s. \Rightarrow

$$= \|x\|$$

A

Step 3 Dimostrare che la funzione $x \rightarrow \|x\|$ è continua rispetto alla $\|x\|$.

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\| \leq A \cdot \|x - y\|$$

triangle Step 2

Step 4 Considero $\varphi(x) := \frac{\|x\|}{\|x\|}$ e osservo che questa è

continua in $\mathbb{X} \setminus \{0\}$ rispetto alla $\|\cdot\|$. La sfera $\|\cdot\| = 1$ è compatta rispetto alla $\|\cdot\|$, quindi sulla sfera $c_\theta(x)$ ammette max e min e inoltre il min è > 0 perché è il valore assunto in un p.t.

Def. teo 1. Se esistono a e A , allora la uozione di conn. è la stessa.

Leggermente meno evidente è il viceversa.

Note Title

28/02/2018

COMPATTEZZA IN SPAZI METRICI

Def. Un sp. metrico (X, d) si dice **totalmente limitato** se

$$\forall r > 0 \exists n \geq 1 \exists x_1, \dots, x_n \in X \text{ t.c. } X \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_r(x_i)$$

In tal caso (x_1, \dots, x_n) si dice una **r -rete**.

Brutalmente: x_1, \dots, x_n sono distributori di benzina e ognuno (ogni el. di X) ha un distributore a distanza $< r$.

Esercizio (facile, ma non ovvio) Totalmente lim. \Rightarrow limitato

Esempio limitato $\not\Rightarrow$ tot. limitato

X = insieme infinito con distanza banale $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$.
Ha diam = 1, ma non esiste r -rete con $r < 1$.

TEOREMONE Sia (X, d) metrico.

Allora sono fatti equivalenti

- (i) (X, d) è completo + tot. limitato,
- (ii) (X, d) è compatto per successioni,
- (iii) (X, d) è compatto per ricoprimenti (ogni ricoprimento aperto ammette sottoricopr. finito)

Schema dim. $\underline{(ii) \Rightarrow \text{completo}}$ $\underline{(ii) \Rightarrow \text{tot. lim.}}$ $\underline{(i) \Rightarrow (iii)}$
 $\underline{(i) \Leftrightarrow (ii)}$

$$(iii) \Rightarrow (ii)$$

$$(i) + (ii) \Rightarrow (iii)$$

(iii) \Rightarrow completo

H_p : compatto per successioni

Tesi: le successioni di Cauchy convergono

Dim. Sia $\{x_n\}$ di Cauchy. Per H_p ha s.succ. convergente, ma allora (vedi les. precedenti) tutta la succ. converge allo stesso limite.

(ii) \Rightarrow totalmente limitato

Dim. La tesi è

$$\forall r > 0 \exists m \geq 1 \exists x_1, \dots, x_m \in \mathbb{X} \text{ t.c. } \mathbb{X} \subseteq \bigcup_{i=1}^m B_r(x_i)$$

Supponiamo per assurdo che sia falso. Allora

$$\exists r_0 > 0 \forall n \geq 1 \forall x_1, \dots, x_m \in \mathbb{X} \text{ vale } \bigcup_{i=1}^m B_{r_0}(x_i) \not\subseteq \mathbb{X}$$

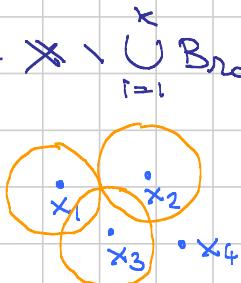
Costruisca una succ. x_n in questo modo:

\rightarrow prendo $x_1 \in \mathbb{X}$ a caso

\rightarrow fissati x_1, \dots, x_k , prendo $x_{k+1} \in \mathbb{X} \setminus \bigcup_{i=1}^k B_{r_0}(x_i)$

Per questa successione vale

$$(*) \quad d(x_i, x_j) \geq r_0 \quad \forall i \neq j.$$



Questa successione NON può avere s.succ. convergente perché sarebbero di Cauchy, il che va contro la (*).

(i) \Rightarrow (ii)

Lemma (Procedimento diagonale) Sia

$N = N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots \supseteq N_k \supseteq \dots$ una famiglia di insiemi tutti con infiniti elementi. Allora esiste una succ. $\{m_k\} \subseteq N$ t.c. $m_k \in N_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $m_{k+1} > m_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Dim (quasi ovvia) Prendo $m_0 \in \mathbb{N} = N_0$ a caso.

Supponiamo di aver scelto m_0, m_1, \dots, m_k e vogliamo scegliere $m_{k+1} \in N_{k+1}$ tale che $m_{k+1} > m_k$. Questo è possibile perché N_{k+1} ha ∞ elementi.

Oss. La succ. del lemma precedente verifica

$$m_i \in N_j \quad \text{per ogni } j \leq i.$$

Dim che (i) \Rightarrow (ii) Prendo una succ. $\{x_n\}$ e devo trovare una s.succ. convergente.

Basta trovare una s.succ. di Cauchy e poi sfruttare la completezza.

Per trovare s.succ. di Cauchy uso la totale limitatezza e il procedimento diagonale.

\rightarrow Pongo $N_0 := \mathbb{N}$.

\rightarrow Scelgo $r=1$ e trovo una 1-rete

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_1(y_i)$$

Almeno una di queste palle contiene x_n per infiniti indici n . Chiamo N_1 questi infiniti indici.

\rightarrow Scelgo $r = \frac{1}{2}$ e trovo una $\frac{1}{2}$ -rete

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{\frac{1}{2}}(y_i) \quad \begin{matrix} \text{(sia } n \text{ sia } y_i \text{ possono} \\ \text{essere diversi da prima)} \end{matrix}$$

Almeno una di queste palle contiene x_n per infiniti indici di N_1 . Chiamo N_2 questi indici.

\rightarrow Analogamente ... scelgo $r = \frac{1}{k} \dots$ e chiamo $N_k \dots$

Ora prendo x_{m_k} dove m_k è la succ. di indici data dal procedimento diagonale. Dico che è di Cauchy.

Mi viene dato $\varepsilon > 0$, prendo k_0 tale che $\frac{1}{k_0} < \frac{\varepsilon}{2}$.
 Allora per ogni $i \neq j$ con $i \geq k_0, j \geq k_0$
 vale che

$$x_{ni} \in B_{\frac{1}{k_0}}(y) \quad x_{nj} \in B_{\frac{1}{k_0}}(y)$$

stesso y

e quindi $d(x_{ni}, x_{nj}) \leq \frac{2}{k_0} < \varepsilon$.

— o — o —

(iii) \Rightarrow (ii) H_p : compatto per ricoprimenti
 Th : compatto per successioni.

Lemma Sia $\{x_n\} \subseteq \mathbb{X}$ una succ.

Supponiamo che esista $x_\infty \in \mathbb{X}$ tale che per ogni $r > 0$
 vale che

$x_m \in B_r(x_\infty)$ frequentemente

Allora esiste s.succ. $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$.

Dim. Costruisco inductivamente la s.succ.

Scelgo x_{n_0} a caso. Dopo aver scelto $x_{n_0}, x_{n_1}, \dots, x_{n_k}$
 Scelgo $x_{n_{k+1}}$ in modo che $n_{k+1} > n_k$ e

$$d(x_{n_{k+1}}, x_\infty) \leq \frac{1}{k+1} \quad (x_{n_k} \rightarrow x_\infty)$$

Penso grazie all'ipotesi con $r = \frac{1}{k+1}$ (il frequentemente
 dice che posso avere indice $n_{k+1} > n_k$).

Dim. che (iii) \Rightarrow (ii) Presa $\{x_n\}$ succ. qualunque, devo
 trovare s.succ. com. Basta che trovi x_∞ che verifica
 le ipotesi del lemma. Devo quindi dim. che

$\exists x \in \mathbb{X} \quad \forall r > 0 \quad x_m \in B_r(x)$ frequentemente

Suppongo che NON sia vera. Allora

$\forall x \in \mathbb{X} \exists r > 0$ t.c. $x_m \in B_r(x)$ solo per un numero finito di indici.

Ora $\{B_{r(x)}(x)\}_{x \in \mathbb{X}}$ sono un ricoprimento aperto di \mathbb{X} .

Per ipotesi questo ammette un s.ricopr. finito, cioè

$$\mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^m B_{r_i}(y_i)$$

Ognuna di queste palle contiene gli el. della succ. x_m solo per un numero finito di indici, il che è male.

— o — o —

Esercizio

① (iii) \Rightarrow Quiditato

Prendo $x_0 \in \mathbb{X}$ a caso e considero il ricoprimento

$$\{B_r(x_0)\}_{r \in \mathbb{N}}$$

② (iii) \Rightarrow tot. Quiditato

Prendo $r > 0$ (mi viene dato) e considero

$$\{B_r(x)\}_{x \in \mathbb{X}}$$

Questo ammette s.ricopr. finito che dà la r -rete.

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 074

Note Title

28/02/2018

$$(i) + (ii) \Rightarrow (iii)$$

Lemma (raggio magico - Numero di Lebesgue)

Sia (X, d) compatto per successioni.

Sia $\{M_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X .

Allora esiste almeno un $r > 0$ con questa proprietà:

$$\forall x \in X \ \exists i \in I \text{ t.c. } B_r(x) \subseteq M_i.$$

(sarebbe ovvio se r dipendesse da x , la cosa importante è che r non dipende da x !!)

Dim. Supponiamo per assurdo che nessun raggio sia magico. Allora

$$\forall r > 0 \ \exists x \in X \text{ t.c. } B_r(x) \text{ non è contenuta in nessun } M_i.$$

Per la gioco con $r = \frac{1}{m}$, trovando $x_m \in X$ t.c. $B_{\frac{1}{m}}(x_m)$ non sta in nessun M_i .

Per ipotesi x_m ammette una s.succ. $x_{m_k} \rightarrow x_\infty$

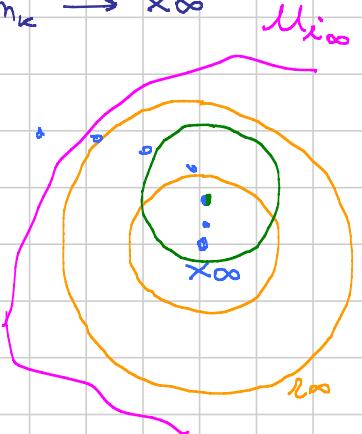
Ora $x_\infty \in M_{i_\infty}$ per def. di ricopr.

ed essendo aperto esiste $r_\infty > 0$ t.c.

$$B_{r_\infty}(x_\infty) \subseteq M_{i_\infty}$$

Ora $x_{m_k} \rightarrow x_\infty$ quindi

$$x_{m_k} \in B_{\frac{r_\infty}{2}}(x_\infty) \text{ definitiv.}$$



Per tutti questi x_{m_k} vale che $B_{\frac{r}{2}}(x_{m_k}) \subseteq M_{i_{m_k}}$

il che va contro l'ipotesi dell'assunzione appena

$$\frac{1}{m_k} < \frac{r}{2}$$

il che accade definitivamente.

— o — o —

Ho usato un sotto-lemma: se $d(y, x) \leq \frac{r}{2}$, allora

$$B_{\frac{r}{2}}(y) \subseteq B_r(x)$$

Dim. Sia $z \in B_{\frac{r}{2}}(y)$. Allora

$$\begin{aligned} d(z, x) &\leq d(z, y) + d(y, x) < r \\ &< \frac{r}{2} \quad \leq \frac{r}{2} \end{aligned}$$

— o — o —

Dim. che (ii) + (i) \Rightarrow (iii)

Sia dato un ricopr. $\{M_i\}_{i \in I}$. Voglio trovare s.ric. finito.

Grazie a (i) ho un raggio magico r .

Grazie alla tot. dim. ho una r -rete

$$X = \bigcup_{k=1}^n B_r(x_k)$$

Grazie alla magicità del raggio si ha che

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \exists i_k \in I \text{ t.c. } B_r(x_k) \subseteq M_{i_k}$$

Ma allora

$$X = \bigcup_{k=1}^n B_r(x_k) \subseteq \bigcup_{k=1}^n M_{i_k}$$

— o — sottoricoprimento finito

Prop. (Caratt. della totale limitatezza)

Sia (X, d) metrico.

Allora sono fatti equivalenti

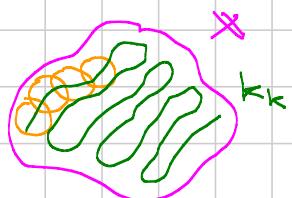
(i) (X, d) è totalmente limitato

(ii) per ogni $r > 0$ esiste $K_r \subseteq X$ totalmente limitato t.c.

$$\forall x \in X \exists y \in K_r \text{ t.c. } d(x, y) < r.$$

Oss. Brutalmente la (ii) dice che posso piazzare una r rete fatta con distributori messi in ogni punto di K_r , eventualmente infinito

Dim $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ è ovvia: basta scegliere come K_r i distributori di una r rete.



