

A.A. 2015/2016
Corso di Analisi Matematica 2
Stampato integrale delle lezioni
(Volume 1)

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 001. Introduzione al corso. Struttura euclidea, metrica e topologia nello spazio a n dimensioni. Funzioni di n variabili e loro grafico. Metodi per visualizzare un grafico in dimensione 2: linee di livello e restrizioni a rette.	7
Lezione 002. Definizioni di limite in un punto per funzioni di più variabili. Funzioni continue. Primi esempi di limite.	10
Lezione 003. Limiti all'infinito per funzioni di più variabili. Esempi di limiti per funzioni di più variabili: esistenza via stime+carabinieri o coordinate polari, non esistenza via restrizione a particolari curve.	14
Lezione 004. Ulteriori esempi di limiti per funzioni di più variabili.	18
Lezione 005. Derivate parziali e direzionali e loro significato geometrico. Differenziale per funzioni di più variabili. Esempi di funzioni che hanno tutte le derivate direzionali nulle ma non sono continue.	22
Lezione 006. Una funzione differenziabile è continua e ha tutte le derivate direzionali. Formula per le derivate direzionali. Gradiente e sua interpretazione geometrica. Matrice Jacobiana. Esempi di calcolo di derivate parziali.	27
Lezione 007. Teorema del differenziale totale: caso classico e caso con ipotesi più minimaliste. Prodotto di matrici e differenziale della funzione composta.	32
Lezione 008. Lipschitzianità delle funzioni lineari. Chain rule e funzioni composte in più variabili: esempi di applicazione.	36
Lezione 009. Derivate successive per funzioni di più variabili. Teorema di inversione dell'ordine di derivazione: enunciato, dimostrazione, controesempi.	40
Lezione 010. Formalismo dei multi-indici. Sviluppo di Taylor in più variabili e idea della dimostrazione nel caso con resto di Lagrange.	44
Lezione 011. Teorema di Lagrange direzionale per funzioni di più variabili. Le funzioni con gradiente nullo sono costanti sui connessi. Limitatezza del gradiente vs lipschitzianità per funzioni di più variabili.	48
Lezione 012. Dimostrazione della formula di Taylor in più variabili con resto alla Peano. Ricapitolazione sulle forme quadratiche ed i metodi per determinarne la segnatura.	52
Lezione 013. Fine ripasso sulle forme quadratiche. Stima dal basso per forme quadratiche definite positive. Matrice Hessiana. Segnatura della matrice Hessiana e comportamento nell'intorno di un punto stazionario.	57
Lezione 014. Dimostrazione del criterio che lega la segnatura dell'hessiana alla natura di un punto stazionario. Esempi di studio di punti stazionari.	61

Lezione 015. Compattezza e teorema di Weierstrass in più variabili. Ricerca dei punti di massimo/minimo. Nei punti di massimo/minimi interni il gradiente (se esiste) si annulla.	65
Lezione 016. Primi esempi di problemi di massimo/minimo su insiemi compatti: metodo delle linee di livello e metodo di parametrizzazione del bordo.	70
Lezione 017. Esercizi sul calcolo di gradiente e matrice hessiana in n variabili. Esercizi sulla chain rule: formula generale per le soluzioni dell'equazione delle onde in una variabile.	74
Lezione 018. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange (caso di un solo moltiplicatore): descrizione del metodo e primi esempi di applicazione.	79
Lezione 019. Giustificazione intuitiva del metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Utilizzo misto di moltiplicatori ed altre tecniche. Caratterizzazione di autovettori ed autovalori come punti stazionari del quoziente di Reyleigh e relativi moltiplicatori.	84
Lezione 020. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange (caso con più moltiplicatori): descrizione del metodo ed esempi di applicazione.	89
Lezione 021. Esercizi sui massimi/minimi per funzioni di più variabili su insiemi compatti. Metodo di sostituzione del vincolo. Massimi/minimi di funzioni con valori assoluti.	93
Lezione 022. Teorema di Weierstrass generalizzato su insiemi non compatti. Esempi di problemi di massimo/minimo su insiemi non compatti.	98
Lezione 023. Dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra (via Weierstrass generalizzato e studio locale). Ulteriori esempi di massimi/minimi su insiemi non compatti.	103
Lezione 024. Sottoinsiemi convessi e funzioni convesse in più variabili. Punti estremali di insiemi convessi e punti di massimo di funzioni convesse. La convessità come fatto unidimensionale.	107
Lezione 025. Equivalenza tra due definizioni di locale limitatezza. Le funzioni convesse sono localmente limitate nella parte interna dell'insieme di definizione. Convessità e derivate prime: monotonia del gradiente e grafico al di sopra del piano tangente.	112
Lezione 026. Convessità e continuità: le funzioni convesse sono continue e localmente lipschitziane nella parte interna dell'insieme di definizione. Convessità e segnatura della matrice Hessiana.	116
Lezione 027. Esempi di funzioni convesse in due variabili. Esempio non banale di utilizzo dei moltiplicatori di Lagrange.	121
Lezione 028. Introduzione agli integrali doppi: notazioni, significato geometrico, step functions, integrale inferiore e superiore, criterio di integrabilità.	126
Lezione 029. Descrizione della formula di riduzione per integrali doppi su rettangoli e su insiemi normali. Analogia con il double counting. Esempi di applicazione.	132
Lezione 030. Proprietà basilari dell'integrale (linearità, monotonia, integrale del prodotto e del valore assoluto, ...) analoghe a quelle valide in una variabile. Enunciato e dimostrazione della formula di riduzione in massima generalità. Esempi patologici.	137

Lezione 031. Formula di spezzamento in ipotesi di integrabilità. Insiemi misurabili e loro caratterizzazione. Misurabilità degli insiemi normali. Integrabilità delle funzioni continue su insiemi misurabili.	142
Lezione 032. Utilizzo delle coordinate polari per il calcolo di integrali doppi: descrizione della formula ed esempi di applicazione.	147
Lezione 033. Formula generale per il cambio di variabili negli integrali doppi ed esempi classici di applicazione. Classi particolari di trasformazioni: traslazioni, dilatazioni degli assi, affinità.	152
Lezione 034. Integrali tripli: notazioni, significato fisico, definizione. Formula di riduzione sui parallelepipedi e su insiemi normali (integrazione per colonne). Esempi di applicazione.	157
Lezione 035. Formula di riduzione per sezioni per gli integrali tripli. Utilizzo delle simmetrie per mostrare che certi integrali sono nulli, o comunque per semplificarne il calcolo. Esempi di applicazione.	162
Lezione 036. Coordinate cilindriche e sferiche nello spazio. Cambi di variabile negli integrali tripli. Esempi di applicazione.	167
Lezione 037. Solidi di rotazione: equazioni e formula per il volume. Calcolo del baricentro di figure piane /solide mediante integrali doppi/tripli. Teorema di Guldino per il volume dei solidi di rotazione.	172
Lezione 038. Basi teoriche della formula di spezzamento per integrali multipli. Teorema della media integrale. Calcolo di momenti d'inerzia mediante integrali multipli. Principio di cavalieri.	177
Lezione 039. Integrali di funzioni con valori assoluti. Esercizi riassuntivi sugli integrali multipli.	182
Lezione 040. Dimostrazione della formula di cambio di variabili negli integrali multipli (parte prima): caso delle trasformazioni affini.	187
Lezione 041. Dimostrazione della formula di cambio di variabili negli integrali multipli (parte seconda): riduzione al caso dei cubi piccoli, stima di un diffeomorfismo in un cubo.	192
Lezione 042. Dimostrazione della formula di cambio di variabili negli integrali multipli (parte terza): enunciato e dimostrazione di una disuguaglianza nel caso dei cubi piccoli. Commento sulle coordinate polari.	197
Lezione 043. Introduzione agli integrali impropri in più variabili. Commenti sulla scelta di limitare la teoria agli integrali assolutamente convergenti. Studio del caso delle potenze della distanza dall'origine.	202
Lezione 044. Un integrale improprio non dipende da come viene invasa la zona di integrazione in sede di definizione. Calcolo dell'integrale gaussiano mediante integrali doppi. Esempi di studio della convergenza di integrali impropri.	206
Lezione 045. Esercizi sullo studio della convergenza di integrali multipli impropri.	211
Lezione 046. Volume della palla n-dimensionale: formule esplicite e ricorrenti. Integrali impropri in dimensione n: discussione degli esponenti critici per gli integrali di potenze della norma.	216

Lezione 047. Esempi finali sugli integrali multipli impropri: utilizzo di stime sia sulle integrande, sia sulla zona di integrazione.	220
--	-----

ANALISI 2

- LEZIONE 001

Titolo nota

23/09/2015

ANALISI 1	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{15}$
ANALISI 2	$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
ANALISI 3	$f: X \rightarrow \mathbb{R}$	dove $\dim X = +\infty$

Precorso	20%	→ Calcolo diff. in + variabili	} Prima passata
Analisi 1	40%	→ Calcolo integrale in + variabili	
Algebra Lin	10%	→ Curve, sup., calcolo vettoriale	
Analisi 2	30%	→ Successioni e serie di funzioni	} Seconda passata
		→ Equazioni Diff.	
		→ Spazi metrici	

SLOGAN : UNIFORME (MENTE)

Ripasso su \mathbb{R}^n

① È uno spazio vettoriale (somma e prodotto per scalare)

[Notazione: $x \in \mathbb{R}^n$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
 $(x_1, \dots, x_{15}) \in \mathbb{R}^{15}$]

② È definito il prodotto scalare canonico

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$$

③ È definita la norma di un vettore

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \langle x, x \rangle^{1/2} \quad (\text{lunghezza del vettore})$$

④ È definita la distanza tra due vettori

$$\text{dist}(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = |x - y|$$

Idea generale: prod. scalare \rightsquigarrow norma \rightsquigarrow distanza
 \downarrow
 topologia

Def. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e sia $r > 0$. Si dice PALLA con centro in x_0 e raggio r l'insieme

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, x_0) < r\} \leftarrow \text{aperta}$$

$$\overline{B}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, x_0) \leq r\} \leftarrow \text{chiusa}$$

Def. Sia $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^k$ una successione. Si dice che $x_n \rightarrow x_\infty \in \mathbb{R}^k$ se

$$\boxed{\text{dist}(x_n, x_\infty) \rightarrow 0} \leftarrow \text{limite di numeri}$$

cioè $\forall r > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\underbrace{|x_n - x_\infty| < r}_{x_n \in B_r(x_\infty)} \quad \forall n \geq n_0$

Osservazione Una volta definite le $B_r(x_0)$ abbiamo immediatamente le nozioni di [dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$]

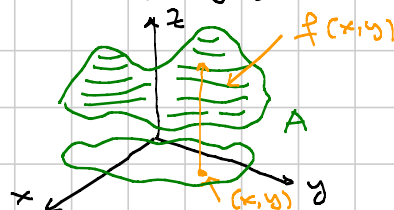
- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| ① punto interno | $\leadsto \text{Int}(A)$ |
| ② punto aderente | $\leadsto \text{Clos}(A)$ |
| ③ punto di frontiera | $\leadsto \partial A$ |
| ④ punto di accumulazione | $\leadsto D(A)$ |
| ⑤ punto isolato | $\leadsto \text{Isol}(A)$ |

[Def di ①: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si dice che x_0 è interno ad A se $\exists r > 0$ t.c. $\underbrace{B_r(x_0)}_{\subseteq A}$]

Funzioni $f(x, y)$, $f(x, y, z)$, $f(x, \dots, x_s)$, $f(x)$ $x \in \mathbb{R}^n$

Dato $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, il suo grafico è

$$\text{Grafico}(f) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, z = f(x, y)\}$$



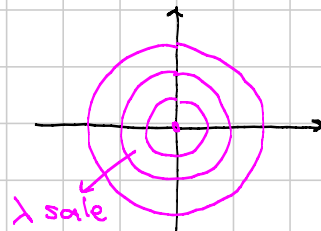
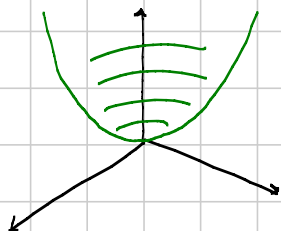
Due scorciatoie per visualizzare funzioni $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^2$

→ linee di livello $A_\lambda = \{(x,y) \in A : f(x,y) = \lambda\}$

Esempio

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 = \lambda$$



→ percorsi di omni

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

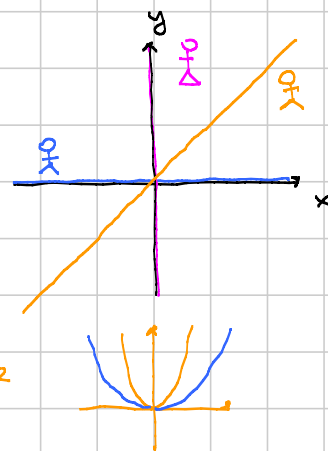
$$f(t,0) = t^2$$

↑ al variare di t
descrive l'asse x

$$f(0,t) = t^2$$

↑ asse y

$$f(t,t) = t^2 + t^2 = 2t^2$$

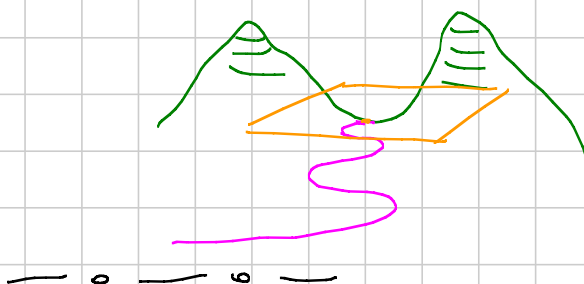


$$f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^2 = t^2$$

— o — o —

Punti stazionari: p.ti in cui piano tangente // piano base
Oltre ai max / min / flessi ci sono i

MOUNTAIN PASS



ANALISI 2

LEZIONE 002

Titolo nota

23/09/2015

Definizioni di limite per funzioni di più variabili

$A \subseteq \mathbb{R}^n$

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$

 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ p.to di accumulazione di A

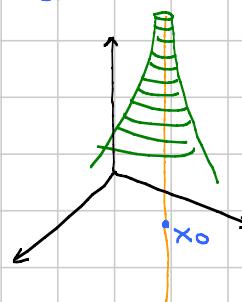
$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \text{vettori}}} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \textcircled{1} \\ +\infty & \textcircled{2} \\ -\infty & \textcircled{3} \\ \text{N.E.} & \textcircled{4} \end{cases}$$

 $\textcircled{4} \leftarrow$ Nessuno dei precedenti

$\textcircled{2} \forall M \in \mathbb{R} \text{ (anche enorme)}$

$\exists r > 0 \text{ t.c.}$

$f(x) \geq M \quad \forall x \in (B_r(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\}$



$\textcircled{3} \forall M \in \mathbb{R} \exists r > 0 \text{ t.c. } f(x) \leq M \quad \forall x \in \dots$

$$\textcircled{1} \forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 \text{ t.c. } l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \in (B_r(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\}$$

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Achtung! In \mathbb{R}^n non si fanno (almeno per ora :) limiti all'infinito.Osservazione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ posso definire $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \uparrow \mathbb{R}^n}} f(x) = l \in \mathbb{R}^m$

$\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 \text{ t.c. } |f(x) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \in (B_r(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\}$

 \uparrow vettori
 \uparrow norma
Notazione: se siamo in \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 scriviamo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y)$$

Esempio 1 Calcolare $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{y \log x + \arctan(xy)}{x^2 + y^2} = \frac{1}{5} \arctan 2$

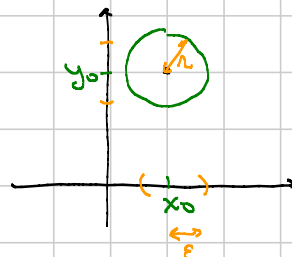
Posso sostituire perché vale il solito meta-teorema di analisi 1.