(ii) \Rightarrow (i) Mi viene dato $r > 0$. Uso (ii) con $\frac{r}{2}$ e ottengo un sottoinsieme K con la proprietà che ogni $x \in X$ dista da K meno di $\frac{r}{2}$.

Per la tot. lim. di K trovo x_1, \dots, x_n in K tali che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{\frac{r}{2}}(x_i)$$

↑
occhio al raggio

Dico che

$$X = \bigcup_{i=1}^n B_r(x_i)$$

Preso $x \in X$ esiste $y \in K$ t.c. $d(x, y) < \frac{r}{2}$. Poi trovo $i \in \{1, \dots, n\}$ t.c. $d(y, x_i) < \frac{r}{2}$.

Ma allora

$$d(x, x_i) \leq d(x, y) + d(y, x_i) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Teo. di Heine - Cantor Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) sp. metrici e sia $f: X \rightarrow Y$.

Supponiamo che

(i) f è continua

(ii) (X, d) è compatto.

Allora f è unif. cont.

Dim. 1 (Comp. per succ. + assurdo)

Se non è vero, allora

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \quad \exists y \in B_\delta(x) \quad d_Y(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0$$

Me lo gioco con $\delta = \frac{1}{m}$ e trovo $\{x_m\}$ e $\{y_m\}$.

Per hp esiste $x_{m_k} \rightarrow x_\infty$. Di conseguenza $y_{m_k} \rightarrow x_\infty$.
Ma allora

↑
va dimostrato

$$d_Y(f(x_{m_k}), f(y_{m_k})) \geq \varepsilon_0$$

↓ ← va dimostrato

$$0 = d_Y(f(x_\infty), f(x_\infty))$$

Dim. 2 (Comp. per ricoprimenti + raggio magico)

Per ipotesi

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in B_\delta(x) \quad d_Y(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$$

Problema: fin qui δ dipende da x (oltre che da ε).

Lo chiamiamo $\delta(x)$.

(Vedere cosa succede se considero ricopr. $\{B_{\delta(x)}(x)\}_{x \in X}$ e prendo s. ricopr. finito)

Via d'uscita: considero il ricoprimento come sopra e prendo il suo raggio magico r .

Dico che r è il δ che stavamo cercando nell'inf. cont.

Infatti, siamo x e y in \mathbb{X} t.c. $d(x, y) < r$. Allora

$$y \in B_r(x) \subseteq B_{\delta(z)}(z)$$

per un qualche $z \in \mathbb{X}$. Ma allora

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(y)) &\leq d_Y(f(x), f(z)) + d_Y(f(z), f(y)) \\ &\leq \varepsilon \qquad \qquad \qquad \leq \varepsilon \\ &\text{perché } x \text{ e } y \in B_{\delta(z)}(z) \\ &= 2\varepsilon \end{aligned}$$

Quindi se partivo con $\frac{\varepsilon}{2}$ ottenevo ε alla fine.

Dim 3 (Compattessa per ricopr. senza raggio magico).

Mi viene dato $\varepsilon > 0$. Otengo $\delta(x)$ come sopra pensando ad $\frac{\varepsilon}{2}$. Considero il ricoprimento

$$\left\{ B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x) \right\}_{x \in \mathbb{X}}$$

Esiste un s.ricopr. finito

$$\mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^n B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i)$$

Prendo $\delta := \frac{1}{2} \min \{ \delta(x_1), \dots, \delta(x_m) \}$. Dovrebbe andare bene.

Infatti: siamo x e y in \mathbb{X} con $d(x, y) \leq \delta$. Allora esiste $i \in \{1, \dots, n\}$ t.c.

$$x \in B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x_i)$$

Ma allora $y \in B_{\delta(x_i)}(x_i)$. Poiché $x \in B_{\delta(x_i)}(x_i)$ concludo come sopra

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(y)) &\leq d_Y(f(x), f(x_i)) + d_Y(f(x_i), f(y)) \\ &\leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

(Controllare con cura i fattori 2).

I fattori 2 sono ok. Aggiungi
3 $\delta(x_i)$ dopo video

— o — o —

Annotato dall'ultima volta Se due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ inducono la stessa convergenza, allora esistono $A \geq a > 0$ tali che

$$a \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq A \|\cdot\|_1$$

Dim. Se così non fosse, allora (a meno di scambiare le due norme) esiste una succ. x_m t.c.

$$\frac{\|x_m\|_2}{\|x_m\|_1} \rightarrow 0$$

Per omogeneità posso supporne wlog che $\|x_m\|_1 = 1$.

Ma allora sappiamo che $\|x_m\|_2 \rightarrow 0$, cioè $x_m \rightarrow 0$ per la norma 2, ma allora $x_m \rightarrow 0$ per la norma 1, il che è impossibile essendo $\|x_m\|_1 = 1$.

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 075

Note Title

07/03/2018

Def. Sia (X, d) metrico, e sia $f: X \rightarrow X$.

Si dice che f è una **CONTRAZIONE** se

$$\exists L < 1 \quad \text{t.c.} \quad d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{X}^2$$

cioè f è lip. con costante $L < 1$.

Teorema (Teorema delle contrazioni - Teo. di p.to fisso di Banach)

Sia (X, d) sp. metrico COMPLETO e sia $f: X \rightarrow X$ contrazione.

Allora f ammette un unico p.t.o fisso, cioè esiste un unico $x \in X$ t.c.

$$f(x) = x.$$

Interpretazione cartografica Se metto sul tavolo una mappa della città (o dell'Italia), c'è un unico punto che rappresenta se stesso.

Dim. Unicità Siano x e y due p.ti fissi. Allora

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y)$$

\uparrow fissa \uparrow contr.

$$\Leftrightarrow \underbrace{(1-L)d(x,y)}_{\geq 0} \leq 0 \Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y.$$

Esistenza Prendo $x_0 \in \mathbb{X}$ a caso e costruisco per ricorrenza $x_{m+1} = f(x_m)$. **SE** $\{x_m\}$ avesse un limite, diciamo $x_m \rightarrow x_\infty$, allora

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

\downarrow \downarrow \leftarrow f è continua (è Lip.)

$$x_\infty = f(x_\infty)$$

Basta dim. che $\{x_n\}$ è di Cauchy. Stima base

$$d(x_0, x_1) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq L d(x_0, x_1)$$

$$d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq L d(x_1, x_2) \leq L^2 d(x_0, x_1)$$

→ per induzione ottengo

$$d(x_{m+1}, x_m) \leq L^m d(x_1, x_0) \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Prendiamo WLOG $m > n$. Allora

$$d(x_m, x_m) \leq d(x_m, x_{m-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n)$$

↑
triang.

$$\leq L^{m-1} d(x_1, x_0) + \dots + L^n d(x_1, x_0)$$

$$= d(x_1, x_0) \sum_{k=n}^{m-1} L^k$$

$$\leq d(x_1, x_0) \sum_{k=n}^{\infty} L^k$$

$$= d(x_1, x_0) \frac{L^n}{1-L}$$

geometrica

→ tende a 0 perché $L < 1$.

Dato $\varepsilon > 0$, scelgo n_0 t.c.

$$d(x_1, x_0) \frac{L^n}{1-L}$$

$$\leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

e dalla stima precedente ottengo

$$d(x_m, x_n) \leq \varepsilon \quad \forall m > n \geq n_0$$

cioè $\{x_n\}$ è di Cauchy.

— o — o —

Osservazioni / esempi

① Se ne \mathbb{X} completo

$$\mathbb{X} = (0,1) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad L = \frac{1}{7}$$

② Se $L=1$ le cose possono andare male

$$\mathbb{X} = \mathbb{R} \quad f(x) = x \quad \text{esist. ok} \quad \text{unicità no}$$

$$\mathbb{X} = \mathbb{R} \quad f(x) = x+7 \quad \text{" no}$$

va male anche con \mathbb{X} compatto: $\mathbb{X} = S^1$, $f = \text{rot. } 90^\circ$

③ Non basta "contrazione debole", cioè

$$d(f(x_1), f(y)) < d(x_1, y) \quad \forall (x_1, y) \in \mathbb{X}^2 \text{ con } x_1 \neq y$$

Basta per l'unicità, ma non per l'esistenza

$$\mathbb{X} = \mathbb{R} \quad f(x) = x - \arctan x + 7 \quad \text{no pti fissi}$$

(f è contr. debole perché $0 \leq f'(x) < 1$ + teo. Lagrange)

④ Più Hard \mathbb{X} compatto + contrazione debole basta?

Falso: \mathbb{X} cpt. + contr. debole \Rightarrow contr. vera.

— o — o —

Oss. Nella dim. dell'esistenza posso partire da un x_0 qualunque. La convergenza è molto forte perché, detto x_∞ il pto fisso, vale

$$d(x_m, x_\infty) \leq L^m d(x_0, x_\infty)$$

La convergenza è esponentiale

— o — o —

COMPLETAMENTO

Def. Sia (X, d) metrico. Il (un) completamento di (X, d) è una terna (\hat{X}, \hat{d}, i) tale che

- (1) (\hat{X}, \hat{d}) è uno sp. metrico completo
 (2) $i: X \rightarrow \hat{X}$ è una ISOMETRIA, cioè

$$\hat{d}(i(x), i(y)) = d(x, y) \quad \begin{array}{l} \text{(posso pensare } X \text{ come} \\ \text{s.sp. di } \hat{X} \text{)} \end{array}$$

- (3) $i(X)$ è denso in \hat{X} , cioè $\text{Clos}(i(X)) = \hat{X}$.

Esempio $X = (0, 1)$ con la metrica classica

Il suo completamento è $[0, 1]$.

- Se non ci fosse la (3) avrebbe bene anche \mathbb{R}
- Se non ci fosse la (2) avrebbe bene anche S^1

Teorema 1 (Esistenza) Ogni sp. metrico ammette (almeno) un completamento

Teorema 2 (Estensione)

Sia (X, d) metrico, sia (Y, d_Y) metrico COMPLETO.

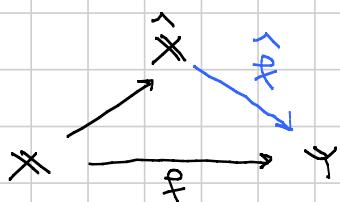
Sia $f: X \rightarrow Y$ unif. continua.

Sia (\hat{X}, \hat{d}, i) un completamento di X .

Allora esiste ed è unica $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow Y$ che estende f , cioè tale che

$$\hat{f}(i(x)) = f(x) \quad \forall x \in X$$

oppure (che è lo stesso) che chiude il diagramma



Inoltre \hat{f} è unif. cont.

Teorema 3 (Unicità) Il completamento è unico a meno di isometrie.

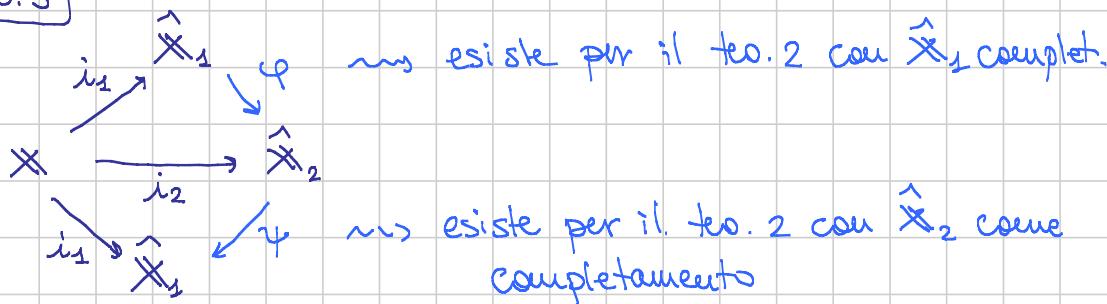
Detto altimenti: siamo $(\hat{\mathbb{X}}_1, \hat{d}_1, i_1)$ e $(\hat{\mathbb{X}}_2, \hat{d}_2, i_2)$ due completamenti di (\mathbb{X}, d) .

Allora esiste $\varphi: \hat{\mathbb{X}}_1 \rightarrow \hat{\mathbb{X}}_2$ tale che

- φ è invertibile
- φ è isometria
- φ commuta con le immersioni, cioè

$$\varphi(i_1(x)) = i_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Dm. teo. 3



Dovendo concludere che $\varphi \circ \varphi = \text{identità}$ su $\hat{\mathbb{X}}_1$ e che sia una isometria.

Questo è vero perché vale su $i_1(\mathbb{X})$ che è denso in $\hat{\mathbb{X}}_1$.

(Lemma: una funz. cont. che è isometria su un denso lo è ovunque).

— o — o —

Note Title

07/03/2018

Dm. teo. estensione

Step 1 Le funzioni unif. cont. mandano succ. di Cauchy in succ. di Cauchy (Lemma generale che vale per $f: X \rightarrow Y$ tra due sp. metrici senza ulteriori ipotesi.)

Sia $\{x_m\}$ di Cauchy in X . Prendo $\{f(x_m)\}$.

Viene dato $\varepsilon > 0$. Prendo il $\delta > 0$ corrisp. nell'unif. cont.