L'unica cosa da dimostrare è la continuità delle "componenti"

$$f(x,y) = x$$

$$f(x,y) = y$$

Questa è sostanzialmente ovvia: se (x,y) è vicino a (x_0, y_0) , allora x è vicino a x_0 e y è vicino a y_0 .



Strumenti per il calcolo di limiti in \mathbb{R}^n :

→ teo. algebrici

→ composizioni

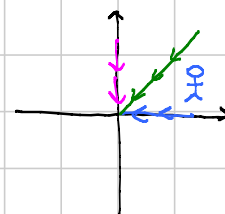
→ confronto e carabinieri

→ De L'Hôpital NO

→ Taylor lo vedremo.

Esempio 1 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)}$

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = f(x,y)$$



Esploriamo con 2 cammini

$$\gamma: f(x,0) = 0$$

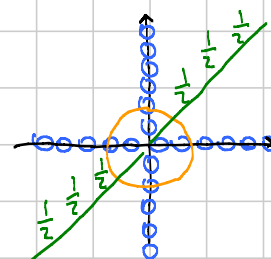
$$\gamma: f(0,y) = 0$$

$$\gamma: f(x,x) = \frac{1}{2}$$

Due cammini con comportamento diverso \Rightarrow il limite non esiste

Se il limite fosse reale, non potrei avere valori che distano $\frac{1}{2}$ in ogni $B_r(0)$.

Similmente si escludono i limiti $\pm \infty$



SLOGAN: ad Analisi 2 i limiti non hanno
NESSUNA VOGLIA di esistere

Come dimostro che un limite NON esiste? Trovo 2 cammini con comp. diverso

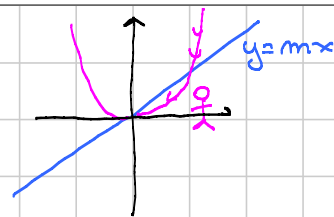
" " " " ESISTE? Può essere complicato

Esempio 2 $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} ?$

Asse x : $f(x,0) = 0$

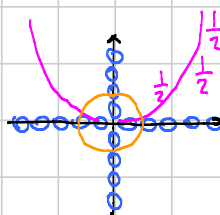
Asse y : $f(0,y) = 0$

Bisettrice: $f(x,x) = \frac{x^3}{x^4 + x^2} = \frac{x}{x^2 + 1} \rightarrow 0$



$y = mx$: $f(x, mx) = \frac{m x^3}{x^4 + m^2 x^2} = \frac{mx}{x^2 + m^2} \rightarrow 0$ per ogni $m \neq 0$ e anche per $m = 0$

$f(x, x^2) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$



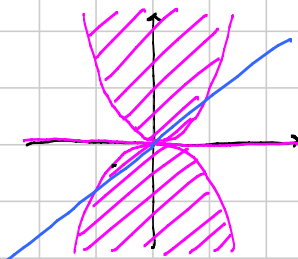
Esempio 3 $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^4 + y^2}$

Dimostro che $|f(x,y)| \rightarrow 0$

$$0 \leq |f(x,y)| = |x| \frac{y^2}{x^4 + y^2} \leq |x|$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 0 0 0

Esempio 2-bis

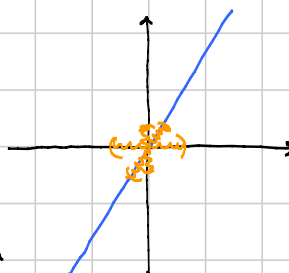


$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{zona colorata} \\ 1 & \text{fuori} \end{cases}$$

Il limite a $(0,0)$ non esiste, ma su tutte le rette passanti per l'origine il limite viene 0 (ogni retta vicino all'origine casca in zona 0)

Fissato $\varepsilon > 0$ in ogni direzione trovo un intorno in cui $|f(x,y)| \leq \varepsilon$.

Se mettendo insieme gli intorno avessi una palla di \mathbb{R}^2 avrei l'esistenza del limite



Il problema è che $\mathcal{L}'r$ sulle varie rette NON È UNIFORME, cioè non esiste un $r_0 > 0$ che va bene ovunque.

Esercizio (semi-hard) Trovare $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \quad \text{NON ESISTE}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(ax^k, bx^q) = 0 \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$$

\uparrow
 tanti omni che
 vanno in $(0,0)$

$k \geq 1, q \geq 1$ interi

ACHTUNG! Se anche infiniti omni concordano sul limite, questo può comunque non esistere.

ANALISI 2

-

LEZIONE 003

Titolo nota

25/09/2015

Visto finora: $\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ $D \subseteq \mathbb{R}^n$

(Diagramma: una freccia blu indica $x \rightarrow x_0$ in \mathbb{R}^n , e un'altra freccia blu indica $f(x)$ verso \mathbb{R})

\rightarrow continuità per funzioni di più variabili

Quattro facce della continuità:

① con i limiti: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

② (ε/δ) : $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \cap D$

③ per successioni: per ogni succ. $x_n \rightarrow x_0$ si ha $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$
tutto in \mathbb{R}^n

④ con gli aperti: se $f(x_0) \in \text{Int}(B)$, allora $x_0 \in \text{Int } f^{-1}(B)$
relativo all'insieme D.

— o — o —

LIMITI ALL'INFINITO PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Data una succ. $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^k$, cosa vuol dire che " $x_n \rightarrow +\infty$ "?

Vuol dire che $|x_n| \rightarrow +\infty$, cioè
norma

$$\forall R > 0 \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m \geq m_0 \quad x_m \notin B_R(0)$$

origine

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme non limitato ($\forall R > 0 \quad D \cap B_R(0) \neq \emptyset$)

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} l \\ +\infty \\ -\infty \\ \text{n.e.} \end{cases}$$

(nessuno dei precedenti)

② $\forall M \in \mathbb{R} \exists R > 0$ t.c. $\forall x \in D \quad |x| \geq R \Rightarrow f(x) \geq M$

③ $\forall M \in \mathbb{R} \exists R > 0$ t.c. $\forall x \in D \quad |x| \geq R \Rightarrow f(x) \leq M$

① $\forall \varepsilon > 0 \exists R > 0$ t.c. $\forall x \in D \quad |x| \geq R \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$

Oss. Ovviamente \liminf e \limsup esistono sempre

Esempio 1 $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ $\liminf / \limsup (x,y) \rightarrow (0,0)$

Asse x : $\lim_{t \rightarrow 0} f(t,0) = 0$ Bisettrice: $\lim_{t \rightarrow 0} f(t,t) = \frac{1}{2}$

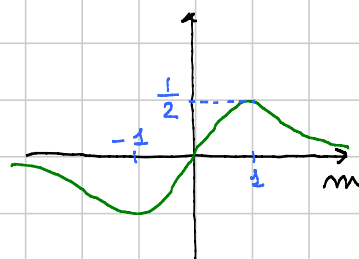
Chi sono \liminf / \limsup ? Provo intanto la retta generica $y = mx$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, mt) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{mt^2}{t^2 + m^2 t^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Al variare di m troviamo vari valori del limite.

Da questo conto sappiamo che

$$\liminf f(x,y) \leq -\frac{1}{2} \quad \limsup f(x,y) \geq \frac{1}{2}$$



Provo a vedere se per caso $f(x,y) \leq \frac{1}{2}$; $\frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$; $2xy \leq x^2+y^2$
 \uparrow
 $0 \leq x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$

La disuguaglianza è vera, quindi $\limsup f(x,y) = \frac{1}{2}$. Idem per \liminf .

Esempio 2 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$

Si può fare con delle stime $\left| \frac{x^3}{x^2+y^2} \right| = |x| \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq |x|$

Più velocemente si fa in **COORDINATE POLARI** $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$

$$f(x,y) = \frac{\rho^3 \cos^3 \theta + \rho^3 \sin^3 \theta}{\rho^2} = \rho (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)$$

Devo fare il limite per $\rho \rightarrow 0$, ma solo dopo essermi liberato di θ .

$$0 \leq |\rho (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)| \leq 2\rho$$

Esempio 3 $f(x,y) = \frac{x^5 + 3y^5}{x^4 + y^4} \quad (x,y) \rightarrow (0,0)$

Passo in polari: $f(x,y) = \frac{\rho^5 (\cos^5 \theta + 3 \sin^5 \theta)}{\rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)}$

$$= \rho \frac{\cos^5 \theta + 3 \sin^5 \theta}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}$$

↓
0

come posso staccarlo
indipendentemente da θ ?

$|\text{Numeratore}| \leq 4$.

Denominatore = $d(\theta)$ è una funzione continua che in $[0, 2\pi]$ avrà un minimo m per θ , che non è nullo perché $\cos \theta$ e $\sin \theta$ non si annullano contemporaneamente.

Quindi

$$0 \leq \rho \left| \frac{\cos^5 \theta + 3 \sin^5 \theta}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta} \right| \leq \rho \frac{4}{m}$$

↓
0

↓
0

↓
0

Esempio 4 $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

Passiamo in polari: $\frac{\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^4 \cos^4 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} = \rho \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta}$

① Se fisso θ e faccio il limite in $\rho \rightarrow 0$ ottengo 0, almeno per $\sin \theta \neq 0$

② Quando $\sin \theta = 0$, la frazione vale 0, quindi tende comunque a 0
NO!!! Queste cose non si fanno!!!

Fissare θ è equivalente a fare il limite sulle rette!!!

Achtung! Si può fare il limite in ρ solo dopo aver ottenuto stime UNIFORMI in θ . (N.B.: il limite non esisteva)

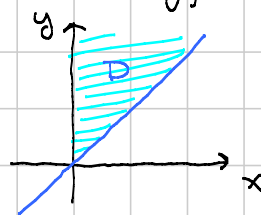
Esempio 5 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y\}$

Ora esiste e fa 0. Infatti in D

$$0 \leq f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + x^2} = \frac{y}{1 + x^2} \leq y$$

↓
0

↓
0



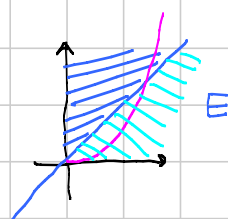
In alternativa $0 \leq f(x,y) \leq \frac{y^3}{x^4+y^2} \leq \frac{y^3}{y^2} = y$

Esempio 6 $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ $|f(x,y)| \rightarrow +\infty$ $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$

Asse x : $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0) = 0$

Bisettrice: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,t) = \frac{t^3}{t^4 + t^2} = 0$

Parabole: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,t^2) = \frac{1}{2}$ come sempre.



Se mi restringo al D dell'esempio 5

Continua a non esistere perché posso usare bisettrice + parabole.

Esercizio Mostrare che il limite esiste se mi restringo ad E.

— 0 — 0 —

ANALISI 2

-

LEZIONE 004

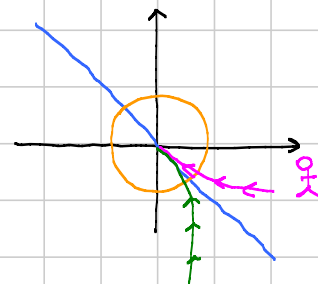
Titolo nota

25/09/2015

Esempio 1 $f(x,y) = \frac{x^4 + y^5}{x^3 + y^3} \quad (x,y) \rightarrow (0,0)$

Non esiste! f è definita in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x\}$

Idea: in ogni $B_r(0)$ esistono p.ti della retta diversi dall'origine. Vicino a quei p.ti $f(x,y)$ assume valori enormi o enormi negativi



Formalmente: $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, -t+t^2) =$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^4 + (-t+t^2)^5}{t^3 + (-t+t^2)^3} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^4 + o(t^4)}{t^3 - t^3 + 3t^4 + o(t^4)} = \frac{1}{3}$$

Se invece vado lungo l'asse x : $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = \frac{t^4}{t^3} = 0$

Quindi il limite non esiste. Analogamente

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, -t+t^4) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^4 + o(t^4)}{t^3 - t^3 + 3t^6 + o(t^4)} = +\infty$$

Quindi $\limsup_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = +\infty$

Per vedere che $\liminf_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = -\infty$ uso $f(t, -t-t^4)$

Esempio 2 Stessa $f(x,y) = \frac{x^4 + y^5}{x^3 + y^3}$ all'infinito

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t = +\infty \Rightarrow \limsup = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} t = -\infty \Rightarrow \liminf = -\infty$$

Esempio 3 Stessa $f(x,y) = \frac{x^4+y^5}{x^3+y^3}$, $(x,y) \rightarrow (0,0)$
 ristretta a $D = 1^o$ quadrante

Qui il limite è 0 e lo dim. con le coord. polari

$$f(x,y) = \frac{\rho^4 \cos^4 \theta + \rho^5 \sin^5 \theta}{\rho^3 (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)} = \rho \frac{\cos^4 \theta + \rho \sin^5 \theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}$$



Per $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ la funzione $\cos^3 \theta + \sin^3 \theta$ ha un minimo $m > 0$
 ($\cos \theta$ e $\sin \theta$ sono ≥ 0 in $[0, \frac{\pi}{2}]$ e non si annullano insieme)

$$0 \leq \left| \frac{\cos^4 \theta + \rho \sin^5 \theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta} \right| \leq \rho \cdot \frac{1}{m} + \rho^2 \frac{1}{m} \quad \text{e da qui si chiude.}$$

Esempio 4 $(x,y) \rightarrow (0,0)$ $f(x,y) = \frac{x^2 |y|^\alpha}{x^{16} + y^{16}}$

Studio al variare di α . Il limite esiste ed è uguale a 0 se e solo se $\alpha > 14$. Infatti in polari

$$\frac{\rho^{2+\alpha} (\cos^2 \theta |\sin \theta|^\alpha)}{\rho^{16} (\cos^{16} \theta + \sin^{16} \theta)} \quad \text{e quindi fine come sempre}$$

$\geq m > 0$

Esempio 5 $(x,y) \rightarrow (0,0)$ $f(x,y) = \frac{x^2 |y|^\alpha}{x^{10} + y^{16}}$

Idea: PAREGGIARE GLI ESPONENTI!

Ad esempio uso la curva (t^8, t^5)

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t^8, t^5) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^{16} |t^{5 \cdot 2}|}{t^{80}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^{16} t^{10}}{t^{80}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^{26}}{t^{80}} = 0$$

Quindi le cose cambiano quando $5\alpha + 16 = 80$; $5\alpha = 64$, $\alpha = \frac{64}{5}$

Cosa ho dimostrato? Che per $\alpha \leq \frac{64}{5}$ il limite non esiste
 (sull'asse x o y fa 0, e sulla curva strana no)

Resta da dire che per $\alpha > \frac{64}{5}$ esiste e fa 0.

Faccio un cambio di variabili $x = z^8$
 $y = w^5$

Se posso fare il cambio il limite diventa

$$\lim_{(z,w) \rightarrow (0,0)} \frac{z^{16} |w|^{52}}{z^{80} + w^{80}} \quad \text{e questo si fa bene con le polari}$$

Fatto che ci sta sotto: $(x,y) \rightarrow (0,0)$ se e solo se $(z,w) \rightarrow (0,0)$.
 Cioè se $x^2 + y^2 \leq R$ allora $z^2 + w^2 \leq R_1$ e viceversa.

Osservazione Nel momento in cui pongo $x = z^8$ perdo informazione, cioè sto facendo il limite solo per $x > 0$.
 Dovrei poi fare la stessa cosa ponendo $x = -z^8$ e questo fa il limite per $x < 0$.
 — o — o —

Esempio 6 Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua t.c.

$$\limsup_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$$

$$\liminf_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = -\infty$$

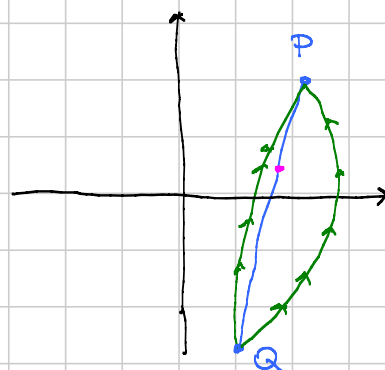
Tesi: allora $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x,y) = \lambda$ ha ∞ soluz.

Idea: esiste un p.to P in cui $f(P) > \lambda$
 " " " Q in cui $f(Q) < \lambda$

Nel segmento congiungente c'è almeno un p.to in cui vale esatt. λ

$$\varphi(t) = f(Q + t(P-Q))$$

φ è continua e $\varphi(0) < \lambda$ e $\varphi(1) > \lambda$



Lo stesso ragionamento vale per ogni percorso che congiunge P e Q.

Esempio 7 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{\frac{\sin^2 x - \sin^2 y}{x-y}}_{f(x,y)} \quad D = \{ \dots : x \neq y \}$

In questo caso $f(x,y) \rightarrow 0$.

Uso Lagrange con $g(x) = \sin^2 x$

$$\sin^2 x - \sin^2 y = (x-y) g'(c) = (x-y) 2 \sin c \cdot \cos c$$

Per $x \neq y$ posso semplificare ottenendo $f(x,y) = 2 \sin c \cdot \cos c$

Quando $(x,y) \rightarrow (0,0)$ di sicuro $c \rightarrow 0$, quindi $f(x,y) \rightarrow 0$.

↑
dipende da
x e y, ma
è compreso tra
x e y

Esempio 8 $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{xy} \quad D = \text{fuori dagli assi}$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 1$ e si fa con il cambio di variabili $t = xy$

diventa $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

— 0 — 0 —

ANALISI 2 - LEZIONE 005

Titolo nota

29/09/2015

"Derivate" per funzioni di più variabili

Derivata $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

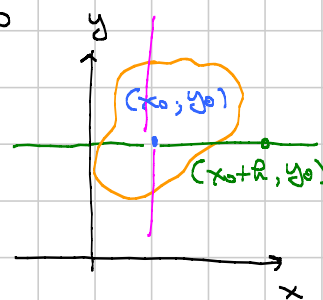
Differenziale $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$

In una variabili le 2 nozioni sono equivalenti

 $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in D$ pto INTERNO

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

se esiste ed è reale



Se esiste, si chiama DERIVATA PARZIALE di $f(x, y)$ rispetto alla variabile x nel pto (x_0, y_0)

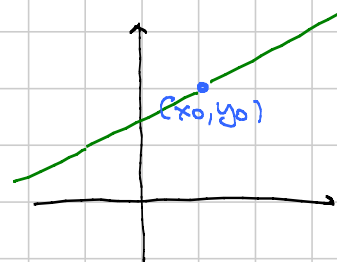
$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

se esiste ed è reale

... rispetto a y ...

DERIVATA DIREZIONALE: andare lungo una qualunque retta

Fissato un qualunque vettore $\vec{v} = (v_1, v_2)$ non nullo, cioè $v_1^2 + v_2^2 \neq 0$, posso provare a calcolare



$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+v_1h, y_0+v_2h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$

se esiste ed è reale

Si chiama DERIVATA di f lungo la direzione v nel pto (x_0, y_0)

Oss. La derivata direzionale si può definire

→ rispetto a tutti i $v \neq 0$

→ rispetto ai soli vettori ($|v|=1$)

Bastano quelle definite nel secondo modo per "catturare" tutte le possibili rette per (x_0, y_0) .

Def. formale in \mathbb{R}^n $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Int}(D)$.

Dato $v \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{\substack{R \rightarrow 0 \\ \text{se esiste } e \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0 + Rv) - f(x_0)}{R}$$

Le derivate parziali sono derivate direzionali con $v =$ uno dei vettori della base canonica

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{\substack{R \rightarrow 0 \\ \text{se esiste } e \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0 + Re_i) - f(x_0)}{R}$$

i -esima
 \downarrow
 $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

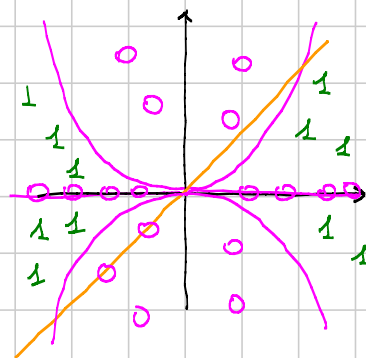
Sorpresona: in più variabili possono esistere tutte le derivate direzionali in x_0 senza che f sia continua in x_0

Esempio 1 $D = \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$

Chiaramente $f(x, y)$ non è continua in $(0, 0)$.

Tuttavia, tutte le derivate direzionali esistono e sono nulle in $(0, 0)$.

Su ogni retta infatti $f(x, y)$ è identicamente nulla vicino all'origine.



Esempio 2

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right)^2 & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Il limite in $(0,0)$ non esiste (basta andare sulle parabole).
Tutte le derivate direzionali esistono e sono nulle.

Preso $v = (a,b)$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(a\rho, b\rho) - f(0,0)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \left(\frac{a^2 \rho^2 b \rho}{a^4 \rho^4 + b^2 \rho^2} \right)^2$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \frac{a^4 b^2 \rho^4}{(a^4 \rho^2 + b^2)^2} = 0 \quad \text{se } b \neq 0$$

Se $b = 0$ vuol dire che sto facendo $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e questa è nulla perché la frazione è sempre nulla in quel caso

Oss. geometrica fare $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ è equivalente a fare la derivata

in $t=0$ della funzione $\varphi(t) = f(x_0 + tv)$, cioè la restrizio-
ne di f alla retta $x_0 + tv$

Notazioni Le derivate parziali / direzionali si indicano
col differenziale come

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$$

$$f_x(x_0)$$

$$D_x f(x_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$$

$$f_v(x_0)$$

— o — o —

Le derivate parziali / direzionali si comportano male perché
sono equivalenti a muoversi lungo le sole rette.

DIFFERENZIALE IN PIÙ VARIABILI

$$D \subseteq \mathbb{R}^2, f: D \rightarrow \mathbb{R}, (x_0, y_0) \in \text{Int}(D).$$

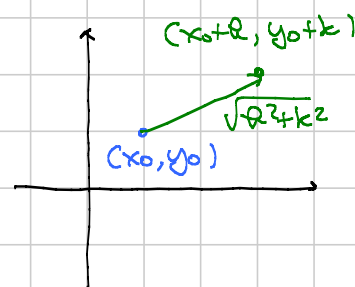
$$f(x_0 + R, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \underbrace{\alpha R + \beta k}_{(\alpha, \beta) \cdot (R, k)} + \underbrace{o(\sqrt{R^2 + k^2})}_{r(R, k)}$$

Dico che f è differentiabile in (x_0, y_0) se esistono due numeri α e β tali che vale la formula di sopra.

L'0 piccolo vuol dire che

$$\lim_{(R, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{r(R, k)}{\sqrt{R^2 + k^2}} = 0$$

limite di una funzione di due variabili

Def. formale in n variabili

$$D \subseteq \mathbb{R}^n, f: D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \text{Int}(D)$$

Dico che f è diff. in x_0 se esiste un vettore α t.c.

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \alpha \cdot R + o(|R|)$$

prodotto scalare
di vettori

norma del
vettore R

$$o(|R|) = r(R) \quad \text{con} \quad \lim_{R \rightarrow 0} \frac{r(R)}{|R|} = 0$$

limite in n variabili

Osservazione L'applicazione $R \rightarrow \alpha \cdot R = \langle \alpha, R \rangle$ è
un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Def ancora più generale $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \text{Int}(D)$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$

Si dice che f è diff. in x_0 se esiste un'applicazione lineare

$$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

tale che

$$\underbrace{f(x_0 + h)}_{\in \mathbb{R}^m} = \underbrace{f(x_0)}_{\in \mathbb{R}^m} + \underbrace{Lh}_{\substack{\in \mathbb{R}^m \\ \uparrow \text{ } M_{m,n} \text{ } \mathbb{R}^n}} + \underbrace{o(|h|)}_{\substack{\in \mathbb{R}^m \\ \uparrow \text{ } \mathbb{R}^m}}$$

solo che ora

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\underbrace{|o(h)|}_{\substack{\text{norma in } \mathbb{R}^m \\ \uparrow \\ \text{norma in } \mathbb{R}^m}}}{\underbrace{|h|}_{\substack{\text{norma in } \mathbb{R}^n \\ \uparrow \\ \text{norma in } \mathbb{R}^n}}} = 0$$

ANALISI 2

LEZIONE 006

Titolo nota

29/09/2015

Quando dei risultati $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Int}(D)$

f diff. in x_0

Esistono deriv. parziali in x_0

Esistono deriv. direzionali
più formula in x_0

f continua in x_0

Ogni altra implicazione è in generale FALSA.

Def. Si dice GRADIENTE di f nel pto x_0 il vettore che ha come componenti le derivate parziali di f .

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

↑
NABLA

Teorema Siano D, f, x_0 come sopra.

Supponiamo che f sia differenziabile in x_0

Allora

(i) f è continua in x_0

(ii) esistono le derivate parziali in x_0 e l'α della definizione di diff. è proprio $\nabla f(x_0)$, quindi

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle + o(h)$$

(iii) esistono tutte le derivate direzionali in x_0 e sono date dalla formula

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

formula per le derivate direzionali date le derivate parziali

Dim. (i) Devo dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
 Pongo $R = x - x_0$
 e diventa $\lim_{R \rightarrow 0} f(x_0 + R) = f(x_0)$

D'altra parte per definizione di differenziale

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \underbrace{\langle \alpha, R \rangle}_{\downarrow 0 \text{ per } R \rightarrow 0} + \underbrace{o(|R|)}_{\downarrow 0 \text{ per } |R|}$$

(ii) + (iii) Uso la def. di derivata direzionale

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ \text{numeri}}} \frac{f(x_0 + \overbrace{tv}^R) - f(x_0)}{t}$$

D'altra parte se uso la def. di diff. con $R = tv$ ottengo

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} &= \frac{\cancel{f(x_0)} + \langle \alpha, tv \rangle + r(tv) - \cancel{f(x_0)}}{t} \\ &= \frac{\cancel{t} \langle \alpha, v \rangle}{\cancel{t}} + \frac{r(tv)}{t} \\ &= \langle \alpha, v \rangle + \underbrace{\frac{r(tv)}{t|v|}}_{\substack{r(R) \\ |R|} \rightarrow 0} |v| \rightarrow \langle \alpha, v \rangle \end{aligned}$$

Back to (ii): se uso $v = e_i$ ottengo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \langle \alpha, e_i \rangle = \alpha_i = i\text{-esima componente di } \alpha$$

Quindi le componenti di α sono le derivate parziali, quindi
 $\alpha = \nabla f(x_0)$.

— o — o —

Praticamente:

- ① Come calcolo le derivate parziali?
- ② " " " " direzionali?
- ③ Come dimostro la differenziabilità?

- ① O uso la definizione, oppure quando posso uso le classiche regole di derivazione stile analisi 1.

Esempi $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + 4xy$ $f_x = 2x + 4y$
 $f_y = 6y + 4x$

$f(x,y) = y \sin(x^2y)$ $f_x = y \cos(x^2y) \cdot 2xy$
 $f_y = 1 \cdot \sin(x^2y) + y \cos(x^2y) \cdot x^2$

$f(x,y) = x^y$ $f_x = y x^{y-1}$
 $f_y = x^y \log x$

Mi raccomando, fare esercizi (sono derivate in 1 variabile)

- ② O uso la definizione, oppure se ho una risposta affermativa a ③ uso la formula $\frac{\partial f}{\partial v} = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$

— o — o —

Significato geometrico del gradiente.

Domanda: per quali vettori v la derivata direzionale risulta max/min?

$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle = |\nabla f(x_0)| \cdot |v| \cdot \cos \theta$
↑ angolo compreso

Max per $\cos \theta = 1$, cioè $\theta = 0$

min per $\cos \theta = -1$, cioè $\theta = \pi$

Quindi: il gradiente è la direzione di massima salita per $f(x,y)$

Brutalmente: guardando la piantina, è la direzione in cui andare per salire

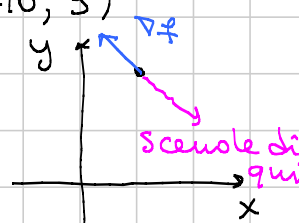
Esempio $f(x,y) = x^2 + y^3 - 3x^2y$.

Mettiamo una pallina nel pto del grafico che corrisponde a $(1,2)$. In che direzione va la pallina.

$$\nabla f = (2x - 6xy, 3y^2 - 3x^2) \quad \nabla f(1,2) = (-10, 3)$$

La pallina va nella direzione opposta

— o — o —



③ O uso la definizione, o uso il seguente

Teorema (del DIFFERENZIALE TOTALE) $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$,
 $(x_0, y_0) \in \text{Int}(D)$

Supponiamo che

(i) le derivate parziali esistono in tutto D (intorno di (x_0, y_0))

(ii) le derivate parziali sono continue in (x_0, y_0) .

Allora f è differenziabile in (x_0, y_0)

— o — o —

Osservazione Il teorema precedente permette di stabilire la differenziabilità "tutte le volte che non ci sono problemi", ad esempio

$f(x,y) = x^3 \log y + \arctan(xy)$ è differenziabile su tutto il suo insieme di definizione

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

Basta osservare che le derivate parziali non hanno problemi.

Oss. Le derivate parziali si possono scrivere in termini di o piccolo

$$f(x_0 + R e_i) = f(x_0) + \underbrace{f_{x_i}(x_0)}_{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)} R + o(R)$$

$$f(x_0 + R v) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) R + o(R)$$

La differenza rispetto al differenziale è che qui R è un numero, quindi $o(R)$ contiene un limite in dir. \pm , mentre nel differenziale $R \rightarrow 0$ come vettore.

— o — o —

Notazione Nel caso di $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, chi è la matrice che rappresenta l'applicazione lineare?

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + M R + o(|R|)$$

Le righe di M sono i gradienti delle componenti di f , cioè

$$M_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad f_i = \text{componente } i\text{-esima di } f$$

↑
riga i
colonna j

M si dice **MATRICE JACOBIANA** di f

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 007

Titolo nota

30/09/2015

Diff. in più variabili

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + L R + o(|R|)$$

appl. lineare

per $R \rightarrow 0$
limite in n
variabiliTeorema del differenziale totale

Brutalmente: se le derivate parziali esistono e sono continue, allora f è differenziabile

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sia $\delta > 0$ e sia f definita in un intorno di x_0 e raggio δ ($B_\delta(x_0)$) a valori in \mathbb{R} .

Supponiamo che

(i) le derivate parziali esistono in $B_\delta(x_0)$

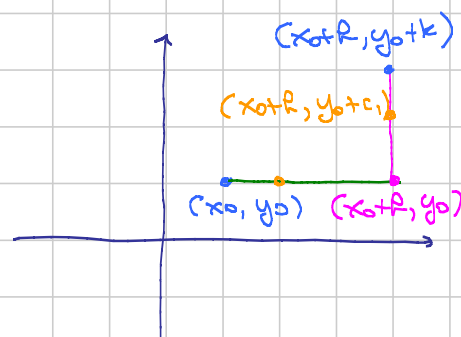
(ii) " " " sono continue in x_0 .

Allora f è diff. in x_0

Dim. in 2 variabili $x_0 \rightsquigarrow (x_0, y_0)$

$$f(x_0 + R, y_0 + k) - f(x_0, y_0) =$$

$$= f(x_0 + R, y_0 + k) - f(x_0 + R, y_0) + \\ + f(x_0 + R, y_0) - f(x_0, y_0)$$



Applico Lagrange uno-dimensionale alla prima e alla seconda riga

$$= k f_y(x_0 + R, y_0 + c_1) \\ + R f_x(x_0 + c_2, y_0)$$

Lagrange su $\varphi(t) = f(x_0 + R, t)$
 $\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0) = k \varphi'(c)$

$$= \underbrace{k f_y(x_0, y_0) + R f_x(x_0, y_0)}_{\langle (k, R), \nabla f(x_0, y_0) \rangle} + k [f_y(x_0 + R, y_0 + c_1) - f_y(x_0, y_0)] \\ + R [f_x(x_0 + c_2, y_0) - f_x(x_0, y_0)]$$

spero che sia $o(\sqrt{R^2 + k^2})$

Dico che ciascuno dei due termini è $o(\sqrt{R^2+k^2})$. Guardo il 1°

$$\frac{|k| |f_y(x_0+R, y_0+c_1) - f_y(x_0, y_0)|}{\sqrt{R^2+k^2}} \leq |f_y(x_0+R, y_0+c_1) - f_y(x_0, y_0)|$$

≤ 1

perché ho assunto che f_y fosse continua in (x_0, y_0) e $(x_0+R, y_0+c_1(k)) \rightarrow (x_0, y_0)$ per $(R, k) \rightarrow (0, 0)$

Il secondo termine si tratta allo stesso modo.