Prendo $m_0 \in \mathbb{N}$ corrisp. a δ nella def. di $\{x_m\}$ di Cauchy.

Per ogni $m, m \geq m_0$ vale

$$\underbrace{d_X(x_m, x_m)}_{\text{scelta di } m_0} \leq \delta \Rightarrow d_X(f(x_m), f(x_m)) \leq \varepsilon$$

$\uparrow \delta \text{ corr. ad } \varepsilon$
 nell'unif. cont.

Step 2 Definizione dell'estensione $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow Y$.

Dato $x \in \hat{X}$, so che esiste $\{x_m\} \subseteq X$ tale che

$i(x_m) \rightarrow x$ in \hat{X} (uso densità di $i(X)$)

Ora $\{i(x_m)\}$ è di C. in \hat{X} (perché converge), dunque $\{x_m\}$ è di C. in X (i è isometria), dunque $\{f(x_m)\}$ è di C. in Y (f è u.c.), dunque $f(x_m)$ ammette un limite $y \in Y$ (che è completo). Pongo

$$\hat{f}(x) := y$$

Resta da verificare che è una buona definizione, il che si fa come ad Analisi 1, cioè se $i(\bar{x}_m) \rightarrow x$ allora considero la succ. mista

$$x_0, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_3, \dots$$

Step 3 È unif. continua.

Mi viene dato $\varepsilon > 0$. Per la f c'è un δ che realizz. l'U.C.

Prendo $\hat{\delta} \in (0, \delta)$ e dico che questo va bene per la \hat{f} .

Dati x e y in $\hat{\mathbb{X}}$ con $\hat{d}(x, y) \leq \hat{\delta}$, provo succ. approx.

$$i(x_m) \rightarrow x \quad i(y_m) \rightarrow y$$

Allora definito.

$$\hat{d}(i(x_m), i(y_m)) \leq \delta$$

Ma allora $d(x_m, y_m) \leq \delta$ (isometria) dunque

$$d_{\mathbb{Y}}(f(x_m), f(y_m)) \leq \varepsilon \quad (\varepsilon/\delta \text{ di } f \text{ U.C.})$$

e passando al limite

$$\lim_{x \rightarrow x_m} \lim_{y \rightarrow y_m} d_{\mathbb{Y}}(\hat{f}(x), \hat{f}(y)) \leq \varepsilon.$$

Dim. teo. 1 Sia (\mathbb{X}, d) sp. metrico dato.

Step 1 Definisco $\hat{\mathbb{X}}$ come l'insieme di tutte le succ. di Cauchy in \mathbb{X} .

Definisco $\hat{d} : \hat{\mathbb{X}}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

come

$$\hat{d}(\{x_m\}, \{y_m\}) := \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ 2. \text{ succ. di } C.}} d(x_m, y_m).$$

Verifiche da fare: • $\hat{\mathbb{X}} \neq \emptyset$

- \hat{d} è una specie di distanza, cioè verifica tutte le proprietà tranne (d1) (distanza = 0 \Rightarrow punti uguali)

• \hat{d} è bene definita, cioè il limite esiste, cioè che $\{d(x_m, y_m)\}$ è una succ. di C. in \mathbb{R}

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq$$

$$\leq |d(x_m, y_n) - d(x_m, y_m)| + |d(x_m, y_m) - d(x_m, y_m)|$$

$$\leq d(y_m, y_m) + d(x_m, x_m) \\ \leq \varepsilon \qquad \qquad \leq \varepsilon$$

Step 2 Definisco $\hat{\mathbb{X}}$ e \hat{d} quoziettando rispetto alla relazione di equivalenza su $\hat{\mathbb{X}}$

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \iff d(x_n, y_n) \rightarrow 0$$

Verifiche da fare

- è una relazione di equivalenza (quindi posso $\hat{\mathbb{X}}$ come quoziante)
- \hat{d} passa al quoziante, cioè se

$$\{x_n\} \sim \{\bar{x}_n\} \text{ e } \{y_n\} \sim \{\bar{y}_n\} \text{ allora}$$

$$\hat{d}(\{x_n\}, \{y_n\}) = \hat{d}(\{\bar{x}_n\}, \{\bar{y}_n\})$$

(questo mi permette di definire $\hat{d} : \hat{\mathbb{X}}^2 \rightarrow \mathbb{R}$)

- \hat{d} è una distanza vera su \hat{X} (il quoziente mi regala gratis di!)

Step 3 Definisco $i: X \rightarrow \hat{X}$.

Prendo $x \in X$ lo penso come succ. di C. costante su \hat{X} e prendo la sua classe in \hat{X} .

Devo verificare

- i è isometria (semplifica una volta capito cosa fare)
- $i(X)$ è denso in \hat{X} . Prendo $y \in \hat{X}$. Questo è da classe di equiv. di un succ. di C. $\{x_n\} \subseteq X$.

Dico che $i(x_n) \rightarrow y$ in quanto

$$\hat{d}(i(x_n), y) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m)$$

più piccolo di ogni ϵ fissato
 se n è abbastanza grande

Step 4 (\hat{X} è completo)

Devo prendere una succ. di Cauchy di classi di equiv. di Succ. di C. !!!

$\{y_n\} \subseteq \hat{X}$ è di Cauchy in \hat{X} , cioè

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall m \geq n_0 \quad \hat{d}(y_n, y_m) \leq \epsilon$$

Voglio un presunto limite y_∞ . Cerco la succ. di C. in X la cui classe sarà y_∞ .

Uso la densità di $i(X)$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in X$ tale che

$$\hat{d}(i(x_n), y_n) \leq \frac{1}{n}$$

Dico che $\{x_n\}$ è di C . e a quel p.t. posso trovare come la sua classe e dim. che $y_n \rightarrow y_\infty$.

→ gli x_n sono di C . perché sono vicini agli y_n

$$d(x_n, x_m) = \hat{d}(i(x_n), i(x_m)) \leq \text{metto i con. } y_n \text{ e } y_m \text{ e finisco.}$$

→ verifico che $y_n \rightarrow y_\infty$

$$\hat{d}(y_n, y_\infty) \leq \underbrace{\hat{d}(y_n, i(x_n))}_{\leq \frac{1}{n}} + \underbrace{\hat{d}(i(x_n), y_\infty)}$$

→ in analogia con lo step 3 perché y_∞ è proprio la classe di $\{x_n\}$.

— o — o —

ANALISI

2

- LEZIONE 077

Titolo nota

08/03/2018

"VARIETÀ"

- Teo. FUNZIONI IMPLICITE
- Teo. FUNZIONE INVERSA
- Moltiplicatori di Lagrange

Teo. funzioni implicite (a Pisa teorema del DINI)

Setting più semplice. Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, data $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, poniamo

$$V := \{x \in \Omega : f(x) = 0\} \quad \text{luogo di zeri di } f. \\ (\text{f equ. in } \mathbb{R}^n)$$

Più in generale, possiamo prendere

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ e } f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{f equ. in } \mathbb{R}^n) \\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ e } f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k \quad (f \text{ equ. in } \mathbb{R}^n)$$

Brutalmente: se metto k equazioni in \mathbb{R}^n ottengo un
oggetto V di dimensione $n-k$
(questo k si chiama co-dimensione)

Problema: cercare, sotto opportune ipotesi su f , di descrivere
la struttura di V .

Casi classici

- $n=2$ e $k=1$
- n generico e $k=1$
- n generico e k puro ($k < n$).

Teorema ($m=2$ e $k=1$) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, sia $(x_0, y_0) \in \Omega$, sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

- (i) $f(x_0, y_0) = 0$
- (ii) f continua in Ω
- (iii) $f_y(x, y)$ esiste ed è continua in Ω
- (iv) $f_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Poniamo

$$V := \{(x, y) \in \Omega : f(x, y) = 0\}.$$

① Allora esistono $\rho_0 > 0$ e $r_0 > 0$, ed esiste unica

$$\varphi: [x_0 - \rho_0, x_0 + \rho_0] \rightarrow [y_0 - r_0, y_0 + r_0]$$

tali che

$$V \cap ([x_0 - \rho_0, x_0 + \rho_0] \times [y_0 - r_0, y_0 + r_0]) = \{(x, y) : x \in [x_0 - \rho_0, x_0 + \rho_0], y = \varphi(x)\}$$

② La funzione φ è continua in $[x_0 - \rho_0, x_0 + \rho_0]$

③ Se f è C^1 in Ω , allora φ è derivabile e vale

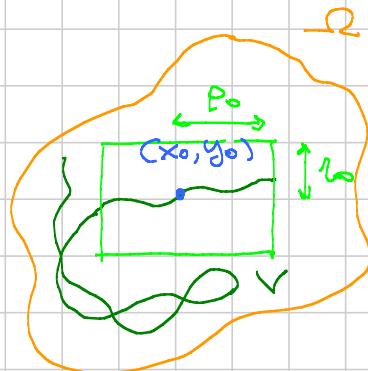
$$\varphi'(x) = - \frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$$

④ Se f è C^k in Ω , allora φ è C^k .

Geometricamente: nella finestra centrata in (x_0, y_0) e di semilati opportuni ρ_0 ed r_0 l'insieme V è il grafico di una certa $\varphi(x)$.

Moralmente: sto explicitando

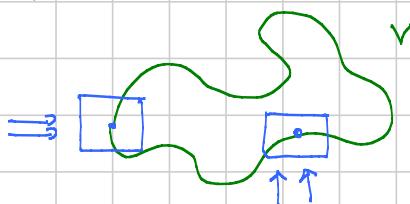
$f(x, y) = 0$ come $y = \varphi(x)$. Fuori dalla finestra non so nulla



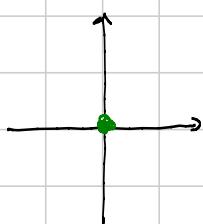
Oss. L'ipotesi dunque è che $f_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Se fosse $f_x(x_0, y_0) \neq 0$, allora posso "ricavare" $x = \varphi(y)$.

Se $\nabla f(x, y) \neq 0$ ovunque in Ω , allora in ogni p.t.o di ∇ posso ricavare in almeno uno dei 2 versi.

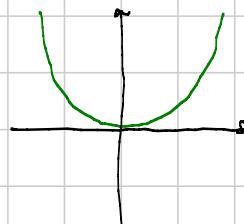


Dove $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ può succedere di tutto. Sia $(x_0, y_0) = (0, 0)$



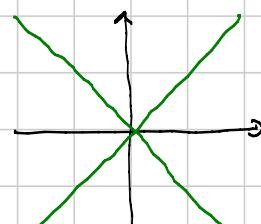
$$x^2 + y^2 = 0$$

(manca esistenza)



$$(y - x^2)^2 = 0$$

(no hp, ma si tesi)



$$x^2 - y^2 = 0$$

(no unicità).

Dim. Esistenza e unicità della φ

Scogliamo la finestra. wlog assumo $f_y(x_0, y_0) > 0$.

Per le ipotesi (iii) e (iv) esistono $\varepsilon_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$ t.c.

$$f_y(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \times [y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0]$$

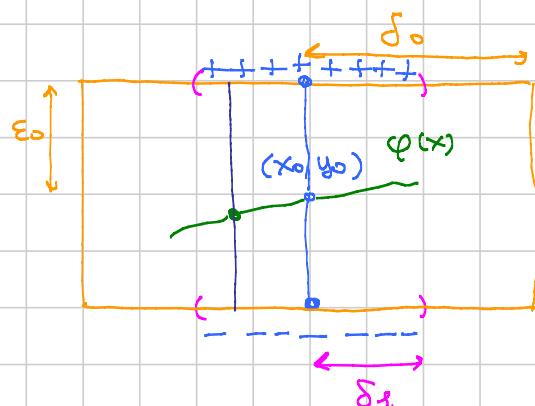
Considero $y \rightarrow f(x_0, y)$.

Per l'ipotesi su f_y avremo che

$$f(x_0, y_0 - \varepsilon_0) < 0, \quad f(x_0, y_0 + \varepsilon_0) > 0$$

Per continuità di $f(x, y)$, esiste

$\delta_1 \in (0, \delta_0]$ tale che



$$f(x, y_0 - \varepsilon_0) < 0$$

$$f(x, y_0 + \varepsilon_0) > 0$$

$$\forall x \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$$

$$\forall x \in \text{..}$$

Se lo sp. $\rho_0 := \delta_1$ e $\tau_0 := \varepsilon_0$.

Per ogni $x \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$ considero la funzione

$$y \rightarrow f(x, y)$$

Questa è negativa per $y = y_0 - \varepsilon_0$, positiva per $y = y_0 + \varepsilon_0$ e strettamente crescente in mezzo. Quindi esiste un unico y compreso tra $y_0 - \varepsilon_0$ e $y_0 + \varepsilon_0$ t.c. $f(x, y) = 0$.

Chiamo questo y con $\varphi(x)$.

Continuità Voglio dimostrare che $\varphi(x)$ è continua.