Osservazioni • Nel caso generale (n variabili) la dim. è la stessa, solo bisogna togliere n termini.

Più elegante: evoluzione su n (esercizio di formalizzazione)

- Ho usato per Lagrange l'esistenza di f_x e f_y in tutto un intorno.

Teorema (in ipotesi più risparmio) Si possono risparmiare le ipotesi su f_x

$$f(x_0+R, y_0) - f(x_0, y_0)$$

So che $f_x(x_0, y_0)$ esiste, quindi per analisi 1 posso scrivere

$$f(x_0+R, y_0) - f(x_0, y_0) = \underbrace{f_x(x_0, y_0) R}_{\text{termine che volevo}} + \underbrace{R w(R)}_{\text{banalmente } o(\sqrt{R^2+k^2})}$$

$$\lim_{(R,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|R w(R)|}{\sqrt{R^2+k^2}} \leq \lim_{(R,k) \rightarrow (0,0)} |w(R)| = 0$$

Quindi ho dimostrato il teorema in 2 variabili assumendo:

- (i) f_y esiste nell'intorno ed è continua in (x_0, y_0)
- (ii) f_x esiste solo in (x_0, y_0) .

In n variabili posso assumere

- (i) $n-1$ derivate esistono nell'intorno e continue nel p.to
 (ii) l'altra derivata esiste solo nel p.to.

Teorema (Derivata della funzione composta)

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$, sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}^k$

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$, sia $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m$$

Supponiamo D ed Ω aperti e supponiamo che $f(D) \subseteq \Omega$.

Così posso definire $\mathcal{R} = g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Sia $x_0 \in D$ e sia $y_0 = f(x_0) \in \Omega$.

Supponiamo f differenziabile in x_0 con matrice jacobiana A

" g " " y_0 " " B .

Allora \mathcal{R} è differenziabile in x_0 con matrice jacobiana BA

Dic. Scriviamo le ipotesi

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + AR + r_f(R)$$

$$\text{con } \lim_{R \rightarrow 0} \frac{|r_f(R)|}{|R|} = 0$$

\mathbb{R}^k
↓
 \mathbb{R}^n

$$g(y_0 + k) = g(y_0) + Bk + r_g(k)$$

$$\text{con } \lim_{k \rightarrow 0} \frac{|r_g(k)|}{|k|} = 0$$

Lavoro con $\mathcal{R} = g \circ f$

$$g(f(x_0 + R)) = g(\underbrace{f(x_0)}_{y_0} + \underbrace{AR + r_f(R)}_k)$$

$$= g(y_0) + B(AR + r_f(R)) + r_g(AR + r_f(R))$$

$$= \underbrace{g(y_0)}_{g(f(x_0)) \text{ ok!}} + \underbrace{BAR}_{\text{termine lineare che volevo}} + B r_f(R) + r_g(AR + r_f(R))$$

Mi serve che gli altri 2 termini siano $o(|R|)$

1° termine $\lim_{R \rightarrow 0} \frac{|B_{2f}(R)|}{|R|}$

Un lemma misterioso dice che: data una matrice M esiste una costante C tale che $|Mx| \leq C|x|$ per ogni $x \in \text{spazio di partenza}$

Dato il lemma misterioso $\frac{|B_{2f}(R)|}{|R|} \leq \frac{C|2f(R)|}{|R|} \xrightarrow{\text{per } R_p \text{ su } 2f} 0$

2° termine: cosa vorrei fare

$$\frac{|2g(AR + 2f(R))|}{|R|} = \underbrace{\frac{|2g(AR + 2f(R))|}{|AR + 2f(R)|}}_{\substack{\downarrow \text{ per l'ipotesi} \\ \text{su } 2g}} \cdot \underbrace{\frac{|AR + 2f(R)|}{|R|}}_{\substack{\text{limitato} \\ \leq \frac{C|R| + |2f(R)|}{|R|}}}$$

L'unico problema è che potrei aver diviso per 0.

→ uscita 1: considerare la funzione $\frac{|2g(k)|}{|k|}$ estesa ponendo la 0 (o anche 15) per $k=0$

→ uscita 2: lemma della sotto-sotto. Basta dimostrare che ogni successione $R_n \rightarrow 0$ ha una s.succ. su cui il limite fa 0. (il limite del 2° termine)
D'altra parte, ogni succ. $R_n \rightarrow 0$ ha una sottosucc. su cui

- o $AR_n + 2f(R_n) \neq 0$, e allora faccio quello che ho fatto
- o $AR_n + 2f(R_n) = 0$, ma se $k=0$, allora il termine non c'è nemmeno.

Osservazione: sono le stesse uscite che c'erano ad Analisi 1.

ANALISI 2

— LEZIONE 008

Titolo nota

30/09/2015

Lemma Sia M una matrice $m \times n$. Allora esiste una costante C tale che

$$\underbrace{|Mx|}_{\mathbb{R}^m} \leq C \underbrace{|x|}_{\substack{\uparrow \\ \text{in } \mathbb{R}^n}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

stessa per tutti gli x

(altro modo di dire la stessa cosa: le applicazioni lineari sono Lipschitziane, infatti

$$|Mx - My| = |M(x-y)| \leq C|x-y|$$

Dim Caso semplice in cui $m=1$, per cui M è un vettore riga e Mx vuol dire prodotto scalare tra M ed x

$$|Mx|^2 = |\langle M, x \rangle|^2 \leq \underbrace{|M|^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{somma dei quadrati di tutti i termini}}} \cdot |x|^2$$

Nel caso generale le componenti di Mx sono i prodotti scalari tra le righe di M e x , quindi

$$|Mx|^2 = \underbrace{\langle R_1, x \rangle^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{righe di } M}} + \dots + \langle R_m, x \rangle^2$$

$$\leq |R_1|^2 \cdot |x|^2 + \dots + |R_m|^2 \cdot |x|^2$$

$$= |x|^2 \underbrace{(|R_1|^2 + \dots + |R_m|^2)}_{C^2}$$

= Somma dei \square di tutti i termini della matrice
= "norma" della matrice.

— o — o — o —

Osservazione sulla composizione

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k \quad g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \quad R = g \circ f$$

$$\frac{\partial R_j}{\partial x_i}$$

$$R_j = g_j(f_1(x), \dots, f_k(x))$$

$$= \frac{\partial g_j}{\partial y_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial g_j}{\partial y_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial g_j}{\partial y_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

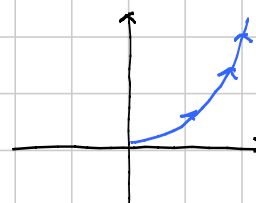
termine di posto riga j , colonna i nella matrice BA e quel termine è il prodotto scalare tra la riga j -esima di B e la colonna i -esima di A , che è proprio il RHS.

Esempio 1 $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^4$
 $t \xrightarrow{g} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$
 $\quad \quad \quad x(t) \quad y(t)$

$$\varphi(t) = f(x(t), y(t)) \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$



$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

↑
CHAIN RULE

$$f_x = 2x + 3y$$

$$f_y = 3x + 4y^3$$

$$= (2x(t) + 3y(t)) x'(t) + (3x(t) + 4y(t)^3) y'(t)$$

$$= (2t + 3t^2) \cdot 1 + (3t + 4t^6) \cdot 2t$$

Per riprova, fare il conto nell'altro modo:

$$\varphi(t) = f(x(t), y(t)) = t^2 + 3t^3 + t^8 \quad \text{e quindi}$$

$$\varphi'(t) = 2t + 9t^2 + 8t^7 \quad \text{viene lo stesso nell'altro modo.}$$

— o — o —

Esempio 2 Coordinate polari.

Descrivo una funzione in coordinate polari

$$f(p, \theta) = p^2 \cos \theta$$

Domanda: calcolare le derivate parziali rispetto a x e y

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Dall'espressione

$$\frac{\partial p}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

si calcolano dalle formule per le coordinate polari

Esempio 3 Data $f(x, y)$, trovare $\frac{\partial f}{\partial p}$ e $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ $x = p \cos \theta$
 $y = p \sin \theta$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial p} = f_x \cdot \cos \theta + f_y \sin \theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = f_x p(-\sin \theta) + f_y p \cos \theta$$

$$f_p^2 = f_x^2 \cos^2 \theta + f_y^2 \sin^2 \theta + 2 f_x f_y \cos \theta \sin \theta$$

$$f_\theta^2 = p^2 f_x^2 \sin^2 \theta + p^2 f_y^2 \cos^2 \theta - 2 p^2 f_x f_y \cos \theta \sin \theta$$

$$f_x^2 + f_y^2 = f_p^2 + \frac{1}{p^2} f_\theta^2$$

norma² del gradiente
in coordinate
cartesiane / polari

Verifica $f(x, y) = y + x^2 = p \sin \theta + p^2 \cos^2 \theta$

$$|\nabla f|^2 = f_x^2 + f_y^2 = (2x)^2 + 1 = 4x^2 + 1 = 4p^2 \cos^2 \theta + 1$$

$$|\nabla f|^2 = f_p^2 + \frac{1}{p^2} f_\theta^2 = (\sin \theta + 2p \cos^2 \theta)^2 + \frac{1}{p^2} (p \cos \theta - p^2 \cos \theta \sin \theta)^2$$

= sviluppando dovrebbe venire uguale.

— o — o —

Esercizio Come sono fatte tutte le funzioni $f(x,y)$ tali che

$$f_x(x,y) = f_y(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Esempi: $f(x,y) = \text{costante}$

$$f(x,y) = ax + ay$$

$$f(x,y) = x^2y + xy^2$$

$$f_x = 2xy + y^2 \quad f_y = x^2 + 2xy$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$f(x,y) = g(x+y)$$

$$f_x = g'(x+y) \quad f_y = g'(x+y)$$

$$g(2x+3y)$$

$$f_x = g'(2x+3y) \cdot 2$$

$$f_y = g'(2x+3y) \cdot 3$$

Congettura: sono tutte e sole le funzioni del tipo $g(x+y)$ con $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile.

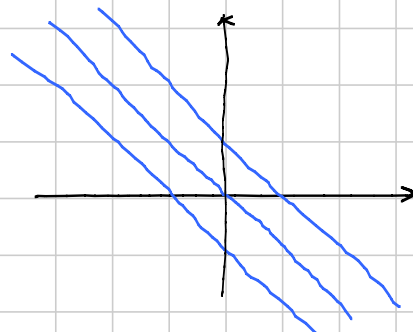
Si tratta di dimostrare che sono costanti su tutte le rette // alla $y = -x$. A quel punto pergo

$$g(x) = f(x,0) \text{ e ho che}$$

$$f(x,y) = f(x+y,0) = g(x+y)$$

f è costante sulle rette //

def. di g



Come sono fatte le rette? Sono del tipo $(t, k-t)$

Devo dim. che $\varphi(t) = f(t, k-t)$ è costante

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

CHAIN RULE

$$= f_x(t, k-t) \cdot 1 + f_y(t, k-t) \cdot (-1)$$

$$= 0 \text{ per ipotesi, quindi } \varphi(t) = \text{costante.}$$

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 009

Titolo nota

02/10/2015

Derivate successive per funzioni di più variabiliEsempio $f(x, y) = x^2 + 7x \sin y$

$$f_x(x, y) = 2x + 7 \sin y$$

$$f_y(x, y) = 7x \cos y$$

$$f_{xx}(x, y) = 2$$

$$f_{xy}(x, y) = 7 \cos y$$

$$f_{yx}(x, y) = 7 \cos y$$

$$f_{yy}(x, y) = -7x \sin y$$

$$f_{xxx}(x, y) = 0$$

$$f_{yxx}(x, y) = 0$$

$$f_{xyx}(x, y) = 0$$

$$f_{yyx}(x, y) = -7 \sin y$$

Oss. Per una funzione di 2 variabili, le possibilità per le derivate parziali k -esime sono 2^k . Per una funzione di n variabili sono n^k .

Notazione

$$f_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\partial_{xx} f$$

$$D_{xx} f$$

$$f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$$

↑
dopo prima

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\partial_{xy} f$$

$$D_{xy} f$$

Fatto generale : \rightarrow ci sono esempi in cui $f_{xy} \neq f_{yx}$

\rightarrow sotto ipotesi del tutto ragionevoli vale $f_{xy} = f_{yx}$

Corollario Sotto ipotesi ragionevoli, una qualunque derivata k -esima per una funzione di n variabili dipende solo da quante volte ho derivato rispetto ad ogni variabile, e non dall'ordine di esecuzione delle operazioni:

$$f_{xxyx} = f_{yxxx} = f_{xxxy}$$

$$f_{xxyyz} = f_{yxxxz} = f_{xzyx} = \dots$$

Conseguenza Sotto le ipotesi ragionevoli, le derivate k -esime di una funzione di 2 variabili sono $(k+1)$. Ad esempio quelle terze sono

$$f_{xxx} \quad f_{xxy} \quad f_{xyy} \quad f_{yyy}$$

Esercizio Quante sono le k -esime di una funzione di n variabili

Osservazione Basta dimostrare che $f_{xy} = f_{yx}$ per funzioni di 2 variabili per avere il risultato in generale (le altre le posso pensare fissate).

Teorema (Inversione dell'ordine di derivazione - Schwarz)

Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, sia $\delta > 0$, sia $f: \underbrace{(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)}_{R_\delta} \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

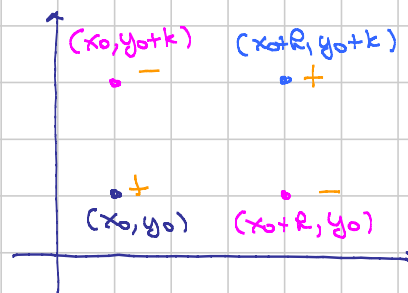
- (i) $f_{xy}(x, y)$ e $f_{yx}(x, y)$ esistono in tutto R_δ
- (ii) " " sono continue in (x_0, y_0)

Allora

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

Dim. Considero la funzione

$$g(R, k) = f(x_0 + R, y_0 + k) + f(x_0, y_0) - f(x_0 + R, y_0) - f(x_0, y_0 + k)$$



Considero anche $\varphi(t) := f(x_0 + R, t) - f(x_0, t)$

$\psi(t) := f(t, y_0 + k) - f(t, y_0)$

Allora

$$\begin{aligned} g(R, k) &= \varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0) \quad (\text{Lagrange su } \varphi(t)) \\ &= k \varphi'(y_0 + \alpha) \\ &= k [f_y(x_0 + R, y_0 + \alpha) - f_y(x_0, y_0 + \alpha)] \quad (\text{Lagrange in } x) \\ &= k R f_{xy}(x_0 + \beta, y_0 + \alpha) \end{aligned}$$

Supponendo $k > 0, R > 0$ almeno $0 < \beta < R$ e $0 < \alpha < k$

Analogamente $g(R,k) = \psi(x_0+R) - \psi(x_0)$ (Lagrange su $\psi(t)$)

$$= R \psi'(x_0+\delta)$$

$$= R [f_x(x_0+\delta, y_0+k) - f_x(x_0+\delta, y_0)] \text{ Lagr in } y$$

$$= Rk f_{yx}(x_0+\delta, y_0+\delta)$$

dove $0 < \delta < R$ e $0 < \delta < k$

Divido per Rk che sono $\neq 0$ e ho ottenuto

$$f_{xy}(x_0+\delta, y_0+\delta) = f_{yx}(x_0+\delta, y_0+\delta)$$

Ora faccio tendere $(R,k) \rightarrow (0,0)$ e uso l'ipotesi (ii) ottenendo

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0). \quad \square$$

Osservazione Non serve usare 2 parametri diversi, si può usare $k=R$.