Basta dimostrare che è continua in x_0 . Ci sono due modi

1° modo (Cont. per succ. e Demma sotto-sotto)

Prendo $x_m \rightarrow x_0$ e voglio dim. che $\varphi(x_m) \rightarrow y_0$.

Se non fosse vero, esisterebbe una s.succ. tale che

$$\varphi(x_{m_k}) \rightarrow z_0 \neq y_0. \quad (z_0 \in [y_0 - \tau_0, y_0 + \tau_0])$$

D'altra parte

$$0 = f(x_{u_k}, \varphi(x_{u_k}))$$

↓

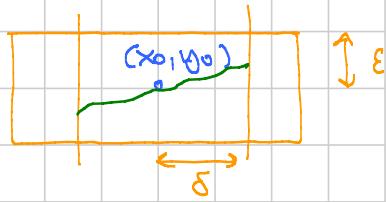
$f(x_0, z_0) = 0$ e l'unico p.t.o "sopra x_0 " in cui f si annulla nella finestra è y_0 .

2o modo (ε/δ e restrizione)

Mi viene dato $\varepsilon > 0$.

Ripetendo la dimostrazione trovo una nuova finestra con semiampiezza verticale ε in cui

ν è grafico di qualcosa, che per unicità è proprio φ . Quindi $\varphi(x) \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ se x è abbastanza vicino ad x_0 .



Oss. Usando il 2o modo, finora abbiamo usato solo la continuità separata nelle 2 variabili.

Derivabilità

Brutal modo: $f(x, \varphi(x)) = 0$. Derivo e ottengo

$$f_x(x, \varphi(x)) + f_y(x, \varphi(x)) \varphi'(x) = 0 \quad \text{da cui}$$

$$\varphi'(x) = - \frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))} \quad (\text{Ho assunto che } \varphi \text{ fosse derivabile})$$

Rigoroso: faccio Taylor-Lagrange (anzi è Lagr. direzionale) in (x_0, y_0)

$$0 = f(x, \varphi(x)) = f(x_0, y_0) + \underset{0}{(x-x_0)} f_x(\xi, \eta) + (\varphi(x) - y_0) f_y(\xi, \eta)$$

$\varphi'(x_0)$

da cui

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = - \frac{f_x(\xi, \eta)}{f_y(\xi, \eta)}$$

Quando $x \rightarrow x_0$ il LHS $\rightarrow \varphi'(x_0)$ e grazie alla continuità sappiamo che $(\xi, \eta) \rightarrow (x_0, y_0)$.

Dalla derivabilità in x_0 segue la derivabilità in ogni altro p.t.o (pensato come "centro di finestra").

Ulteriore regolarità] **BOOTSTRAP !!!** A partire da

$$\varphi'(x) = - \frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$$

$f \in C^2$ e $\varphi \in C^1 \Rightarrow \varphi' \in C^1 \Rightarrow \varphi \in C^2$ e così via finché si può.

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 078

Titolo nota

08/03/2018

Funzioni implicite (n generico, k=1)

vecchio (x_0, y_0)

1

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto, sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, supponiamo $0 \in \Omega$.

Supponiamo che

$$(i) f(0) = 0$$

(ii) f continua in Ω

(iii) $f_{x_m}(x)$ esiste ed è continua in Ω

(c) $f_{x_m}(0) \neq 0$

Allora posso esplcitare come prima, trovando

$$\varphi: B_{\rho_0}(0) \rightarrow [-r_0, r_0]$$

palla di centro

O è raggiro po in \mathbb{R}^{m-1}

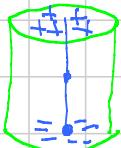
(ora la finestra è un cilindro)

$$\text{Inoltre } \varphi_{x_i}(x) = - \frac{f_{x_i}(x, \varphi(x))}{f_{x_m}(x, \varphi(x))} \quad \forall x \in B_\rho(0)$$

per ogni $i = 1, \dots, n-1$

Idea della dim

- Trovo una prima finestra $B_{\delta_0}(0) \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ in cui $f_{xm}(x) > 0$ 正



- Mi restringo alla retta verticale

$$z \mapsto f(0, \dots, 0, z)$$

e otengo che $f > 0$ nel centro della barra superiore
e $f < 0$ " " " " " " inferiore

- Restringo le basi in modo da avere tutto + sopra e tutto - sotto

- Considero tutte le rette verticali che congiungono due p.ti delle basi nistrette: li f è monotona e cambia segno, quindi si annulla esattamente una volta.

Il resto della dimostrazione è davvero analogo.

— o — o —

Casistica di esercizi: dato un luogo di zeri, ci chiedono

uno

- se è limitato
- se è compatto
- se è connesso
- come è fatto localmente

Esempio 1 $f(x,y) = \sin x + \cos y - e^{xy} = 0$

Come è fatto questo insieme?

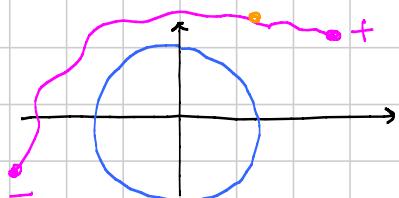
Non è limitato in quanto $x=0$ e y arbitrario funziona sempre.

Fatto generale ① Se $\liminf_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) > 0$, allora $\exists R > 0$ t.c.

$f(x,y) > 0$ fuori da $B_R(0,0)$ e quindi il luogo di zeri è limitato. Se f è pure continua, allora è pure compatto.

Idee se $\limsup f(x,y) < 0$.

② Se $\limsup f(x,y) > 0$ e $\liminf f(x,y) < 0$ (per $x^2+y^2 \rightarrow +\infty$) ed f è continua, allora il luogo di zeri non è limitato.



Occhio: unire + e - restando fuori dalla palla.

Nell'esempio $\liminf f = -\infty$ ($f(x, x)$ per $x \rightarrow +\infty$)

$\limsup f = 2$ $f\left(\frac{\pi}{2} + 2m\pi, -2m\pi\right)$

Esempio 2 $\sin x + e^{-x} - \arctan y - y = 1$

① V non è limitato ($\limsup = +\infty$, $\liminf = -\infty$)

② $(0,0) \in V$. Viamo a $(0,0)$ facciamo il teorema

$f_x(0,0) = 2$ $f_y(0,0) = -2$ \rightsquigarrow esplicito come voglio

Taylor!!!

Esplicito risp. ad y , cioè scrivo $y = \varphi(x)$.

Voglio calcolare $\dot{\varphi}(0) \approx \ddot{\varphi}(0)$

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))} \rightsquigarrow \varphi'(0) = -\frac{f_x(0,0)}{f_y(0,0)} = 1$$

Derivo con tanta pazienza 😊

$$\varphi''(x) = -\frac{(f_{xx} + f_{xy} \varphi') f_y - f_x (f_{yx} + f_{yy} \varphi')}{f_y^2}$$

Idea alternativa: calcolare i coeff. da Taylor!

Sappiamo che $\varphi \in C^\infty$ e quindi posso scrivere

$$\varphi(x) = x + \alpha x^2 + b x^3 + O(x^3)$$

\uparrow
 $\dot{\varphi}(0) = 0$

$$f(x, \varphi(x)) = \sin x + e^x - \arctan \varphi(x) - \varphi(x)$$

$$\begin{aligned} &= x - \frac{1}{6} x^3 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 - x - \alpha x^2 - b x^3 \\ &\quad + \frac{1}{3} x^3 - x - \alpha x^2 - b x^3 + O(x^3) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} = +2a \Rightarrow a = +\frac{1}{4} \quad \text{coeff. di } x^2$$

$$2b = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{6} \quad \text{coeff. di } x^3$$

Quindi $\varphi(0) = \frac{1}{2}$ $\varphi''(0) = 1$ (occhio ai fattoriali!)

③ V è un grafico globale, cioè esiste $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$V = \{(x, \varphi(x)) : x \in \mathbb{R}\}$$

Basta osservare che, per ogni x fisso, la funzione $y \rightarrow f(x, y)$ è st. monotona ($f_y < 0$) e passa da $-\infty$ a $+\infty$.

$$-\circ-\circ-$$

Esempio 3 $z + \arctan(xz) + e^{xy} = 1$

$(0,0,0) \in V$. Posso esplicitare lì vicino?

$$f_z(0,0,0) = 1 \quad (\text{Taylor})$$

Posso esplicitare $z = \varphi(x, y)$. Calcolare

$$\limsup_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\varphi(x,y)}{x^2 + y^2}$$

Si vede dalla formula che $\varphi_x(0,0) = \varphi_y(0,0) = 0$.

Quindi serve il Taylor di ordine 2

$$\varphi(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + o(\rho^2)$$

$$ax^2 + bxy + cy^2 + \cancel{1} + xy + o(\rho^2) = \cancel{1}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & & \end{matrix}$$

$$\frac{\varphi(x,y)}{x^2 + y^2} = \frac{-xy}{x^2 + y^2} + o(1)$$

[Due segni cambiati dopo video]

Note Title

12/03/2018

Teorema funzioni implicate (k=1, m=2) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2, (x_0, y_0) \in \text{Int}(\Omega), f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c.}$ (i) $f(x_0, y_0) = 0$
(ii) f continua in Ω (iii) f_y esiste continua in Ω
(iv) $f_y(x_0, y_0) \neq 0$.Allora $\exists \rho > 0 \exists r > 0 \exists \varphi: [x_0 - \rho, x_0 + \rho] \rightarrow [y_0 - r, y_0 + r] \text{ t.c.}$

$$\{(x, \varphi(x)): x_0 - \rho \leq x \leq x_0 + \rho\} = \{(x, y): |x - x_0| \leq \rho, |y - y_0| \leq r, f(x, y) = 0\}$$

Dim via punto fisso Supponiamo wlog $(x_0, y_0) = (0, 0)$ 2) Scelta delle costanti.

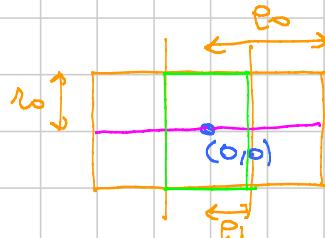
- Punto $m_0 > 0$ t.c. $\frac{1}{|f_y(0, 0)|} \leq \frac{1}{m_0}$ (posso definire m_0 in modo che ci sia =)
- Punto $p_0 > 0$ ed $r_0 > 0$ t.c.

$$|f_y(x, y) - f_y(0, 0)| \leq \frac{m_0}{2} \quad \forall (x, y) \in [-p_0, p_0] \times [-r_0, r_0]$$

- Punto $p_1 > 0$ tale che

$$|f(x, 0)| \leq \frac{m_0 r_0}{2} \quad \forall x \in [-p_1, p_1]$$

↑
posso perché $f(0, 0) = 0$
e f continua

La finestra ha $p = p_1$ e $r = r_0$ 

② Formulazione come punto fisso

Per ogni $x \in [-\rho_1, \rho_1]$ considero la funzione della variabile y :

$$\Phi_{(x)}(y) := y - \frac{f(x, y)}{f_y(0, 0)} \quad \forall y \in [-r_0, r_0]$$

Osservo che $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \Phi_{(x)}(y) = y \Leftrightarrow y$ è punto fisso della funzione $\Phi_{(x)}$.

Claim: $\rightarrow \Phi_{(x)}: [-r_0, r_0] \rightarrow [-r_0, r_0]$

\uparrow metrico completo

$\rightarrow \Phi_{(x)}$ è contrazione

③ Calcolo la derivata

$$\Phi_{(x)}'(y) = 1 - \frac{f_y(x, y)}{f_y(0, 0)} = \frac{f_y(0, 0) - f_y(x, y)}{f_y(0, 0)}$$

da cui

$$\begin{aligned} |\Phi_{(x)}'(y)| &\leq |f_y(0, 0) - f_y(x, y)| \cdot \frac{1}{|f_y(0, 0)|} \leq \frac{1}{2} \\ &\leq \frac{m_0}{2} \leq \frac{1}{m_0} \end{aligned}$$

④ Dimostro i claim Per ogni $x \in [-\rho_1, \rho_1]$ vale

$$|\Phi_{(x)}(y_2) - \Phi_{(x)}(y_1)| \leq \frac{1}{2} |y_2 - y_1| \quad \forall (y_1, y_2) \in [-r_0, r_0]^2$$

\uparrow
teo. Lagrange

da cui l'essere contrazione.

Resta da dim. che $\Phi_{(x)}$ manda $[-r_0, r_0]$ in sé, cioè

$$|\Phi_{(x)}(y)| \leq r_0 \quad \forall y \in [-r_0, r_0] \quad \forall x \in [-\rho_1, \rho_1]$$

$$\begin{aligned}
 |\Phi_{(x)}(y)| &= |\Phi_{(x)}(y) - \Phi_{(x)}(0) + \Phi_{(x)}(0)| \\
 &\leq |\Phi_{(x)}(0)| + |\Phi_{(x)}(y) - \Phi_{(x)}(0)| \leq r_0 \\
 &\quad \underbrace{|\Phi_{(x)}(0)|}_{\frac{1}{2}r_0} \quad \underbrace{|\Phi_{(x)}(y) - \Phi_{(x)}(0)|}_{\leq \frac{1}{2}|y|} \\
 &\leq \frac{m_0 r_0}{2} \frac{1}{m_0} \\
 &\quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}
 \end{aligned}$$

Caso generale (k equazioni in dimensione n)

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^m \quad m := m-k \quad (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^n$$

$$(x_0, y_0) \in \Omega \quad f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$$

\uparrow \uparrow
 m k var.
 var.

$$V := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^m : f(x, y) = 0 \}$$

$\underbrace{\quad}_{k \text{ equazioni in } n \text{ incognite}}$

Teorema Scrivendo come sopra.

Supponiamo che

- (i) $f(x_0, y_0) = 0 \leftarrow$ vettore k dim
- (ii) f continua in Ω
- (iii) $J_y f(x_0, y_0)$ esiste ed è continua in Ω
 \uparrow matrice $k \times k$
- (iv) $J_y f(x_0, y_0)$ invertibile.

Allora valgono le seguenti conclusioni

- ① (Esistenza e unicità) $\exists \rho > 0 \exists r > 0 \exists$ unica

$$\varphi: \bar{B}_\rho(x_0) \rightarrow \bar{B}_r(y_0)$$

tale che

finestra

$$\{(x, \varphi(x)) : x \in \bar{B}_p(x_0)\} = \cup \cap (\bar{B}_p(x_0) \times \bar{B}_r(y_0))$$

② La φ di cui sopra è continua in $\bar{B}_p(x_0)$. (continuità)

③ Se $f(x, y)$ è Lipschitziana in x con costante indip. da y , allora φ è Lip. in $\bar{B}_p(x_0)$. (Lipschitzianità)

④ Se f è diff. in x_0 , allora φ è diff. in x_0 e vale

$$J_x \varphi(x_0) = - [J_y f(x_0, y_0)]^{-1} [J_x f(x_0, y_0)]$$

$$k \begin{array}{|c|c|} \hline m & \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline \end{array} k \begin{array}{|c|c|} \hline m & \\ \hline \end{array} \quad (\text{Differenziabilità})$$

⑤ (Ulteriore regolarità) Se f è di classe C^k in Ω , allora φ è di classe C^k .

Dim. $wlog \quad (x_0, y_0) = (0, 0)$

④ Scelta delle costanti

• Prendo $m_0 > 0$ t.c.

$$\| [J_y f(0,0)]^{-1} \| \leq \frac{1}{m_0}$$

↑
norma di matrice

• Prendo $p_0 > 0$ ed $r_0 > 0$ t.c.

$$\| J_y f(x, y) - J_y f(0, 0) \| \leq \frac{m_0}{2} \quad \forall (x, y) \in \bar{B}_{p_0}^m(0) \times \bar{B}_{r_0}^k(0)$$

↑
norma di matrice

• Prendo $\rho, > 0$ t.c.

$$\|f(x, 0)\| \leq \frac{m_0}{2} \quad \forall x \in \overline{B}_{\rho}^m(0)$$

\uparrow
 norma di vett.
 \leftarrow -dim.

② Formulazione come punto fisso

$$\Phi_{(x)}(y) := y - [J_y f(0, 0)]^{-1} f(x, y) \quad \forall y \in \overline{B}_{2\rho}^k(0)$$

$\| \cdot \|_k - \boxed{\quad}_k \|_k$

Come prima y è punto fisso $\Leftrightarrow f(x, y) = 0$.

Claim: per ogni $x \in \overline{B}_{\rho}^m(0)$ vale che

$\rightarrow \Phi_{(x)}$ è contrazione in $\overline{B}_{2\rho}^k(0)$

$\rightarrow \Phi_{(x)}$ manda $\overline{B}_{2\rho}^k(0)$ in sé.

③ Jacobiana di $\Phi_{(x)}$.

$$\begin{aligned} J_y \Phi_{(x)}(y) &= \text{Id}_k - [J_y f(0, 0)]^{-1} [J_y f(x, y)] \\ &= [J_y f(0, 0)]^{-1} [J_y f(0, 0) - J_y f(x, y)] \end{aligned}$$

da cui volendo (ma non serve davvero)

$$\begin{aligned} \|J_y \Phi_{(x)}(y)\| &\leq \|[J_y f(0, 0)]^{-1}\| \cdot \|J_y f(0, 0) - J_y f(x, y)\| \\ &\leq \frac{1}{m_0} \quad \leq \frac{m_0}{2} \\ &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(Lemma (Esercizio) : $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ per ogni coppia di matrici di dimensioni compatibili)

④ Verifica dei claim Per ogni y_1, y_2 in $\overline{B}_{r_0}^k(0)$

$$\|\Phi_{(x)}(y_2) - \Phi_{(x)}(y_1)\| \leq \|Jy \Phi_{(x)}(c) \cdot (y_2 - y_1)\|$$

↑
Disug. Lagrange
vettoriale (c è un pto sul
segmento di estremi y_1 e y_2)

$$\leq \underbrace{\|Jy \Phi_{(x)}(c)\| \cdot \|y_2 - y_1\|}_{\leq \frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{1}{2} \|y_2 - y_1\| \rightsquigarrow \text{contrazione}$$

[Volendo ho usato che

$$\|AB\| = \|A(B_0)\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|B\|$$

senza mai usare $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$].

Resta da dim. che $\Phi_{(x)}$ manda $\overline{B}_{r_0}^k(0)$ in sé :

$$\|\Phi_{(x)}(y)\| \leq \|\Phi_{(x)}(0)\| + \underbrace{\|\Phi_{(x)}(y) - \Phi_{(x)}(0)\|}_{\leq \frac{1}{2} \|y\|} \leq r_0.$$



$$\leq \frac{1}{2} \|y\|$$

$$\leq \frac{1}{2} \|x\|$$

$$\|[Jy f(0,0)]^{-1} f(x,0)\|$$

$$\leq \|[Jy f(0,0)]^{-1}\| \cdot \|f(x,0)\|$$

$$\leq \frac{1}{m_0}$$

$$\leq \frac{m_0 r_0}{2}$$

Titolo nota

12/03/2018

Continuazione dimostrazione(Continuità) Del tutto analoga al caso $k=1, m=2$.

Due approcci

- (ε/δ) Scegliendo dall'inizio $r_0 := \varepsilon$ trovo $\delta > 0$ t.c.

$$\varphi: \overline{B}_{\delta}^m(0) \rightarrow \overline{B}_{\varepsilon}^k(0)$$

- (Per successioni) Se $x_m \rightarrow x_0$ e $\varphi(x_m) \rightarrow z_0 \neq y_0$ trovo un assurdo.

— o — o —

(Lipschitzianità) Ipotesi: esiste $\Lambda \geq 0$ t.c.

$$\|\varphi(x_2, y) - \varphi(x_1, y)\| \leq \Lambda \|x_2 - x_1\|$$

per ogni x_1, x_2 in $\overline{B}_{\delta_1}^m(0)$ e per ogni y in $\overline{B}_{r_0}^k(0)$ Allora si ha che φ è Lip. in $\overline{B}_{\delta_1}^m(0)$.Lemma (Esercizio) Siano \mathbb{X} e \mathbb{Y} metrici, con \mathbb{Y} completo.

Sia

$$\varphi: \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$$

tale che

$$d_{\mathbb{Y}}(\varphi(x_2, y), \varphi(x_1, y)) \leq \Lambda d_{\mathbb{X}}(x_1, x_2) \quad \forall \dots$$

$$d_{\mathbb{Y}}(\varphi(x, y_2), \varphi(x, y_1)) \leq L d_{\mathbb{Y}}(y_2, y_1) \quad \forall \dots$$

↑
con $L < 1$

Sia $\varphi: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ tale che $\Phi(x, \varphi(x)) = \varphi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{X}$ (esiste ed è unica).

Allora φ è Lip. su \mathbb{X} .

Dim Per ogni $(x_1, x_2) \in \mathbb{X}^2$ vale

$$d_Y(\varphi(x_2), \varphi(x_1)) = d_Y(\Phi(x_2, \varphi(x_2)), \Phi(x_1, \varphi(x_1)))$$

$\uparrow \text{def. } \varphi$

$$\leq d_Y(\Phi(x_2, \varphi(x_2)), \Phi(x_2, \varphi(x_1)))$$

$$+ d_Y(\Phi(x_2, \varphi(x_1)), \Phi(x_1, \varphi(x_1)))$$

$$\leq L d_Y(\varphi(x_2), \varphi(x_1)) + \Lambda d_X(x_2, x_1)$$

$$\Rightarrow d_Y(\varphi(x_2), \varphi(x_1)) \leq \frac{\Lambda}{1-L} d_X(x_2, x_1) \quad \square$$

La Lip. segue dal Lemma applicato con

$$\Phi(x, y) := y - [J_y f(0, 0)]^{-1} f(x, y)$$

— o — o —

(Differentiabilità) Per ipotesi sappiamo che f è diff. in (x_0, y_0) , quindi

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + J_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + J_y f(x_0, y_0)(y - y_0) + \varepsilon(x, y)$$

(controllare le dimensioni !!!)

dove

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{\|\varepsilon(x, y)\|}{(\|x - x_0\|^2 + \|y - y_0\|^2)^{1/2}} = 0$$

scrivere le
norme dove
sono

Riscrivo tutto con $y = \varphi(x)$:

$$\begin{aligned} f(x, \varphi(x)) &= f(x_0, \varphi(x_0)) + J_x f(x_0, y_0)(x - x_0) \\ &\stackrel{0}{=} \quad \stackrel{0}{=} + J_y f(x_0, \varphi(x_0))(\varphi(x) - \varphi(x_0)) \\ &\quad + r(x, \varphi(x)) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(x_0) &= -[J_y f(x_0, \varphi(x_0))]^{-1} J_x f(x_0, y_0)(x - x_0) \\ &\quad - [\dots]^{-1} r(x, \varphi(x)) \end{aligned}$$

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + M(x - x_0) - [\dots]^{-1} r(x, \varphi(x))$$

Mi basta dimostrare che l'ultimo termine è $O(\|x - x_0\|)$

$$\frac{\|[\dots]^{-1} r(x, \varphi(x))\|}{\|x - x_0\|} \leq \underbrace{\|[\dots]^{-1}\|}_{\text{numero}} \frac{\|r(x, \varphi(x))\|}{\|x - x_0\|}$$

$\|r(x, \varphi(x))\|$

(

$\|x - x_0\|^2 + \|\varphi(x) - \varphi(x_0)\|^2$

$\stackrel{y_0}{\| \cdot \|}$

$)^{1/2}$

(

$\|x - x_0\|^2 + \|\varphi(x) - \varphi(x_0)\|^2$

$)^{1/2}$

$\|x - x_0\|$

$)^{1/2}$

↓
0 per hp

Limitato perché so già che
 φ è Lipschitziana.

Oss. Se f è diff. ovunque, allora anche φ lo è.

(Ulteriore regolarità) Bootstrap come nel caso base.

— o — o —

Esempio 1 Consideriamo l'equazione

$$n^2 \sin x + n \arctan(x+x^{33}) = x^2 + 3$$

Dimostrare che per n grande esiste x_n che risolve e.t.c.
 $x_n \rightarrow 0$

Divido: $\sin x + \frac{1}{n} \arctan(x+x^{33}) = \frac{1}{n^2} (x^2 + 3)$

Pongo $y := \frac{1}{n}$ e ottengo

$$\sin x + y \arctan(x+x^{33}) = y^2 (x^2 + 3)$$

Se riesco ad esprimere x in funzione di y (almeno per $y \neq 0$) allora ho trovato x in funzione di n .

$$f(x, y) := \sin x + y \arctan(x+x^{33}) - y^2 (x^2 + 3)$$

Osservo che $f(0, 0) = 0$ e $f_x(0, 0) = 1 \neq 0$
 \uparrow viene fuori da $\sin x$

Quindi: esiste una unica (definitivamente) successione $x_n \rightarrow 0$ t.c. x_n risolve per n grande !!

② Studiare $\sum x_n$

Basta fare il Taylor della funzione $x = \varphi(y) = ay + by^2$
e sostituendo troveremo (sesta sorpresa)

$$x = 3y^2 + o(y^2)$$

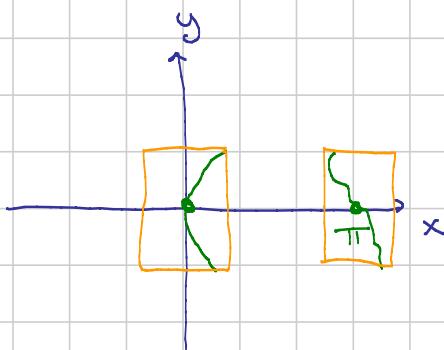
da cui $x_n = \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

③ x_m è unica (definitivamente) solo tra le succ. che tendono a 0.