Esempio in cui sono diverse

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Prima osservazione: è ovvio che f_{xy} e f_{yx} esistono e coincidono per ogni $(x,y) \neq (0,0)$
Nell'origine devo fare i conti diversamente.

Fatto 1 $f(x,y)$ è continua in $(0,0)$
[Moralmente è $\frac{p^4}{p^2}$]

Fatto 2 $f(x,y)$ è differenziabile in $(0,0)$ e $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$
 $f(x,y) = 0$ sugli assi

Dim. che è diff. 1° modo Uso la def. e mi riduco a far vedere che

$$f(R,k) = f(\overset{0}{\underset{0}{0}}, \overset{0}{\underset{0}{0}}) + f_x(\overset{0}{\underset{0}{0}})R + f_y(\overset{0}{\underset{0}{0}})k + o(\sqrt{R^2+k^2})$$

Basta mostrare che $f(R,k) = o(\sqrt{x^2+y^2})$, cioè che

$$\lim_{(R,k) \rightarrow 0} \frac{f(R,k)}{\sqrt{R^2+k^2}} = 0 \quad (\text{è } \frac{0}{0})$$

2° modo Calcolo $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ ovunque e dim. che sono continue in $(0,0)$ + teo. diff. tot.

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - 2x(x^3y - xy^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} = - \frac{\text{stessa cosa scambiati } x \text{ e } y}{(x^2+y^2)^2}$$

Il fatto che f_x e $f_y \rightarrow 0$ per $(x,y) \rightarrow (0,0)$ segue da $\frac{0}{0^4}$.

Fatto 3 $f_x(0,y) = -\frac{y^5}{y^4} = -y \Rightarrow f_{yx}(0,0) = -1$

$$f_y(x,0) = \frac{x^5}{x^4} = x \Rightarrow f_{xy}(0,0) = 1$$

↑ Diverse

Oss 1 Come vedere che $f_y(x,y) = -f_x(y,x)$

[Dim. osservo che $f(x,y) = -f(y,x)$, quindi

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = - \frac{\partial}{\partial y} f(y,x) = - \frac{\partial f}{\partial x}(y,x) \cdot \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}(\dots) \cdot \frac{\partial x}{\partial y} = - \frac{\partial f}{\partial x}(y,x) \cdot 1 + \dots \cdot 0 = - \frac{\partial f}{\partial x}(y,x). \quad]$$

↑ chain rule

Oss. 2 "Costruttore di controesempi a Schwarz".

Prendo una $g(x,y)$ con limiti diversi a $(0,0)$ sull'asse x e sull'asse y .

Di più

$$f(x,y) = xy g(x,y)$$

Se g non è troppo orribile funziona !!!

ANALISI 2

LEZIONE 010

Titolo nota

02/10/2015

FORMULA DI TAYLOR IN PIÙ VARIABILI

Analisi 1

$$f(x_0 + R) = \underbrace{\sum_{k \leq n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} R^k}_{\text{polinomio di Taylor di ordine } n} + r(R)$$

dove

• (Peano) $r(R) = o(R^n)$ per $R \rightarrow 0$ [Ipotesi: $n-1$ derivate nell'intorno
derivata n -esima nel punto]

• (Lagrange) $r(R) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} R^{n+1}$ con c che sta fra x_0 e $x_0 + R$
[Ipotesi: $n+1$ derivate nell'intorno]

Analisi 2

$$f(x_0 + R) = \sum_{|p| \leq n} \frac{D^p f(x_0)}{p!} R^p + r(R)$$

Sotto ci sta il formalismo dei MULTI-INDICI.

Un multiindice p è una n -upla (p_1, \dots, p_n) di naturali.

Si pone

- $|p| = p_1 + \dots + p_n$
- $p! = p_1! \cdot \dots \cdot p_n!$
- Se $R = (R_1, \dots, R_n)$ è un vettore, allora $R^p = R_1^{p_1} \cdot \dots \cdot R_n^{p_n}$
- $D^p f = \partial_{x_1}^{p_1} \cdot \dots \cdot \partial_{x_n}^{p_n} =$ derivata parziale di ordine $|p|$

Oss. Con i multiindici si scrive bene la potenza di un k -monomio

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum_{|p|=n} \frac{n!}{p!} x^p$$

↑
multiindici con k componenti

Volendo

$$x_1 + \dots + x_k = \sum_{|p|=1} x^p$$

Casi particolari del polinomio di Taylor

2 variabili, ordine 3, centro in $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$$\begin{aligned}
 f(x, y) = & f(0, 0) && \text{termine di ordine 0} \\
 & + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y && \text{termine di 1° grado} \\
 & + \frac{1}{2!} [f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2] && \text{2° grado} \\
 & + \frac{1}{3!} [f_{xxx}(\dots)x^3 + 3f_{xxy} \cdot x^2y + 3f_{xyy}xy^2 + f_{yyy}y^3] && \text{3° grado}
 \end{aligned}$$

In 2 variabili i termini di ordine k sono come aver ultrabrutalmente sviluppato

$$\frac{1}{k!} (f_x x + f_y y)^k$$

In n variabili è la stessa cosa solo con $(x_1 \partial_{x_1} + \dots + x_n \partial_{x_n})^k \frac{1}{k!}$

Forme del resto

- Alla Peano: $r(R) = o(|R|^m)$ norma [Ipotesi: deriv. parz. di ordine $m-1$ nell' intorno e di ordine m nel punto]
- Alla Lagrange: $r(R) = \sum_{|p|=m+1} \frac{D^p f(c)}{p!} R^p$

dove c è un punto nel segmento congiungente x_0 e $x_0 + R$

[Ipotesi: deriv. parziali di ordine $m+1$ nell' intorno]

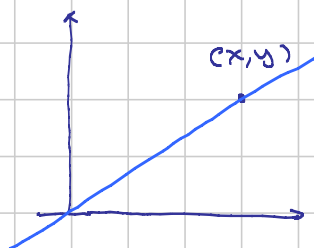
"Dim." Slogan: è un fatto uno-dimensionale !!

Per semplicità considero il caso di 2 variabili.

$f(x, y)$ e voglio sviluppare in $(0, 0)$.

Considero, fissati x e y , la funzione

$$\varphi(t) = f(tx, ty)$$



La funzione φ è derivabile tante volte quanto f e avrà un suo sviluppo di Taylor-Lagrange

$$\varphi(t) = \sum_{k \leq m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{\varphi^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} t^{m+1}$$

Ponendo $t=1$ otteniamo

$$f(x,y) = \varphi(1) = \sum_{k \leq m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}$$

Resta da capire chi sono $\varphi^{(k)}(0)$. Vediamo a mano

$$\varphi^{(0)}(0) = f(0,0)$$

$$\varphi'(t) = f_x(tx, ty)x + f_y(tx, ty)y$$

CHAIN
RULE

$$\text{quindi } \varphi'(0) = f_x(0,0)x + f_y(0,0)y$$

$$\varphi''(t) = f_{xx}(tx, ty)x^2 + f_{yx}(tx, ty)xy + f_{xy}(tx, ty)xy + f_{yy}(\dots)y^2$$

← uguali →

$$\varphi''(0) = f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2$$

e così via per gli ordini successivi.

Questo dimostra Taylor-Lagrange modulo fare per induzione la formula per $\varphi^{(k)}(t)$.

— o — o —

La dim. di Taylor Peano non si può fare allo stesso modo usando Taylor-Peano sulla $\varphi(t)$.

Ad Analisi 1 posso dim. TP usando TL.

Dim. Voglio TP di ordine n . Scrivo TL di ordine $n-1$

$$f(x_0+h) = \sum_{k \leq n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{f^{(n)}(x_0+c)}{n!} h^n$$

Se so che $f^{(n)}$ è continua in x_0 , allora posso aggiungere e togliere

$$\underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} R^n}_{\text{Termine che manca per la sommatoria}} + \boxed{\frac{f^{(n)}(x_0+c) - f^{(n)}(x_0)}{n!} R^n}$$

Termine che manca
per la sommatoria

" $O(R^n)$ " se so che $f^{(n)}(x)$ esiste in
un intorno ed è continua in x_0

Questo dimostra TP assumendo che $f^{(n)}(x)$ esista in un intorno
e sia continua in x_0 e si estende anche in più variabili.

— o — o —

Oss. Praticamente i pol. di Taylor si calcolano sfruttando quelli
in una variabile.

$f(x,y) = x \sin y + \cos(xy)$ Taylor di ordine 5

$$= x \left(y - \frac{1}{6} y^3 + \frac{1}{120} y^5 \right) + 1 - \frac{1}{2} x^2 y^2 + O((x^2+y^2)^3)$$

↑
 $|x,y|^6$
= distanza dal p.to
alla sesta.

ANALISI 2

LEZIONE 011

Titolo nota

06/10/2015

Lagrange DIREZIONALE Analisi 1: $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$

In più variabili: $\underbrace{f(b) - f(a)}_{\text{numero}} = \langle \underbrace{b-a}_{\text{vettore}}, \nabla f(\underbrace{c}_{\substack{\uparrow \\ \text{pto sul segmento di estremi} \\ a \text{ e } b}}) \rangle$

Dim. Considero la restrizione al segmento

$$\varphi(t) = f(\underbrace{a + t(b-a)}_{\text{param. del segmento}})$$

$$f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = 1 \cdot \varphi'(t_0) \quad t_0 \in (0,1)$$

ma

$$\varphi'(t) = \langle \nabla f(a + t(b-a)), b-a \rangle \quad \text{da cui la tesi.}$$

↑
CHAIN RULE

— o — o —

Conseguenza 1 Sia $f: B_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che $\nabla f = 0$ per ogni $x \in B_\delta(x_0)$. Allora $f(x)$ è costante in $B_\delta(x_0)$.

Dim. $f(x) - f(x_0) = \langle x - x_0, \underbrace{\nabla f(c)}_0 \rangle = 0$ quindi $f(x) = f(x_0)$

Conseguenza 2 Sia $f: \overline{B}_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1

↑
chiusa

(nota: si dice che $f \in C^k(A)$ se sono continue in A tutte le derivate $D^p f(x)$ con p multi-indice con $|p| \leq k$)

Allora f è Lipschitziana in $\overline{B}_\delta(x_0)$ e la costante di Lip. è

$$L = \max \{ |\nabla f(x)| : x \in \overline{B}_\delta(x_0) \}$$

Dim. $|f(b) - f(a)| = |\langle b-a, \nabla f(c) \rangle| \leq \underbrace{|b-a|}_{\substack{\uparrow \\ \text{C.S.}}} \cdot \underbrace{|\nabla f(c)|}_{\leq L}$

Questo dimostra che la costante L va bene. Bisognerebbe dimostrare che ogni costante più piccola di L non va bene.

Esercizio Se f è Dip. in un insieme A e $x_0 \in \text{Int}(A)$ e $\nabla f(x_0)$ esiste, allora $|\nabla f(x_0)| \leq L \leftarrow$ costante che compare nella def. di f Dip.

Dim. Preso un qualunque VETTORE v calcoliamo la derivata direzionale nel pto x_0

$$|\langle \nabla f(x_0), v \rangle| = \left| \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + hv) - f(x_0)|}{|h|} \leq L$$

\uparrow
 f è diff. in x_0

$$\leq \frac{|hv| \cdot L}{|h|} = L \text{ perché } |v| = 1$$

Quindi ora sappiamo che

$|\langle \nabla f(x_0), v \rangle| \leq L$ per ogni v tale che $|v| = 1$. Da questo voglio dedurre che $|\nabla f(x_0)| \leq L$.

Ci sono 2 casi:

- se $\nabla f(x_0) = 0$ non è molto difficile
- se $\nabla f(x_0) \neq 0$ uso $v = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$ (vettore che dice la direzione di $\nabla f(x_0)$) e ottengo

$$\langle \nabla f(x_0), \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|} \rangle = \frac{1}{|\nabla f(x_0)|} \langle \nabla f(x_0), \nabla f(x_0) \rangle = |\nabla f(x_0)|$$

Domanda Quanto è importante che l'insieme di definizione sia $B_r(x_0)$

Per la conseguenza 1, basta che sia un aperto CONNESSO

Enunciato: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso, sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ diff. con $\nabla f(x) = 0$ per ogni $x \in A$. Allora f è costante in A .

Dim. Prendo a caso $x_0 \in A$ e pongo

$$B = \{x \in A : f(x) = f(x_0)\} \neq \emptyset$$

Vorrei dimostrare che $B = A$. Per far questo basta dimostrare che B è contemporaneamente aperto e chiuso (rispetto ad A).

Ora

- B è chiuso perché $B = f^{-1}(\{f(x_0)\})$, cioè f^{-1} (chiuso)
- B è aperto per quello detto prima come conseguenza 1. \square

— o — o —

Oss. Si può fare una dimostrazione da analisi 1 sfruttando un lemma che dice

"Un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è connesso se e solo se è connesso per archi C^1 "

Per la conseguenza 2, esaminiamo questo enunciato:

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto (limitato). Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ diff. con

$$|\nabla f(x)| \leq L \quad \forall x \in A$$

Allora

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y| \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A.$$

F
A
L
S
O

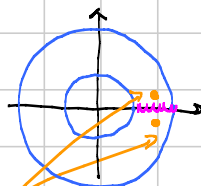
Idea: quando congiungo 2 pti x e y , la congiungente può "passare fuori".

Ovviamente posso fare il "giro lungo" e ottenere



$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot \text{lunghezza poligonale che congiunge } x \text{ e } y$$

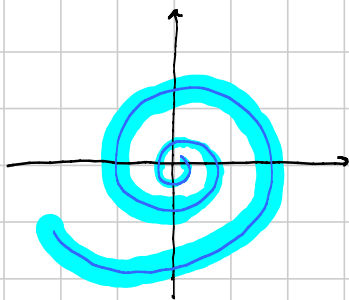
Esempio burocratico



vicini di \mathbb{R}^2 con f costante. Il fatto è che sono costanti in A .

A = corona circolare meno segmento lungo asse x

$f(x, y) = 0$ quello delle coord. polari

Esempio perverso

$A =$ intorno di una
spirale che va a
 ∞

Se la spirale ha "lunghezza infinita" allora posso considerare una funzione con $|Df| \leq 1$ che "sale lungo la spirale".

Questa non è Lip. e NEPPUR LIMITATA.

— 0 — 0 —

ANALISI 2

LEZIONE 012

Titolo nota

06/10/2015

Polinomi di Taylor in più variabili

$$f(x_0 + R) = \sum_{|p| \leq n} \frac{D^p f(x_0)}{p!} x^p + r(R)$$

- Se f ammette derivate parziali fino all'indice $n+1$ in un intorno di x_0 , allora vale la formula con resto alla Lagrange

$$r(R) = \sum_{|p|=n+1} \frac{D^p f(c)}{p!} x^p \quad \text{con } c \text{ nel segmento tra } x_0 \text{ e } x_0 + R \text{ (c'è lo stesso per tutti i } p \text{)}$$

- Se f ammette derivate parziali fino all'indice $n-1$ in un intorno di x_0 e tutte le derivate di ordine $n-1$ sono diff. in x_0 , allora vale la formula con resto alla Peano

$$r(R) = o(|R|^n) \quad \text{per } R \rightarrow 0$$

(Dimostrata alla lezione 10 supponendo però che anche le $D^p f(x_0)$ con $|p|=n$ esistessero nell'intorno come funzioni continue)

Passi della dim. del Peano vero

Lemma (esercizio) Supponiamo per una funzione di 2 variabili che f_x e f_y esistano in un intorno di (x_0, y_0) e siano diff. in (x_0, y_0) . Allora $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

Dal Lemma segue che nelle ipotesi di Taylor Peano le derivate con $|p|=n$ non dipendono dall'ordine di esecuzione, quindi per lo meno posso scrivere il polinomio di Taylor di ordine n .