Ad esempio esiste (sempre unica) $x_m \rightarrow \pi$ con x_m soluzione per m grande.

$$\text{Motivo: } f(x,y) = \sin x + y \arctan(x+x^3) = y^2(x^2+3)$$

Osservo che $f(\pi, 0) = 0$ e probabilmente $f_x(\pi, 0) \neq 0$, quindi posso esplicitare anche vicino a $(\pi, 0)$



Esempio 2

$$\begin{cases} m \sin(x+ty) + \cos(xy) = 3y^2 \\ m^2 x + 2m \sin y = \arctan(x^2+y^2) \end{cases}$$

Domanda: per m grande esistono soluzioni? Che fanno?

Pongo $z := \frac{1}{m}$ e risolvo come

$$\begin{cases} \sin(x+yz) + z \cos(xy) - 3y^2z = 0 \\ x + 2z \sin y - z^2 \arctan(x^2+y^2) = 0 \end{cases}$$

Voglio (x,y) in funzione di z . Se metto $(0,0,0)$ ok. Devo calcolare J e sperare che la parte in x, y sia invertibile.

$$Jf(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

invertibile

Quindi esistono $x(z)$, $y(z)$, definite e regolarissime in $(-\delta, \delta)$ che risolvono.

→ Dimostrare che per u grande (x_m, y_m) è unica.

Se $(x_m, y_m) \rightarrow (0,0)$ allora è unica (caso nella finestra).

Può essere che $(x_m, y_m) \rightarrow (x_\infty, y_\infty) \neq (0,0)$?

Mettendo $z=0$ troviamo $x=0$ e $\sin(x+y)=0$

Quindi è FALSO: si trovano anche soluzioni vicine a $(0, k\pi)$.

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 081

Note Title

14/03/2018

Teorema funzione inversa (Teo. invertibilità locale)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, sia $x_0 \in \Omega$, sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ^{stesso n}

Supponiamo che

(i) f è C^1 in Ω ,

(ii) $J_f(x_0)$ invertibile (matrice $n \times n$).

Allora f è localmente invertibile, cioè esiste un intorno aperto

U di x_0 e un intorno aperto V di $f(x_0) = y_0$, ed esiste

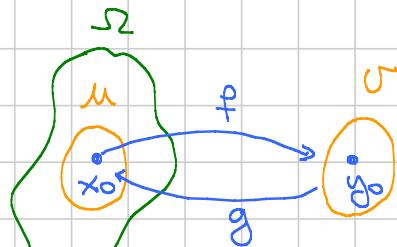
$$g: V \rightarrow U$$

tale che

$$g(f(x)) = x \quad \forall x \in U$$

$$f(g(y)) = y \quad \forall y \in V.$$

Inoltre g è di classe C^1 (anzi della stessa classe di regolarità di f) e vale



$$Jg(y) = [J_f(g(y))]^{-1} \quad \forall y \in V$$

Achtung!

① Ad analisi 1 se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^1 e $f'(x) \geq \frac{1}{2018}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora f è glob. inv., cioè esiste $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. ...

sketch

② Se invece assumo solo $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $f(\mathbb{R}) = V$ aperto ed esiste $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ tale che funziona come inversa

③ Ad Analisi 2 esiste $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $Jf(x)$ è invertibile per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ e f non è nemmeno iniettiva

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

L'iniettività globale non c'è $f(x, y + 2\pi) = f(x, y)$ e

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det Jf(x, y) = e^{2x} \neq 0$$

Si tratta di \mathbb{C}^2 vista $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Dim Punto semplice. Considero

$$\Phi: \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\Phi(x, y) = y - f(x) \quad (\text{funzione di } 2m \text{ variabili})$$

$$J\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} -Jf & \text{Id} \end{pmatrix} \quad \Phi(x_0, y_0) = 0$$

$m \times m$
invertibile

Per il teo. della funzione implicita esistono $p > 0$ ed r ed esiste

$$g: B_r(y_0) \xrightarrow{\text{V}} B_p(x_0)$$

che "esplicita" la Φ , cioè tale che $\Phi(g(y), y) = 0$, cioè

$$y = f(g(y)) \quad \forall y \in B_r(y_0)$$

Punto delicato: definire U dopo aver posto $V := B_r(y_0)$ che posso prendere aperta.

La scelta naturale è $U := g(V)$ così automaticamente

g è l'inversa di $f: U \rightarrow V$.

Resta da dimostrare che U è aperto. Per questo ci sono due strade quasi equivalenti.

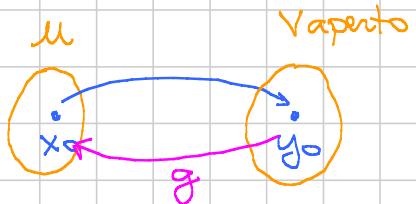
1) Riapplicare il teorema al contrario:

In un verso abbiamo dim. che

$y_0 \in \text{Int dell'immagine di } f$

Applicando il teo. con g trovo

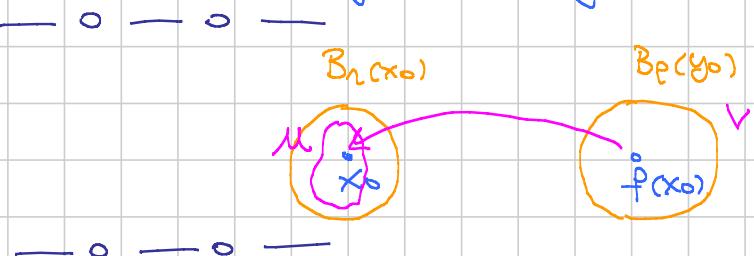
che $x_0 \in \text{Int dell'immagine di } g$.



2) Osservare che $g(V) = \underbrace{B_r(y_0)}_{\substack{\text{aperto} \\ \text{se voglio}}} \cap \underbrace{f^{-1}(B_r(x_0))}_{\substack{\text{aperto perché} \\ f^{-1}(\text{aperto})}}$

Qui sto usando che $\forall y \in B_r(y_0)$ esiste un unico $x \in B_r(x_0)$ tale che $f(x, y) = 0$ e questo x è il $g(y)$.

(Occhio: stiamo explicitando x in funzione di y).



Teo. della mappa aperta 1

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ di classe C^1 t.c.

$Jf(x)$ è invertibile per ogni $x \in \Omega$.

Allora f è una mappa aperta, cioè manda aperti in aperti.

Dim. Sia $A \subseteq \Omega$ aperto, sia $x_0 \in \Omega$, sia $y_0 = f(x_0)$. Dico che $y_0 \in \text{Int}(f(A))$.

Questo segue dal teo. della funzione inversa applicato nel p.t. x_0 .

[Vedi figura sopra].



Teo. mappa aperta 2

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ di classe C^1 .

Supponiamo che Jf sia FULL RANK, cioè

$Jf(x)$ ha rango k per ogni $x \in \Omega$ (questo è imposs. se $k > m$)

Allora f è una mappa aperta.

Dim. Basta dimostrare che per ogni $x_0 \in \Omega$ si ha che $f(x_0) \in \text{Int}(f(\Omega))$ (si applica alla restrizione di f ad ogni aperto $A \subseteq \Omega$).

Prendo $Jf(x_0)$: è una matrice $k \times m$ con sottomatrice $k \times k$ invertibile. Supponiamo che sia rispetto alle ultime k variabili

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & k \\ \hline k & \quad \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow x_1, \dots, x_k \\ \uparrow z_1, \dots, z_m \quad (m = m-k) \end{array}$$

$$(z_0, x_0) \xrightarrow{\hspace{1cm}} (y_0)$$

Considero la funzione $\Phi(z, x, y) = y - f(z, x)$

È una funzione $\Phi: \Omega \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ e

$$J\Phi = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & k & | & \text{Id} \\ \hline k & \quad & \quad & \quad \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ Jf \end{array}$$

Quindi posso ricavare x in funzione di y e z .

Quindi ho tanti gradi di libertà: posso fissare a piacere y in avanti e le prime $m-k$ componenti del vettore in partenza (tutto questo in un aperto) ed il teo. funz. complice cui trova le restanti k componenti del vettore in partenza.

ANALISI 2

LEZIONE 082

Titolo nota

14/03/2018

Esercizi su fns. funzione inversa: data $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (o più in generale $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$), stabilire

- dove è loc. invertibile (si usa il teorema)
 - se è glob. iniettiva
 - se è surgettiva
 - qual è l'immagine
- } arrangiarsi !!

Esempio 1 $f(x, y) = (2x + \sin y, 3y - \sin x)$

① Studio invertibilità locale

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & \cos y \\ -\cos x & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Det} = 6 + \cos x \cos y \geq 5$$

Quindi f è loc. inv. nello intorno di ogni punto ed è una mappa aperta

② Per uno studio più globale, provo ad "invertire a mano"

$$2x + \sin y = u \quad \text{Dati } (u, v), \text{ cerco } (x, y)$$

$$3y - \sin x = v$$

Ricavo y dalla seconda: $y = \frac{v + \sin x}{3}$. Sostituisco nella 1^a:

$$2x + \sin\left(\frac{v + \sin x}{3}\right) = u$$

Il LHS come funzione di x è semp $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (limiti a $\pm\infty$)

Dati (u, v) \rightsquigarrow trovo $x \rightsquigarrow$ trovo y $\because f$ è surgettiva

Il LHS è pure iniettivo (basta calcolare la derivata), quindi x lo trovo in modo unico $\rightsquigarrow y$ pure in modo unico.

Esempio 2 $f(x, y) = (x+y, x^2+y^2)$

① Inv. Locale $Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$ $\text{Det} = 2(y-x)$

f è loc. invertibile fuori dalla bisettrice $y = x$.
Sulla bisettrice per ora BOH.

② Discorsi globali

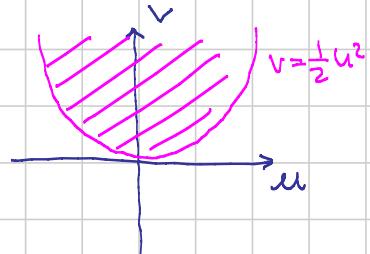
La surgettività non c'è: la seconda variabile deve essere ≥ 0 nell'immagine.

Posto $\begin{cases} x+y = u \\ x^2+y^2 = v \end{cases}$

dalla diseguaglianza tra le medie sappiamo che

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \quad \frac{v}{2} \geq \frac{u^2}{4} \quad v \geq \frac{1}{2}u^2$$

Immagine (f) sta sulla o sopra la parabola. Sarà tutto?



$$y = u - x$$

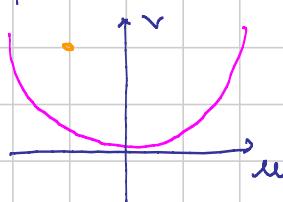
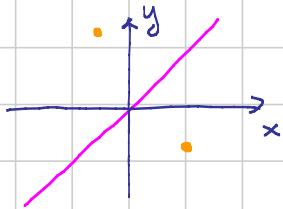
$$x^2 + u^2 + x^2 - 2ux = v \rightsquigarrow 2x^2 - 2ux + (u^2 - v) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 2u^2 + 2v}}{2} = \frac{u \pm \sqrt{2v - u^2}}{2}$$

Se $(u, v) \in$ sopra parabola, allora posso ricavare x e y , e lo posso fare in modo unico solo se sono sulla parabola.

In tal caso ottengo $(x, y) = (\frac{u}{2}, \frac{u}{2}) \in$ bisettrice.

In somma: la bisettrice e la parabola si mappano 1:1



I due semipiani $y > x$ e $y < x$ mappano invertibilmente nella parte di piano che sta sopra la parabola.

Esempio 3 $f(x,y) = (x^2 + \sin(xy+1), y^2 - y + \arctan x)$

È surgettiva come $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$? NO: entrambe le comp. sono limitate dal basso

$$f(x,y) = (x^2 - y + \sin x, y^2 - x + \arctan(xy))$$

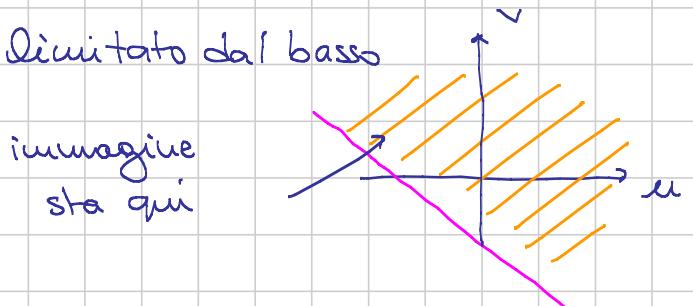
È surgettiva come $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$? Ciascuna delle due componenti può assumere valori a piacere SEPARATAMENTE.

MA, se sommo le 2 componenti trovo

$$x^2 + y^2 - x - y + \text{robaccia} =: \varphi(x,y)$$

e questa è limitata dal basso ($\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} \varphi(x,y) = +\infty$)

Questo dice che $u+v$ è limitato dal basso



È iniettiva?

$$\begin{cases} x^2 - y + \sin x = u \\ y^2 - x + \arctan(xy) = v \end{cases} \rightsquigarrow y = x^2 + \sin x - u$$

↓
sostituisco nella 2a

$$(x^2 + \sin x - u)^2 - x + \arctan[x(\dots)] = v$$

Questo esclude nuovamente la sing.: fisso $u=15$ e v abbastanza negativo \rightsquigarrow non trovo x .

Lo stesso ragionamento esclude l'ineffettività, prendo $u = 15$ e $v = \text{LHS calcolato in } 0 \text{ più } 1$. A questo punto trovo almeno 2 valori di x .

Esempio 4 $\begin{cases} m^2(x+y) + \sin(xy) = m \\ m(x-y) + \arctan(xy) = 2m y \sin x \end{cases}$

Dimostrare che per m grande la solut. è unica.

Pongo $\frac{1}{m} = z$ e trovo dividendo

$$\begin{aligned} x+y + z^2 \sin(xy) - z &= 0 \\ x-y + z \arctan(xy) - 2y \sin x &= 0 \end{aligned}$$

$(0,0,0)$ è soluzione. Faccio lo jacobian in $(0,0,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightsquigarrow \text{ricavo } x \text{ e } y \text{ in funzione di } z \\ \text{in una finestra centrata in } (0,0,0) \\ \rightsquigarrow x(z), y(z) \rightsquigarrow x\left(\frac{1}{m}\right), y\left(\frac{1}{m}\right) \end{array}$$

Dal Taylor di $x(z)$ e $y(z)$ ho la p.p. di x_m e y_m

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Dal teo. funz. impil.})$$

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \quad \begin{aligned} 2x &= z & \rightsquigarrow x=y=\frac{z}{2}+O(z) \\ x &= y & \rightsquigarrow x_m=\frac{1}{2m}+O\left(\frac{1}{m}\right) \text{ e } y_m \text{ idem.} \end{aligned}$$

UNICITÀ Prendo una sol. $(x_m, y_m, \frac{1}{m})$. Se riesco a dimostrare che $x_m \rightarrow 0$ e $y_m \rightarrow 0$, allora ho finito perché definitivamente entro nella finestra dove ho unicità. Se cosa ci fosse $y \sin x$ sarebbe facile. ☺.

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Setting: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 , $k < n$
 $g_1, \dots, g_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 , $x_0 \in \Omega$.

Definiamo

$$V := \{x \in \Omega : g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\} \quad (\text{luogo di zeri})$$

Supponiamo $x_0 \in V$ sia punto di max/min vincolato per f su V , cioè

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in V \quad (\text{min})$$

Allora accade ALMENO una delle seguenti possibilità

(i) $\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_k(x_0)$ sono lin. dip. (k vettori in \mathbb{R}^n)

(ii) $\nabla f(x_0)$ è comb lin. di $\nabla g_i(x_0)$, cioè $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ t.c.

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(x_0).$$

Oss. È un enunciato locale: posso sempre assumere che $\Omega = B_r(x_0)$ con $r > 0$ abbastanza piccolo.

TRE DEMOSTRAZIONI

→ esplicitazione del vincolo (naturale, facile se $k=1$, un po' più pena per $k > 1$)

→ via teo. mappa aperta (comoda sempre)

→ via penalizzazione (grande idea)

Dim. via teo. furet. implicate, caso $m=2, k=1$

Siamo in \mathbb{R}^2 , il p.to è (x_0, y_0) , il vincolo è $g(x, y) = 0$.

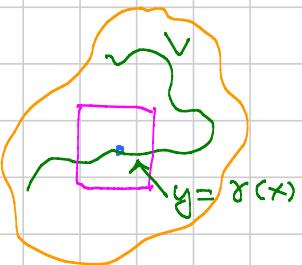
Se $\nabla g(x_0, y_0) = 0$ siamo nel caso (i).

Supponiamo $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, wlog $g_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Allora in una opportuna finestra centrata in x_0 vale che

$$V = \{(x, \gamma(x)) : x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)\}$$

per una opportuna $\gamma : (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \rightarrow \mathbb{R}$



Considero la funzione

$$\varphi(x) := f(x, \gamma(x)) \quad x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

Per ipotesi sappiamo che x_0 è p.to di max/min per φ , dunque

$$\varphi'(x_0) = 0$$

D'altra parte

chain rule

$$\varphi'(x) \stackrel{?}{=} f_x(x, \gamma(x)) + f_y(x, \gamma(x)) \gamma'(x)$$

$$= f_x(x, \gamma(x)) + f_y(x, \gamma(x)) \left[- \frac{g_x(x, \gamma(x))}{g_y(x, \gamma(x))} \right]$$

teo. furet. impl.

$$\leadsto 0 = \varphi'(x_0) = f_x(x_0, y_0) - \frac{f_y(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)} g_x(x_0, y_0)$$

$$\leadsto f_x(x_0, y_0) = \lambda g_x(x_0, y_0)$$

LA DIM. NON È FINITA

Mi serve anche $f_y(x_0, y_0) = \lambda g_y(x_0, y_0)$ con lo stesso λ .

Questa seconda uguaglianza è vera per defn. di λ .

— o — o —

Si era dim. con n generico e sempre $k=1$

Siamo in \mathbb{R}^n e il pto è $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n})$

Il vincolo è $g(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Se $\nabla g(x_0) = 0$, allora ok, altrimenti wlog $g_{x_m}(x_0) \neq 0$.

Quindi in una finestrella centrata in x_0 l'equazione di ∇ è

$$x_m = \gamma(x_1, \dots, x_{m-1})$$

Pongo $\varphi(x_1, \dots, x_{m-1}) := f(x_1, \dots, x_{m-1}, \gamma(x_1, \dots, x_{m-1}))$

e osservo che questa ha pto di max/min in $(x_{0,1}, \dots, x_{0,m-1})$,
dunque in quel pto si annullano le sue $m-1$ derivate
partiali.

Più formalmente, per ogni $i = 1, \dots, m-1$ vale

$$0 = \varphi_{x_i}(x_{0,1}, \dots, x_{0,m-1})$$

D'altra parte

$$\varphi_{x_i}(x_1, \dots, x_{m-1}) = f_{x_i}(\dots) + f_{x_m}(\dots) \gamma_{x_i}(\dots)$$

$$= f_{x_i}(\dots) - f_{x_m}(\dots) \frac{g_{x_i}(\dots)}{g_{x_m}(\dots)}$$

Sostituendo il punto troviamo

$$0 = \varphi_{x_i}(x_0, \dots, x_{n-1}) = f_{x_i}(x_0) - \frac{f_{x_n}(x_0)}{g_{x_n}(x_0)} g_{x_i}(x_0)$$

Abbiamo così ottenuto che

$$f_{x_i}(x_0) = \lambda g_{x_i}(x_0) \quad \forall i = 1, \dots, n-1$$

\uparrow
stesso λ

Ci serve la stessa con $i = n$, ma è la def. di λ .

— o — o —

Stessa dim. in dimensione n e codimensione k

(Fatta in AM2-16 con tutti gli indici, ora rifatta usando il linguaggio vettoriale)

Siamo in \mathbb{R}^m , pongo $m := n-k$, il punto è $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^m$
il vincolo è $g(x) = 0$, con g pensata a valori in \mathbb{R}^k e componenti $g_1(x), \dots, g_k(x)$.

Se $\nabla g_1, \dots, \nabla g_k$ sono lin. dip. in (x_0, y_0) , allora ok.

Altrimenti

$Jg(x_0, y_0)$ ha rango k (matrice che ha ∇g_i come righe)

quindi ammette minore $k \times k$ diverso da 0. Wlog quello tutto a dx.

Allora posso esplicitare le ultime k variabili, cioè vicino a (x_0, y_0) il luogo γ ha equazione

$$\gamma = \delta(x) \quad \text{funzione di } m \text{ variabili a valori in } \mathbb{R}^k$$

Considero $\varphi(x) := f(x, \gamma(x))$ e questa ha max/min in x_0
 \uparrow ha valori in \mathbb{R}

Ora $\nabla \varphi(x) = \nabla_x f(x, \gamma(x)) + \nabla_y f(x, \gamma(x)) J\gamma(x)$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ m \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ m \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ k \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ k \end{array}$$

$$= \nabla_x f(x, \gamma(x)) - \nabla_y f(x, \gamma(x)) [J_y g(\dots)]^{-1} [J_x g(\dots)]$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ k \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ k \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ k \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ m \end{array} \quad \text{😊}$$

Quando metto $x = x_0$ ottengo $\gamma(x_0) = y_0$ e trovo

$$\nabla_x f(x_0, y_0) = \boxed{\nabla_y f(x_0, y_0) [J_y g(x_0, y_0)]^{-1} J_x g(x_0, y_0)}$$

riga lunga k che chiamiamo
 $\Delta = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$

Ora basta osservare che

$$\Delta J_x g(x_0, y_0) = (\lambda_1 \dots \lambda_k) \begin{pmatrix} \nabla_x g_1(x_0, y_0) \\ \dots \\ \nabla_x g_k(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Abbiamo così ottenuto che

$$\nabla_x f(x_0, y_0) = \lambda_1 \nabla_x g_1(x_0, y_0) + \dots + \lambda_k \nabla_x g_k(x_0, y_0)$$

Questo sistema le prime in variabili.

Controlliamo che da definizione di Δ sistemi le altre.

$$\Delta := \nabla_y f(x_0, y_0) \left[J_y g(x_0, y_0) \right]^{-1}$$

$$\rightsquigarrow \nabla_y f(x_0, y_0) = \Delta J_y g(x_0, y_0)$$

$$= (\lambda_1 \dots \lambda_k) \begin{pmatrix} \nabla_y g_1(x_0, y_0) \\ \vdots \\ \nabla_y g_k(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

da cui si conclude come sopra.

— o — o —

Consiglio: quando si studia la dim., scrivere sempre le dimensioni dei vari oggetti.

ANALISI 2

LEZIONE 084

Note Title

15/03/2018

Dim. via mappa aperta: caso $n=2$ e $k=1$

Siamo in \mathbb{R}^2 , il p.to è (x_0, y_0) , il vincolo è $g(x, y) = 0$.

IDEA: considero la funzione $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$\Phi(x, y) = (\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0), g(x, y))$$

Suppongo wlog che (x_0, y_0) sia p.to di minimo vincolato

Osservo che $\Phi(x_0, y_0) = (0, 0)$ e

$$J\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} \nabla \varphi(x, y) \\ \nabla g(x, y) \end{pmatrix} \quad \boxed{2}^2$$

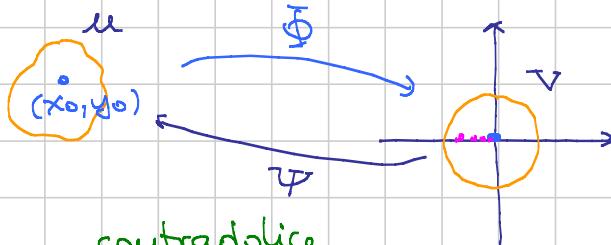
CLAIM: $\text{range}(J\Phi(x_0, y_0)) \leq 1$. Se fosse vero, si aprono 2 scenari:

- se $\nabla g(x_0, y_0) = 0$, allora ok
- se $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, allora $\nabla \varphi(x_0, y_0)$ deve essere un suo multiplo, quindi ok pure.

Quindi resta da dim. il claim. Se per assurdo non fosse vero, $J\Phi(x_0, y_0)$ sarebbe matrice invertibile, quindi Φ sarebbe loc. invertibile e aperta su un intorno di (x_0, y_0)

Idea: i p.ti sull'asse x
negativo in arrivo
hanno

$\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0) < 0 \rightsquigarrow$ contraddice
 $g(x, y) = 0$ (x_0, y_0) p.to di min.



Detto meglio, indico con $\Psi: V \rightarrow M$ l'inversa e considero

$$\Psi\left(-\frac{1}{m}, 0\right) = (x_m, y_m)$$

defin. sta in V

Per definizione $f(x_m, y_m) = f(x_0, y_0) - \frac{1}{m}$

$$g(x_m, y_m) = 0$$

cont. di Ψ

$$\rightsquigarrow (x_m, y_m) \in V, f(x_m, y_m) < f(x_0, y_0), (x_m, y_m) \rightarrow (x_0, y_0)$$

$\rightsquigarrow (x_0, y_0)$ non è p.t.o di cuiu, nemmeno locale.

$\overline{\text{--o}} \quad \overline{\text{--o}}$

Stessa dim. in dim. e codim. arbitraria

Siamo in \mathbb{R}^n , il p.t.o è x_0 , il vincolo è $g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0$.

Adesso considero $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$

$$\Phi(x) := \begin{pmatrix} f(x) - f(x_0) \\ g_1(x) \\ \vdots \\ g_k(x) \end{pmatrix}$$

Come prima $\Phi(x_0) = 0 \in \mathbb{R}^k$. Inoltre

$$J\Phi(x_0) = \begin{pmatrix} \nabla f(x_0) \\ \nabla g_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla g_k(x_0) \end{pmatrix}$$

\rightsquigarrow

 $\overline{\text{--o}} \quad \overline{\text{--o}}$

CLAIM: $\text{Rango} \leq k$. Se fosse così, si aprono 2 scenari

- le ultime k righe sono lin. dip., e allora ok
- le " " " sono lin. indip., ma allora per forza la prima riga è loro comb. lin., quindi ok.