Lemma 2 (Esercizio) Il polinomio di Taylor dato dalla formula ha la proprietà che le sue derivate in 0 coincidono con quelle di f in x_0 fino all'ordine n .

[Serve che $D^q x^p$ calcolata in $x=0$ vale 0 se $q \neq p$ e vale $p!$ se $q=p$].

Ora procedo come ad Analisi 1: considero $\varphi(x) = f(x) - \text{polinomio}$
o meglio $\varphi(h) = f(x_0+h) - \text{polinomio}$
e abbiamo che φ ha tutte le derivate nulle fino all'ordine n .

Lemma finale Se $\varphi(x)$ ha tutte le derivate nulle fino all'ordine n , allora $\varphi(x) = o(|x|^n)$ per $x \rightarrow 0$

(occhio: tutte le derivate fino all'ordine $n-1$ esistono in un intorno di 0 e quelle di ordine $n-1$ sono diff. in $x=0$).

Dim. Si fa per induzione!

$n=0$ è banale

$n=1$ è la definizione di differenziale

Facciamo il passaggio induttivo da $(n-1)$ a n .

Prendo f come nelle ipotesi e applico il passo induttivo a tutte le sue derivate parziali prime. Ne deduco che

$$D^p f(x) = o(|x|^{n-1}) \quad \text{per ogni } |p|=1$$

Da cui segue che

$$|\nabla f(x)| = o(|x|^{n-1}) = |x|^{n-1} \omega(x)$$

Ora applico Lagrange direzionale:

$$\underbrace{|f(x) - f(0)|}_0 = |\langle \nabla f(c), x \rangle| \leq |\nabla f(c)| \cdot |x| = \underbrace{|x| \cdot |c|^{n-1}}_{\leq |x|^n} \underbrace{|\omega(c)|}_{\substack{\downarrow \\ \text{nel senso} \\ \text{di } \mathbb{R}^n}}$$

e questo chiude la dimostrazione.

RIPASSO SULLE FORME QUADRATICHE

Def. Una forma quadratica in n variabili è una somma di monomi di 2° grado nelle n variabili

$$q(x) = \sum_{|q|=2} a_q x^q = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

↑
coeff.

Esempio In 3 variabili $q(x, y, z) = x^2 - 7z^2 + 5xy + 3yz$

Def. Una forma quadratica si dice

- definita positiva se $q(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$
- semidefinita positiva se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$
- def. neg. $q(x) < 0$
- semidef. neg. $q(x) \leq 0$
- indefinita se non è nessuno dei precedenti, cioè
 $\exists x \in \mathbb{R}^n \quad q(x) > 0 \quad \exists y \in \mathbb{R}^n \quad q(y) < 0.$

Segnatura Ad ogni forma quadratica è associata una terna di interi (m_0, m_+, m_-) o (i_0, i_+, i_-) con $i_0 + i_+ + i_- = n$ detti segnatura della forma.

Da questi si deduce in quali casi ci troviamo

La forma è

- def. positiva $\Leftrightarrow i_0 = i_- = 0$ e $i_+ = n$
- " negativa $\Leftrightarrow i_0 = i_+ = 0$ e $i_- = n$
- semidef. pos. $\Leftrightarrow i_- = 0$
- " neg. $\Leftrightarrow i_+ = 0$
- indefinite $\Leftrightarrow i_+ > 0$ e $i_- > 0.$

Def. "vera" di segnatura

$i_0 = \dim \ker M = \dim$ insieme dei vettori ortogonali a tutti gli
altri

$i_+ = \max$ dimensione di un sottospazio W su cui $q(x)$ è def. pos.

$i_- =$ " " " " " " " " " " neg.

— o — o —

ANALISI 2

—

LEZIONE 013

Titolo nota

07/10/2015

Anetrati sulle forme quadraticheTecnica di completamento dei quadratiEsempi $q(x,y) = x^2 + 4y^2 + 3xy$ voglio la segnatura

$$= x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3y}{2} + \frac{9}{4}y^2 - \frac{9}{4}y^2 + 4y^2$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 + \frac{7}{4}y^2$$

somma di 2 quadrati \Rightarrow
segnatura è ++

$$q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3xy + z^2 + 4xz$$

$$= x^2 + 2x \cdot \frac{3}{2}y + 2 \cdot x \cdot 2z + \frac{9}{4}y^2 - \frac{9}{4}y^2 + 4z^2 - 4z^2$$

$$+ 2 \cdot \frac{3}{2}y \cdot 2z - 2 \cdot \frac{3}{2}y \cdot 2z + 2y^2 + z^2$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}y + 2z\right)^2 + \text{roba in } y \text{ e } z \text{ che tratto come sopra}$$

$$= \text{supponiamo } (\dots)^2 + (\dots)^2 - (\dots)^2 \quad ++-$$

Sylvester border lineEsempio

+ 0 ⊖

segnatura può essere solo --- opp. +-
 compatibile con
 il primo segno +

- + 0 - + 0

Quasi subito so che $i_0 = 1$ +++++ \rightarrow NO

+ ---

+++ -

impossibile perché
 i primi 2 sono --

++++-
 +++--
 +---+
 ↑

Lemma fondamentale Sia $q(x)$ una forma quadratica (su n variabili).
 Supponiamo che q sia definita positiva.
 Allora esiste una costante $m > 0$ tale che

$$q(x) \geq m |x|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

↑
più piccolo autovalore

Dim. Sia A la matrice associata alla forma, cioè $q(x) = \langle Ax, x \rangle$
 Ora la matrice A è simmetrica, quindi per il teorema spettrale è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale, cioè

$$M^{-1} A M = D \leftarrow \text{sulla diag. gli autovalori}$$

M^T

Ma allora

$$q(x) = x^T A x = x^T M^T D M x = (Mx)^T D (Mx) \geq m |Mx|^2 = m |x|^2$$

da dimostrare
↓
↑
 M è ortogo..

Resta da dimostrare che per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ vale la disug.

$$(Mx)^T Mx = x^T \underbrace{M^T M}_{I_d} x = |x|^2$$

$$v^T D v \geq m |v|^2$$

||

$$v = (v_1, \dots, v_n)$$

$$\sum \lambda_i v_i^2 \geq m \sum v_i^2$$

↑
min. dei λ_i

— o — o —

Risultato analogo Se q è una forma quadratica, allora esiste $M > 0$ t.c.

$$q(x) \leq M |x|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

↑
più grande autovalore

— o — o —

MATRICE HESSIANA

Matrice che ha come elementi le derivate parziali seconde

$$\{Hf(x_0)\}_{ij} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Schwarz \Rightarrow sotto ipotesi decenti è una matrice simmetrica.

Per semplicità prendiamo $f(x, y)$ e scriviamo Taylor di ordine 2 in $(0, 0)$

$$f(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y$$

ordine 0 \rightsquigarrow funzione
ordine 1 \rightsquigarrow gradiente

$$+ \frac{1}{2} [f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2]$$

ordine 2
Forma quadratica associata alla matrice $Hf(0, 0)$

$$+ o(x^2 + y^2)$$

In generale per n variabili con centro in x_0 qualunque possiamo scrivere

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), R \rangle + \frac{1}{2} R^T Hf(x_0) R + o(|R|^2)$$

Forma quadratica

Def. Il p.to x_0 si dice stazionario se $\nabla f(x_0) = 0$

Geometricamente: in 2 variabili vuol dire piano tangente // piano xy

Equazione in generale del piano tangente al grafico di $f(x, y)$ nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Studio Locale vicino ad un p.to stazionario

Teorema Sia f una funzione C^2 in un intorno di x_0 (e volendo si può risparmiare).

Supponiamo che $\nabla f(x_0) = 0$

Allora

- se $Hf(x_0)$ è def. pos., x_0 è p.to di min. locale (cioè esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$)
- se $Hf(x_0)$ è def. neg., x_0 è p.to di max. loc.
- se $Hf(x_0)$ è indefinito, x_0 non è né max. loc., né min. loc.
- se $Hf(x_0)$ è semidef. (pos. o neg.) SONO GUAI SERI.

Achtung! $Hf(x_0)$ semidef. pos. \nRightarrow minimo locale

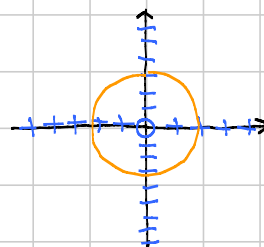
Esempio 1 $f(x, y) = x^2 + y^4$ $(0, 0)$
 $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{\geq 0} \quad \text{semidef. pos.}$$

$(0, 0)$ è p.to di min. globale ($\forall (x, y) \neq (0, 0)$ vale $f(x, y) > 0$)

Esempio 2 $f(x, y) = x^2 - y^4$ $(0, 0)$ ∇f e Hf non cambiano

$(0, 0)$ non è né p.to di max, né p.to di min locale



ANALISI 2

—

LEZIONE 014

Titolo nota

07/10/2015

Sia x_0 un p.to stazionario ($\nabla f(x_0) = 0$)

① $Hf(x_0) > 0$ (def. pos.) $\Rightarrow x_0$ p.to di min. locale

Dim. Taylor-Peano $f(x_0 + R) = f(x_0) + \frac{1}{2}q(R) + o(|R|^2)$

\uparrow
 forma quadratica
 associata ad $Hf(x_0)$

$$= f(x_0) + \frac{1}{2}q(R) + |R|^2 \omega(R)$$

Ma allora per il Lemma fondamentale esiste $m > 0$ t.c.

$$f(x_0 + R) - f(x_0) = \frac{1}{2}q(R) + |R|^2 \omega(R)$$

$$\geq \frac{m}{2}|R|^2 + |R|^2 \omega(R) = |R|^2 \left(\frac{m}{2} + \omega(R) \right)$$

\uparrow
 $\geq \frac{m}{4}$ in un opportuno $B_\delta(x_0)$

Questo dim. che $f(x_0 + R) - f(x_0) \geq 0$ in $B_\delta(x_0)$
 con disug. stretto se $R \neq 0$.

② $Hf(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ p.to di max. locale

Dim. Stessa cosa, solo che nel p.to chiave $q(x) \leq -m|x|^2$

③ $Hf(x_0)$ indefinita $\Rightarrow x_0$ non è né max, né min.

Dim. Essendo indefinita, vuol dire che

$$\exists v \in \mathbb{R}^n: q(v) > 0$$

$$\exists w \in \mathbb{R}^n: q(w) < 0$$

$$\varphi(t) = f(x_0 + \underbrace{tv}_v) = f(x_0) + \frac{1}{2} q(tv) + |tv|^2 \omega(tv)$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{2} t^2 q(v) + t^2 |v|^2 \omega(tv)$$

$$= f(x_0) + t^2 \left(\overbrace{\frac{1}{2} q(v)}^{>0} + \overbrace{|v|^2 \omega(tv)}^{>0} \right)$$

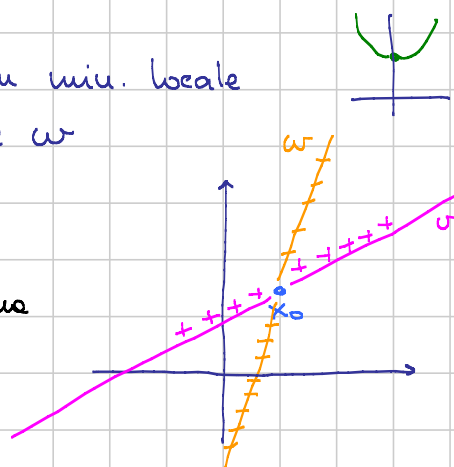
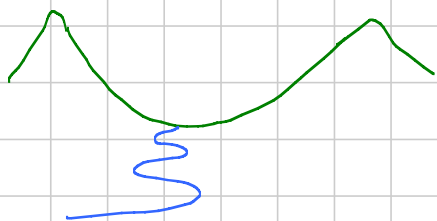
$$\geq f(x_0) + t^2 \frac{1}{4} q(v) \quad \text{se } t \text{ è vicino a } 0.$$

Muovendosi lungo la direzione v vedo un min. locale

Con un conto analogo lungo la direzione w vedo un max.

— o — o —

Geometricamente x_0 è quello che si chiama
p.to di sella o mountain pass



Esercizio 1 Determinare i p.ti stazionari della funzione

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - xy$$

e capire di che tipo sono.

$$\nabla f(x, y) = 0 \quad \begin{cases} 4x^3 - y = 0 \\ 4y^3 - x = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} y &= 4x^3 \\ 4^4 x^9 - x &= 0 & x(2^8 x^8 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$x=0 \rightsquigarrow y=0 \rightsquigarrow (0,0)$$

$$x = \pm \frac{1}{2} \rightsquigarrow y = \pm \frac{1}{2} \text{ con lo stesso segno} \rightsquigarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Per capire cosa sono posso fare l' Hf = $\begin{pmatrix} 12x^2 & -1 \\ -1 & 12y^2 \end{pmatrix}$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Det} = -1 \quad \text{segnatura } +- \Rightarrow \text{sella}$$

$$Hf\left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{segnatura } ++ \Rightarrow \text{p.ti di min.}$$

HARD-HARD Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Supponiamo che abbia almeno due p.ti di min. locale

→ c'è per forza un p.to di max?

→ c'è per forza un altro stazionario?



HARD-HARD-HARD Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x, y_0) = +\infty \quad \forall y_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(x_0, y) = -\infty \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Esiste per forza un p.to stazionario?

— 0 — 0 —

Esercizio 1 $f(x, y) = x^2 + y^4 + xy^2$

L'origine è un p.to stazionario. Di che tipo?

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi BOH !!!

Completiamo i quadrati: $x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{4}y^4 + y^4$

$$= \left(x + \frac{1}{2}y^2\right)^2 + \frac{3}{4}y^4 > 0 \quad \text{se } (x, y) \neq (0, 0)$$

⇒ (0,0) è p.to di minimo assoluto

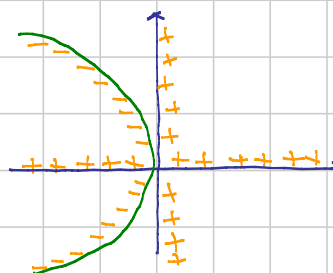
Esercizio 2 $f(x, y) = x^2 + y^4 + 3xy^2$

Come prima: $\left(x + \frac{3}{2}y^2\right)^2 - \frac{5}{4}y^4$. Faccio in modo che la prima parentesi sia nulla

$f\left(-\frac{3}{2}t^2, t\right) = -\frac{5}{4}t^4$, quindi vicino a (0,0) ci sono p.ti in cui $f(x, y) < 0$

Alternativa: cambio di variabili

$$z = y^2$$



Esercizio 3 $f(x,y) = x \sin y - y \sin x + x^3 y^2$ $(0,0)$ è stazionario
Sviluppo di Taylor

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x \left(y - \frac{1}{3!} y^3 + o(y^3) \right) - y \left(x - \frac{1}{3!} x^3 + o(x^3) \right) \\ &= \cancel{xy} - \frac{1}{6} xy^3 - \cancel{xy} + \frac{1}{6} x^3 y + o\left((x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}\right) \\ &\quad \text{i termini buttati sono di grado } \geq 6 \\ &= \frac{1}{6} xy(x^2 - y^2) + o(\rho^5) \\ &\quad \text{segno variabile, quindi forse non è max/min} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t, 2t) &= t \sin(2t) - 2t \sin t + o(t^5) \\ &= t \left(2t - \frac{1}{6} 8t^3 \right) - 2t \left(t - \frac{1}{6} t^3 \right) + o(t^5) \\ &= -\frac{4}{3} t^4 + \frac{1}{3} t^4 + o(t^5) = -t^4 + o(t^5) \leadsto \text{max} \end{aligned}$$

$$f(2t, t) \leadsto \text{vedo un minimo.} \quad \text{Oss. } H^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quanto fa $f_{xxxxxyyxx}(0,0) = 0$

↓
comparo nel Taylor davanti $x^3 y^4$ e questo termine nel Taylor "non c'è"

— 0 — 0 —

ANALISI 2 — LEZIONE 015

Titolo nota

09/10/2015

Max e min per funzioni di più variabiliTeorema Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora i seguenti fatti sono equivalenti.

- (i) K è LIMITATO + CHIUSO,
- (ii) K è compatto per successioni,
- (iii) K è compatto per ricoprimenti.

Def. Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice

- CHIUSO se coincide con la sua chiusura (opp. complementare aperto)
- LIMITATO se $\exists R > 0$ t.c. $K \subseteq B_R(0)$ (o equivalentemente $K \subseteq B_R(x_0)$ per un qualche centro x_0)
- COMPATTO PER SUCCESSIONI se per ogni $\{x_n\} \subseteq K$ esiste $n_k \rightarrow +\infty$ ed esiste $x_\infty \in K$ t.c. $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$
 \uparrow
 limite in \mathbb{R}^n
- COMPATTO PER RICOPRIMENTI se per ogni $\{U_i\}_{i \in I}$ aperti di \mathbb{R}^n t.c. $K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ esiste $J \subseteq I$ finito t.c.

$$K \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$$

(ogni ricoprimento ammette s.ric. finito)

Def. $K \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice COMPATTO se verifica una delle 3 equiv.Dim. $(i) \Rightarrow (ii)$ Per semplicità partiamo in \mathbb{R}^2 .Prendiamo $K \subseteq \mathbb{R}^2$ lim. + chiuso, sia $\{v_n\} \subseteq K$ una succ.
 $v_n = (x_n, y_n)$.Passo 1 : essendo K limitato, $|v_n| \leq R$ per un certo raggio R .Ma allora $|x_n| \leq R$ e $|y_n| \leq R$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n| = \sqrt{x_n^2} \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \leq R$$

Passo 2 Per Bolzano - Weierstrass in una dimensione, $\{x_n\}$ ammette una s.succ. convergente

$$x_{n_k} \rightarrow x_\infty$$

Passo 3 Considero ora la successione $\{y_{n_k}\}$. Questa per B-W ammette una sottosucc. a sua volta convergente

$$y_{n_{k_i}} \rightarrow y_\infty$$

Questo garantisce anche che $x_{n_{k_i}} \rightarrow x_\infty$

Passo 4 Sono riuscito a far convergere le componenti

$$\begin{array}{ccc} \text{lim. in } \mathbb{R} & & \\ \downarrow & & \\ y_{n_{k_i}} & \rightarrow & y_\infty \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{lim. in } \mathbb{R} & & \\ \downarrow & & \\ x_{n_{k_i}} & \rightarrow & x_\infty \end{array}$$

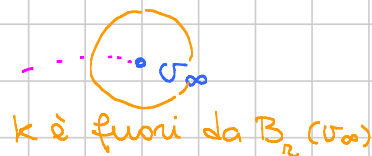
Dico che $(x_{n_{k_i}}, y_{n_{k_i}}) \xrightarrow[\text{lim. in } \mathbb{R}^2]{\quad} (x_\infty, y_\infty) = v_\infty$

Basta verificare che

$$|v_{n_{k_i}} - v_\infty| = \left(\underbrace{|x_{n_{k_i}} - x_\infty|^2}_0 + \underbrace{|y_{n_{k_i}} - y_\infty|^2}_0 \right)^{1/2} \rightarrow 0$$

Passo 5 Resta da dimostrare che $v_\infty \in K$. Questo segue banalmente dalla chiusura di K .

[Se $v_\infty \notin K$, essendo il complen. aperto ... definitivamente la succ. sarebbe fuori da K].



— o — o —

Dim (ii) \Rightarrow (i) Per assurdo

Questa non può avere s. succ. convergenti

$$v_n \in B_{\frac{1}{3}}(v_\infty)$$

TEOREMA DI WEIERSTRASS Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) D compatto,

(ii) \neq continua.

$$\max \{ f(x) : x \in D \}$$

$$\min \{ f(x) : x \in D \}$$

(i) D compatto

(ii) \nexists SCI (semicontinua inf.)

(semicontinua sup)

(esiste max).

Dim. Direttamente in versione SCI. Di siano esiste

$$I := \sup \{f(x) : x \in D\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Per definizione di \inf e il solito lemma, I è il limite di una successione di valori nell'immagine, quindi

$$\exists \{x_m\} \subseteq D \quad \text{t.c.} \quad f(x_m) \rightarrow I$$

\uparrow
succ. minimizzante

Per la compattezza per succ. di D esiste $x_{m_k} \rightarrow x_\infty \in D$.

Per la SCI di $f(x)$ avremo che

$$I \leq f(x_\infty) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_{m_k}) = \lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m) = I$$

\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow
 I è \inf . f SCI \uparrow se $f(x_m)$ ha lim., allora tutte le s.succ. hanno lo stesso limite \uparrow succ. min.

Essendo $LHS = RHS$, in mezzo sono tutte uguali, quindi
 $f(x_\infty) = I$

Quindi da ora $I \in \mathbb{R}$ ed è il minimo, mentre x_∞ è un p.to di minimo. \square

— o — o —

Corollario Una funzione continua su un compatto è per forza LIMITATA

— o — o —

Operativamente, dove cerco i p.ti di max/min una volta che so che esistono?

Nelle solite 3 categorie

(1) Stazionari interni : p.ti $x \in \text{Int}(D)$ t.c. $\nabla f(x) = 0$

(2) Singolari interni : p.ti $x \in \text{Int}(D)$ t.c. $\nabla f(x)$ non esiste
 \uparrow
 non esiste almeno una delle derivate parziali

(3) Bordo : $x \in \partial D$
 \uparrow in generale questo è complicato

Dim. Sia x_0 un pto di max / min per $f(x)$ in D .

Allora abbiamo 3 casi:

- se $x_0 \in \partial D$ siamo in (3)
- se $x_0 \in \text{Int}(D)$ e $\nabla f(x_0)$ N.E. siamo in (2)
- se $x_0 \in \text{Int}(D)$ e $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ esistono tutte, devo dim. che sono nulle.

Considero la funzione $\varphi_i(t) = f(x_0 + t e_i)$

È definita almeno in un intorno \uparrow -esimo vett. base canonica

di $t=0$ (perché $x_0 \in \text{Int}(D)$) e ha max / min per $t=0$, quindi

$\varphi_i'(0)$ (se esiste) deve fare 0

" \leftarrow defin. di derivata parziale
 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$

— 0 — 0 —

ANALISI 2 —

LEZIONE 016

Titolo nota

09/10/2015

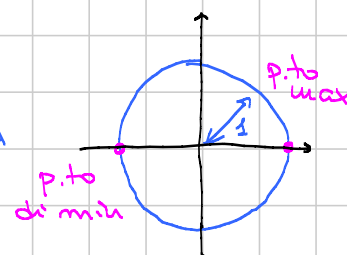
Come trovare max/min di una funzione su un compatto

- ① Vedere a occhio
- ② Metodo delle linee di livello
- ③ Procedura standard cercando
 - stas. interni
 - singolari interni
 - Bordo, per il quale esistono 2 tecniche
 - PARAMETRIZZAZIONE
 - MULTIPLICATORI DI LAGRANGE

Esempio 1

$$\max \{ \underbrace{x}_{f(x,y)} : \underbrace{x^2 + y^2 \leq 1}_{\text{description dell'insieme } A \text{ dove } \hat{=} \text{ def. } f(x,y)} \} = 1$$

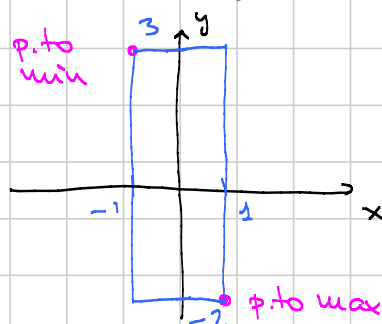
$$\min \{ \dots \} = -1$$



Esempio 2 $\max / \min \{ 3x - 5y : (x,y) \in [-1,1] \times [-2,3] \}$

$$\max = 13 \quad \text{p.to di max } (1, -2)$$

$$\min = -18 \quad \text{p.to di min } (-1, 3)$$



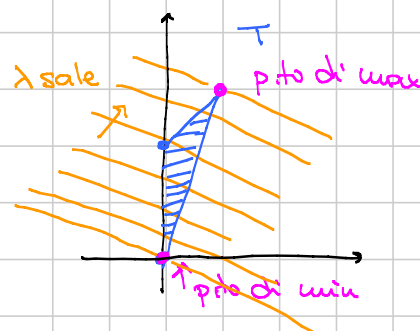
Esempio 3 $\max / \min \{ x + 2y : (x,y) \in T \}$

T è il triangolo con vertici in $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,3)$

Con le linee di livello: disegno delle linee di livello della funzione

$$f(x,y) = \lambda$$

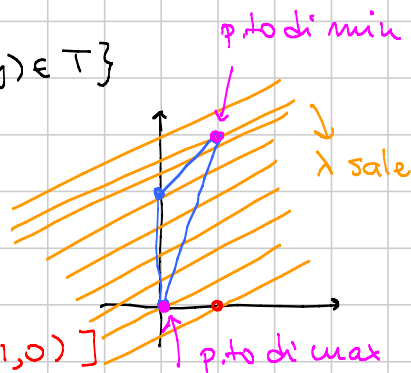
$$x + 2y = \lambda \quad y = -\frac{x}{2} + \frac{\lambda}{2}$$



I pti di max / min sono le intersezioni di T corrispondenti ai valori di λ max / min.

Esempio 3-bis max / min $\{x - 2y : (x, y) \in T\}$

Con ragionamento ad occhio non si arriva alla risposta

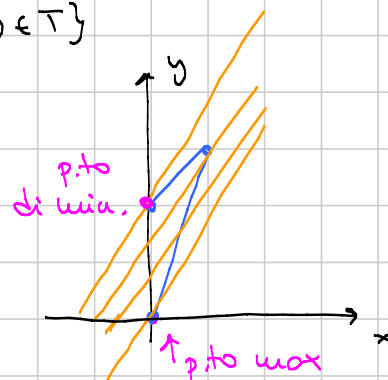


[Achtung! Non posso dire che per il max uso x più grande e y più piccolo, quindi $(1,0)$]

Scrivo le linee di livello: $x - 2y = \lambda$, $y = \frac{x}{2} - \frac{\lambda}{2}$

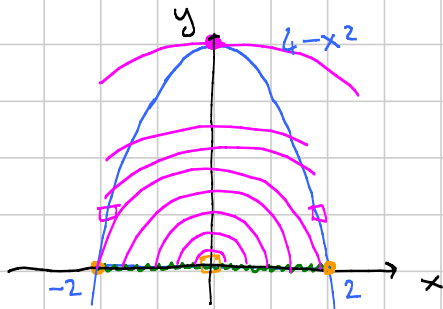
Esempio 3-ter max / min $\{x - \frac{1}{2}y : (x, y) \in T\}$

Linee di livello $x - \frac{1}{2}y = \lambda$ $y = 2x - 2\lambda$



Esempio 4 max / min $\{x^2 + y^2 : (x, y) \in A\}$

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$



Il minimo si vede a occhio

min = 0 p.to di min = $(0,0)$

max = 16 p.to di max = $(0,4)$

↑ ma non è dim. per bene

Seguiamo la procedura:

→ Staz. interni: \emptyset $2x = 0, 2y = 0$ $(0,0)$ non è interno

→ Sing. interni: \emptyset

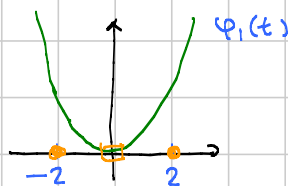
→ Bordo, che è fatto da 2 pezzi

Pezzo ① = $\{(t, 0) : t \in [-2, 2]\}$

Pezzo ② = $\{(t, 4 - t^2) : t \in [-2, 2]\}$

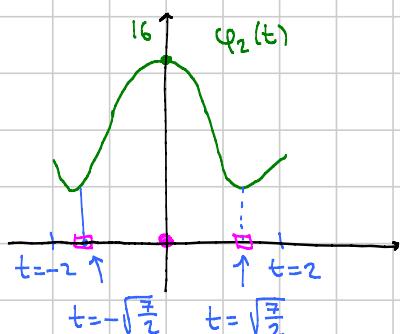
Parametrizzo la funzione sul bordo

$$\varphi_1(t) = f(t, 0) = t^2$$



max per $t = \pm 2$ che corrisponde a $(x, y) = \begin{matrix} \nearrow (-2, 0) \\ \searrow (2, 0) \end{matrix}$
 min per $t = 0$ che corrisponde a $(0, 0)$

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) = f(t, 4-t^2) &= t^2 + (4-t^2)^2 = t^2 + 16 - 8t^2 + t^4 \\ &= t^4 - 7t^2 + 16 \quad t \in [-2, 2] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \varphi_2'(t) &= 4t^3 - 14t = 0 \\ \text{per } t=0 \text{ e } t^2 &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Nel pezzo 2 abbiamo

max per $t=0 \rightsquigarrow$ corrisponde a $(0, 4)$

min per $t = \pm \sqrt{\frac{7}{2}} \rightsquigarrow$ corrisponde
 a $(\pm \sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{1}{2})$

Alla fine ho ottenuto 6 punti candidati

$$(\pm 2, 0)$$

$$(0, 0)$$

$$(\pm \sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{1}{2})$$

$$(0, 4)$$

Li sostituisco tutti nella funzione e
 confronto i valori: dove vale di + è il max
 " " " - è il min.

Esempio 4-bis

$$\max / \min \{ x^2 + y^2 : \underbrace{x \in [-2, 2], y = 4 - x^2}_{A} \}$$

solo pezzo di parabola

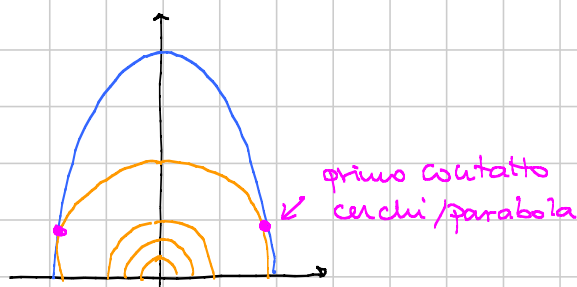
In questo caso la risposta è

la $\varphi_2(t)$ di prima, da cui

$$\max = 16 \quad \text{p.to di max} = (0, 4)$$

$$\min = \frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 16 \quad \text{p.to di min} = (\pm \sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{1}{2})$$

In termini di linee
di livello



Strategie di parametrizzazione. Come parametrizzo in \mathbb{R}^2

- segmento di estremi (a_1, b_1) e (a_2, b_2)

$$\{(a_1 + t(a_2 - a_1), b_1 + t(b_2 - b_1)) : t \in [0, 1]\}$$

- tratto della curva $y = f(x)$ con $x \in [a, b]$

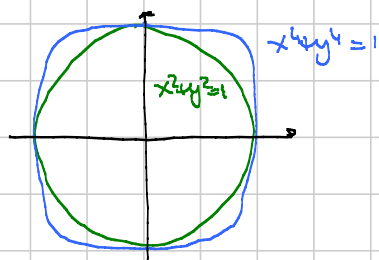
$$\{(t, f(t)) : t \in [a, b]\}$$

- circonferenza di centro (a, b) e raggio r :

$$\{(a + r \cos t, b + r \sin t) : t \in [0, 2\pi]\}$$

- ellisse $ax^2 + by^2 = 1$ $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{b}} \sin t \right) : t \in [0, 2\pi] \right\}$

- $x^4 + y^4 = 1$



Due pezzi: $\{(t, \sqrt[4]{1-t^4}) : t \in [-1, 1]\}$ (parte alta)

$\{(t, -\sqrt[4]{1-t^4}) : t \in [-1, 1]\}$ (parte bassa)

ANALISI 2

LEZIONE 017

Titolo nota

13/10/2015

Esercizio 1 Consideriamo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|^2$.
Scrivere $\nabla f(x_0)$ e $Hf(x_0)$.

$$\begin{aligned} f(x_0 + R) &= |x_0 + R|^2 = |x_0|^2 + |R|^2 + 2\langle x_0, R \rangle \\ &= |x_0|^2 + \underbrace{\langle 2x_0, R \rangle}_{f'(x_0)} + \langle R, R \rangle \\ &= f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), R \rangle + \frac{1}{2} \langle H(x_0)R, R \rangle \end{aligned}$$

da cui $\nabla f(x_0) = 2x_0$, $Hf(x_0) = 2\text{Id}$.