Se fosse $\text{range } \Phi = k+1$, la mappa Φ sarebbe full rank in x_0 , quindi l'immagine conferrebbe un intorno di 0 in \mathbb{R}^{k+1} , quindi anche p.ti del tipo

$$(-\frac{1}{m}, 0, \dots, 0)$$

che quindi sarebbero immagine $\Phi(x_m)$ con

$$f(x_m) < f(x_0)$$

$$g_i(x_m) = 0 \text{ per } i = 1 \dots k \quad (\text{cioè } x_m \in V)$$

$$x_m \rightarrow x_0$$

il che contraddice il minimo locale.

— o — o —

Dim. per penalizzazione (DE GIORGI ?)

Supponiamo wlog x_0 p.t. di min. Siamo nel caso generale.

Il vincolo è $g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0$.

Step 1 Posso supporre wlog che x_0 è p.t. di min. STRETTO cioè $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in V \setminus \{x_0\}$

Se così non è, considero $\hat{f}(x) := f(x) + \|x - x_0\|^{2018}$

Questa ha p.t. di min. stretto in x_0 e ha in x_0 le stesse derivate di f .

Step 2 L'IDEA !! Pongo

$$f_m(x) := f(x) + \frac{1}{2}m g_1(x)^2 + \dots + \frac{1}{2}m g_k(x)^2$$

Dopo video

Aggiunto $\frac{1}{2}$ per non avere 2 nelle derivate

Idea: per m grande $f_m(x)$ assume minimo (per scelta vincolo) praticamente su V , quindi il p.m. vincolato per f è \sim il problema non vincolato per f_m .

Più formalmente: prendo $R > 0$ t.c. $\bar{B}_R(x_0) \subseteq \Omega$ e considero

$$\min \{ f_m(x) : x \in \bar{B}_R(x_0) \}$$

Esiste pur w. e viene assunto in un certo pto $x_m \in \bar{B}_R(x_0)$

CLAIM: $x_m \rightarrow x_0$ per $m \rightarrow +\infty$

Se fosse così, infatti $x_m \in B_r(x_0)$, ma allora
↑ aperta

$$\nabla f_m(x_m) = 0 \quad \text{definitiv.}$$

e quindi

$$\nabla f(x_m) + \boxed{m g_1(x_m)} \nabla g_1(x_m) + \dots + \boxed{m g_k(x_m)} \nabla g_k(x_m) = 0$$

$$\text{cioè } \nabla f(x_m) = \lambda_{1,m} \nabla g_1(x_m) + \dots + \lambda_{k,m} \nabla g_k(x_m)$$

Quindi $\nabla f(x_m)$ è comb. lin. di $\nabla g_1(x_m), \dots, \nabla g_k(x_m)$
e non resta che sperare di passare al limite.

Step 3 Lemma (esercizio)

Consideriamo ($k+1$) succ. di vettori w_m, v_m^1, \dots, v_m^k

$$\begin{matrix} & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ w_m & \downarrow & v_m^1 & \downarrow \\ & \downarrow & v_m^k & \downarrow \\ w_\infty & \downarrow & v_\infty^1 & \downarrow \\ & & v_\infty^k & \end{matrix}$$

Supponiamo che per ogni $m \in \mathbb{N}$ si abbia che w_m è
comb. lin. di v_m^1, \dots, v_m^k .

$$\begin{aligned} w_m &= \lambda_m^1 v_m^1 + \dots + \lambda_m^k v_m^k \\ &\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ w_\infty &= \lambda_\infty^1 v_\infty^1 + \dots + \lambda_\infty^k v_\infty^k \end{aligned}$$

NO: può succedere che
i coeff. non convergono
a numeri, nemmeno per
s. succ.

Allora si aprono 2 scenari

- o i v_m^k sono lin. dip
- o w_m è comb. lin. di v_m^k .

Dm. Lemma Considero $M_m := (w_m \mid v_m^1 \mid \dots \mid v_m^k)$

Per ogni $m \in \mathbb{N}$ il rango è $\leq k$, quindi tutti i minori $(k+1) \times (k+1)$ si annullano, ma allora si annullano anche nella matrice limite, che quindi ha rango $\leq k$.

A questo pto o le ultime k colonne sono lin. dip., o la prima è loro comb. lin.

Detto in modo altisonante: l'applicazione rank è sci (semicont. ruf.) cioè se $M_m \rightarrow M_\infty$ allora

$$\text{rank } M_\infty \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{rank } M_n$$

STEP 4 Dimostro che $x_n \rightarrow x_0$.

Supponiamo che non sia così. Allora esiste $x_{n_k} \rightarrow x_\infty \neq x_0$.

Osservo che

$$f_m(x_n) \leq f_m(x_0) = f(x_0).$$

- Se fosse che $x_\infty \notin V$, allora (per semplicità uso x_n e non x_{n_k})

$$f_m(x_n) = f(x_n) + n g_1(x_n)^2 + \dots + n g_k(x_n)^2$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$f(x_\infty) + \infty g_1(x_\infty)^2 + \dots$$

\uparrow uno di questi è $\neq 0$

che è assurdo

essendo $\leq f(x_0)$

- Se fosse che $x_\infty \in V$ ma $x_\infty \neq x_0$, allora

$$f_m(x_n) \geq f(x_m) \quad (\text{butto via roba} \geq 0)$$

e passando al limite avrei che

$$f(x_0) < f(x_\infty) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_m(x_n) \leq f(x_0)$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 x₀ p.t.o. min. stretto disug
 min. stretto su \vee di sopra

\uparrow
 perché è
 vero per ogni n

e questo è assunto.

— o — o —

Oss. Il metodo di penalizzazione è utile numericamente.

ANALISI 2

- LEZIONE 085

Note Title

19/03/2018

Lemma Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 , $x_0 \in \Omega$ (aperto) t.c. $g(x_0) = 0$.

Supponiamo che esista $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. x_0 è p.t.o di minimo per (minimo su tutto Ω)

$$\Phi(x) := f(x) - \lambda g(x)$$

(essere stazionario vuol dire verificare $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$)

Allora x_0 è p.t.o di min. per $f(x)$ ristretta al vincolo

$$V := \{x \in \Omega : g(x) = 0\}$$

Dim Per ogni altro $x \in V$ vale

$$f(x) = f(x) - \lambda g(x) \geq f(x_0) - \lambda g(x_0) = f(x_0).$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 $g(x) = 0$ x è p.t.o di $g(x_0) = 0$
 min. per Φ .
 — o — o —

Oss. La cond. precedente è sufficiente affinché x_0 sia di min. in V , ma non necessaria (farsi degli esempi).

Progetto di esercizio Che cosa diventa per i minimi vincolati la cond. nec./suff. sulla H_f ?

(Hint: nasce una cond. di positività sull'ortogonale di $\nabla g(x_0)$, cioè sulla giacitura dello spazio tangente a V).

Esercizio Generalizzare Lemma prec. al caso di più moltiplicatori.

— o — o —

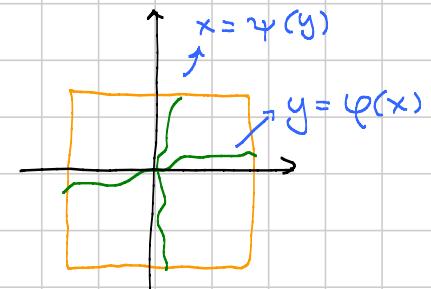
Esempio 1 Sia $f(x,y) := \arctan(xy) + x^2 \sin y + y^8 - x^6$

Capire come è fatto l'insieme $f(x,y) = 0$ in un intorno di $(0,0)$.

Problema: $\nabla f(0,0) = (0,0) \rightsquigarrow$ niente teo. ferm. impl.

Brutal mode: $f(x,y) \sim xy$, quindi ci aspettiamo 2 curve che si incrociano

Oss. Ogni funzione di classe C^2 con $f(0,0) = 0$ e $\nabla f(0,0) = (0,0)$ e $Hf(0,0)$ con autovalori $+$ e $-$ si può portare in questa situazione con una trasformazione affine.



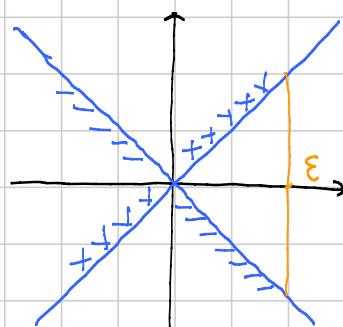
Step 1 Osserviamo che $f(x,x) > 0$ e $f(x,-x) < 0$ per x piccoli

$$f(x,x) = x^2 + O(x^2), \quad f(x,-x) = -x^2 + O(x^2)$$

Step 2 Osserviamo che $f_{yy}(x,y) > 0$ nel triangolo

$$T_\varepsilon := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, \varepsilon), -x \leq y \leq x\}$$

se $\varepsilon > 0$ è piccolo abbastanza.



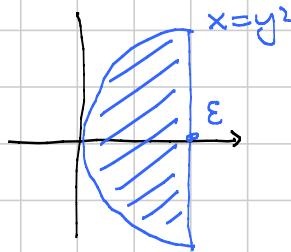
Osserviamo che $f_{yy}(x,y) = x + O(\sqrt{x^2+y^2})$ e ogni funzione di questo tipo è positiva nel triangolo.

$$f_{yy}(x,y) = x + r(x,y) = x \left(1 + \frac{r(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \geq \frac{x}{2}$$

\downarrow $\leq \sqrt{2}$ perché $y^2 \leq x^2$

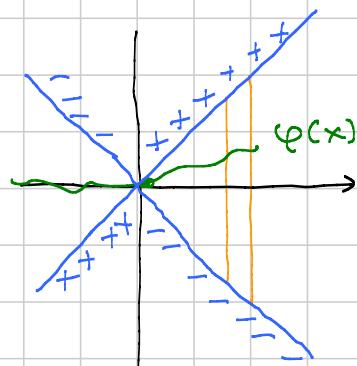
Oss. Non è ovvio, anzi è falso, che una funzione del tipo $\varphi(x, y) = x + o(\sqrt{x^2 + y^2})$ è positiva in una "parabolina"

[Farsi un esempio e misurare sulle differenti rispetto al triangolo].



Step 3 Definisco la curva $y = \varphi(x)$ nel triangolo.

Osservo che nel triangolo tutte le rettilinee a rette verticali sono schett. crescenti



Step 4 Discorsi analoghi negli altri triangoli.

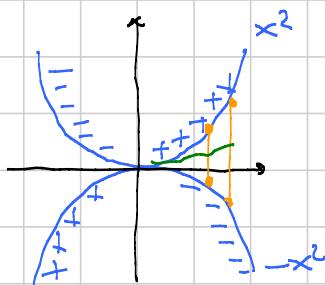
Step 5 Dico che $\varphi'(0) = 0$

$$\text{Considero } f(x, x^2) = x^3 + o(x^3)$$

$$f(x, -x^2) = -x^3 + o(x^3)$$

Deduco, ripetendo la dimostrazione del pto 3, che

$-x^2 \leq \varphi(x) \leq x^2$ in un intorno di 0
da cui la tesi (rapporto incrementale)



Step 6 Vediamo se φ è di classe C^1

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= - \frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))} = - \frac{\varphi(x) + o(\sqrt{x^2 + \varphi(x)^2})}{x + o(\sqrt{x^2 + \varphi(x)^2})} \\ &= \frac{o(x)}{x \left(1 + \frac{o(-)}{x} \right)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Nel numeratore ho usato che $|f(x)| \leq x^2$

Nel denominatore basta che $|f(x)| \leq x$

[Step 7] È vero in generale che f (e f_y) sono C^2 se lo è la f iniziale?

No! $f(x,y) = (y - x^{\frac{3}{2}})x = xy - x^{\frac{5}{2}} \in C^2$

Però il luogo di zeri è dato dall'asse y e dalla curva $y = x^{\frac{3}{2}}$ che è solo C^1 .

Oss. Dove ho usato $f \in C^2$ nella dimostrazione?

[L'ho usato dove dico che $f_y = x + o(\dots)$]

Esempio 2 $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + x^{2018} + y^4 + \arctan(y^2) = 2\}$

$$w_a = -\frac{y}{(x-a)^2+y^2} dx + \frac{x-a}{(x-a)^2+y^2} dy$$

Dimostrare che V è una curva e calcolare $\int_V w_a$
orientata anti-oraria

V è simmetrico rispetto agli assi
e si proietta su $x \in [-1,1]$.

w_a è la "solita" con
singolarità in $(a,0)$.

Quindi

• se $|a| > 1 \rightsquigarrow$ la curva è omotopa

a quella costante + forma chiusa $\rightsquigarrow \int = 0$

• se $|a| < 1 \rightsquigarrow$ la curva è omotopa ad un S^1

$$\rightsquigarrow \int = 2\pi.$$

FINE BOOK 2