Allo stesso risultato si arrivava "facendo le derivate".

Variante $g(x) = |x|^4$ Voglio calcolare $\nabla g(x_0)$

Osservo che $g(x) = [f(x)]^2$, quindi per la CHAIN RULE

$$\nabla g(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{numero}}}{2f(x)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vettore}}}{\nabla f(x)} = 2|x|^2 \cdot 2x = 4|x|^2 x$$

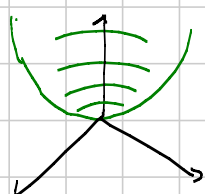
Altra variante $R(x) = |x|$

$$R(x) = \sqrt{f(x)} \quad \nabla R(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \nabla f(x) = \frac{1}{2|x|} \cdot 2x = \frac{x}{|x|}$$

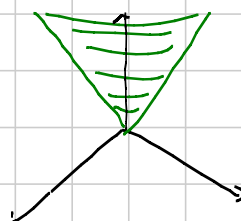
per $x \neq 0$. Se $x=0$, allora $\nabla R(x)$ non esiste, e non esistono nemmeno le derivate parziali.

$$\frac{\partial R}{\partial x_i}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(0 + t e_i) - R(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t} \quad \text{diverso per } t \rightarrow 0^+ \text{ e } t \rightarrow 0^-$$

In \mathbb{R}^2



$|x|^2$



$|x|$

Esercizio 2 Sia M una matrice $n \times n$, non necess. simmetrica
Consideriamo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \langle Mx, x \rangle$$

Calcolane $\nabla f(x_0)$ e $Hf(x_0)$

$$\begin{aligned} f(x_0 + R) &= \langle M(x_0 + R), x_0 + R \rangle \\ &= \langle Mx_0 + MR, x_0 + R \rangle \\ &= \underbrace{\langle Mx_0, x_0 \rangle}_{f(x_0)} + \underbrace{\langle Mx_0, R \rangle + \langle MR, x_0 \rangle}_{\langle \nabla f(x_0), R \rangle} + \underbrace{\langle MR, R \rangle}_{\frac{1}{2} \langle Hf(x_0) R, R \rangle} \end{aligned}$$

Conclusione SBAGLIATA: $Hf(x_0) = 2M$, a meno che M non sia simmetrica.

Osservo che

$$\langle MR, x_0 \rangle = \langle R, M^T x_0 \rangle = \langle M^T x_0, R \rangle$$

e pertanto

$$\begin{aligned} \langle Mx_0, R \rangle + \langle MR, x_0 \rangle &= \langle Mx_0, R \rangle + \langle M^T x_0, R \rangle \\ &= \langle (M + M^T) x_0, R \rangle \end{aligned}$$

e quindi

$$\nabla f(x_0) = (M + M^T) x_0 \quad (\text{compatibile con esercizio 1 su cui } M = \text{Id})$$

Per l'Hessiano osserviamo che

$$\begin{aligned} \langle Hf(x_0) R, R \rangle &= \langle 2MR, R \rangle = \langle MR, R \rangle + \langle MR, R \rangle \\ &= \langle MR, R \rangle + \langle R, M^T R \rangle \\ &= \langle MR, R \rangle + \langle M^T R, R \rangle \\ &= \langle (M + M^T) R, R \rangle \end{aligned}$$

da cui

$$Hf(x_0) = \underbrace{M + M^T}_{\text{matrice simm.}} \quad (\text{compatib. con Esercizio 1})$$

Oss. (esercizio di algebra lineare)

Data una matrice M esiste un'unica matrice simmetrica A t.c.
 $\underbrace{\langle Mx, x \rangle}_{=0} = \underbrace{\langle Ax, x \rangle}_{=0}$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Esercizio 3 (Equazione delle onde)

Caratterizzare tutte le funzioni $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 t.c.

$$u_{tt}(t, x) = u_{xx}(t, x) \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

Sottoesercizio 3.1 Caratt. $f \in C^1(\mathbb{R}^2) : f_x(x, y) = 0$

Sono tutte e sole le funzioni del tipo $f(x, y) = \psi(y)$.

Pongo $\psi(y) = f(0, y)$ e osservo che

$$f(x, y) - f(0, y) = x \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lagrange in } x}}{f_x(c, y)} = 0 \Rightarrow f(x, y) = \psi(y)$$

Sottoesercizio 3.2 Caratt. $f \in C^2(\mathbb{R}^2) : f_{xy}(x, y) = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x} [f_y(x, y)] = 0 \Rightarrow f_y(x, y) = \psi(y)$$

$$\Rightarrow f(x, y) = \overset{y}{\int} \psi(s) ds + \varphi(x) \quad \uparrow \text{ primitiva di } \psi(y)$$

$$f(x, y) = f(x, 0) + \int_0^y f_y(x, s) ds$$

$$\varphi(x) + \int_0^y \psi(s) ds = \varphi(x) + \Psi(y)$$

Le funzioni che risolvono $f_{xy}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
 sono tutte e sole quelle del tipo

$$f(x, y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

Back to esercizio 3.

Considero la funzione $g(\xi, \eta) = f(\overbrace{\xi+\eta}^t, \overbrace{\xi-\eta}^x)$

Vado a calcolare con la CHAIN RULE le derivate di g :

$$g_\xi = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} = f_t(\xi+\eta, \xi-\eta) \cdot 1 + f_x(\dots) \cdot 1$$

$$g_\eta = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} = f_t(\dots) \cdot 1 + f_x(\dots) \cdot (-1)$$

$$g_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \underbrace{f_{tt}(\dots) \cdot 1}_{\text{la somma viene 0 per ipotesi}} + \cancel{f_{tx}(\dots) \cdot (-1)} + \cancel{f_{xt}(\dots) \cdot 1} + \underbrace{f_{xx}(\dots) \cdot (-1)}$$

la somma viene 0 per ipotesi

Ma allora

$$g_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0 \quad \forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$$

quindi

$$g(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

Data g , posso ricostruire f , basta risolvere

$$\begin{cases} \xi + \eta = t \\ \xi - \eta = x \end{cases} \quad 2\xi = t + x \quad \xi = \frac{t+x}{2} \quad \eta = \frac{t-x}{2}$$

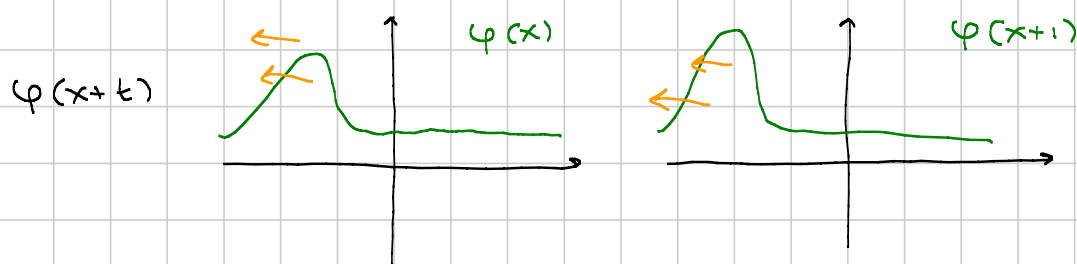
da cui

$$f(t, x) = g\left(\frac{t+x}{2}, \frac{t-x}{2}\right) = \varphi\left(\frac{t+x}{2}\right) + \psi\left(\frac{t-x}{2}\right)$$

Cambiando φ e ψ posso scriverla nella forma

$$f(t, x) = \varphi(x+t) + \psi(x-t)$$

TRAVELING WAVES



Ogni sol. dell'eq. delle onde è somma di 2 traveling waves che vanno in direzione opposta

Variante Trovare tutte le soluzioni di

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{con } c \text{ parametro } > 0.$$

ANALISI 2

LEZIONE 018

Titolo nota

14/10/2015

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Metodo per trovare candidati p.ti di max/min di una funzione data su un insieme descritto come luogo di zeri

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice luogo di zeri di ϕ l'insieme

$$V := \{x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\phi(x) = 0}_{\text{Equazione di } V}\}$$

Def. Siano $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$. Siano $f: B_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ e $\phi: B_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$.

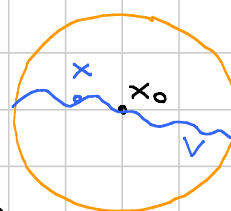
Sia V definito come sopra.

Dico che x_0 è p.to di max per $f(x)$ ristretta a V se

$x_0 \in V$ of course (aggiunto dopo video)

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \text{ t.c. } \phi(x) = 0$$

... minimo ... $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall \dots$

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Nella situazione della def. di sopra, supponiamo che f e ϕ siano diff. in $B_\delta(x_0)$.

Se x_0 è un p.to di max./min. allora accade almeno una di queste possibilità:

① $\nabla \phi(x_0) = 0$

② $\nabla f(x_0)$ è multiplo di $\nabla \phi(x_0)$, cioè $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla \phi(x_0)$

↙ Moltiplicatore di Lagrange

Utilizzo operativo Supponiamo di essere in 2 variabili.

Sto cercando max / min di $f(x,y)$ su un insieme compatto D .

Cerco i candidati con il solito metodo:

→ staz. interni

→ sing. interni

→ bordo \leadsto qui introduciamo i moltiplicatori: spero che ∂D sia il luogo di zeri di una certa $\phi(x,y)$.

Risolvero due sistemi:

$$\phi_x(x,y) = 0$$

$$\phi_y(x,y) = 0$$

$$\phi(x,y) = 0$$

1° sistema: le soluzioni sono i pti di $\partial D = V$ in cui $\nabla \phi = 0$. Sono i pti di tipo ④ nel metodo precedente

Oss. 2 incognite (x,y) e 3 equazioni, quindi spesso non ci sono soluzioni

$$f_x(x,y) = \lambda \phi_x(x,y)$$

$$f_y(x,y) = \lambda \phi_y(x,y)$$

$$\phi(x,y) = 0$$

2° sistema: cerca i pti di $\partial D = V$ in cui $\nabla f = \lambda \nabla \phi$. Sono i pti di tipo ② nella descrizione prec.

Oss. 3 incognite (x,y,λ) e 3 equazioni, quindi "spesso" ci sono soluzioni

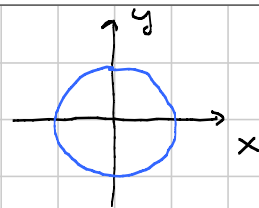
Alla fine aggiungo alla lista dei candidati interni i pti di ∂D trovati risolvendo i due sistemi. Per il secondo sistema il valore di λ non conta nulla, ma contano solo x e y .

Oss. Risolvere il secondo sistema equivale a trovare i pti stazionari di una funzione ausiliaria di 3 variabili

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda \phi(x,y)$$

Oss. Se sono in n variabili i sistemi hanno $n+1$ equazioni. Il 1° ha n incognite, il 2° ne ha $(n+1)$.

Esempio 1 $\max / \min \{ \underbrace{x+2y}_{f(x,y)} : x^2+y^2 \leq 1 \}$



① Stazionari e singolari interni: \emptyset

② Bordo ha equazione

$$\underbrace{x^2+y^2-1}_{\phi(x,y)} = 0$$

Risolvere i 2 sistemi.

1° sistema

$$\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ \text{impossibile} \end{matrix}$$

2° sistema

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \leadsto x = \frac{1}{2\lambda} \\ \leadsto y = \frac{1}{\lambda} \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} \text{dopo aver} \\ \text{oss. che} \\ \lambda \neq 0 \end{matrix} \right\}$$

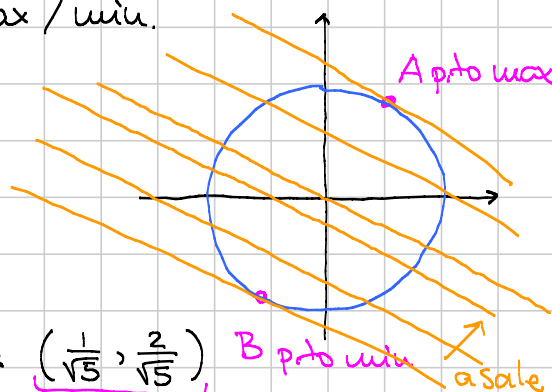
Sostituisco nella 3ª: $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1$, $\frac{5}{4} = \lambda^2$, $\lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

Quindi ho 2 soluzioni: $(x,y) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$
i segni sono gli stessi

Sostituisco nella $f(x,y)$ e trovo max/min.

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5}$$



Conclusione: $\max = \sqrt{5}$ p.to di max $\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}_A$ B p.to min

$\min = -\sqrt{5}$ p.to di min $\underbrace{(-\dots, -\dots)}_B$

Interpretazione: $f(x,y) = a \Leftrightarrow x+2y = a \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{a}{2}$

Esempio 2 $\max / \min \left\{ \underbrace{x^2 + 2y^2}_{\phi(x,y)} : \underbrace{x^4 + y^4}_{\text{televisore}} \leq 1 \right\}$

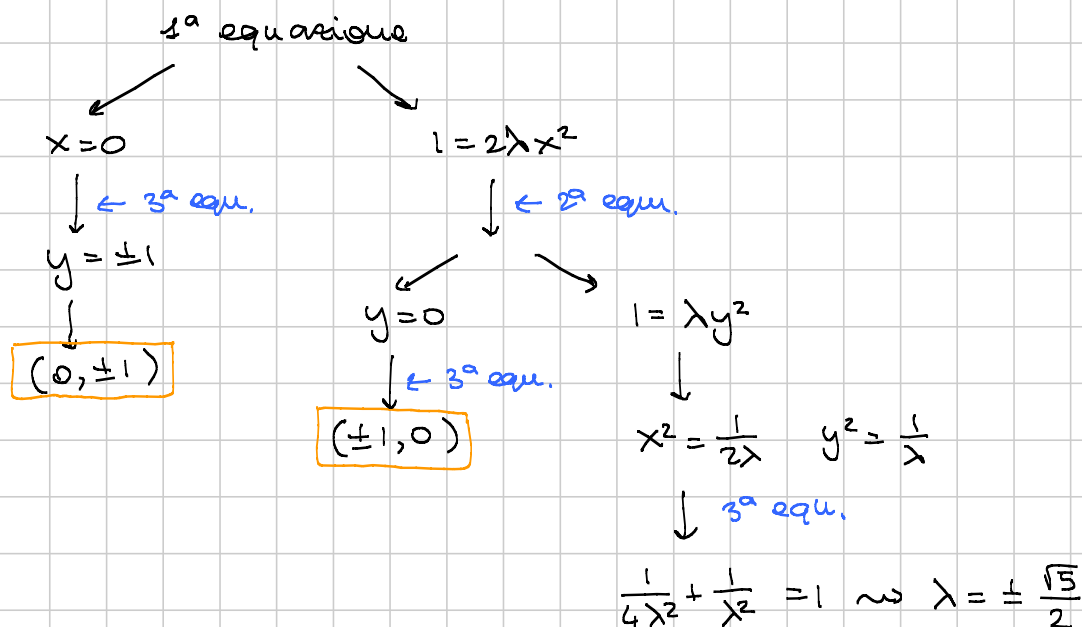
① Staz. interni $\nabla \phi(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

② Sing. interni : \emptyset

③ Bordo : $\underbrace{x^4 + y^4 - 1}_{\phi(x,y)} = 0$

1° sistema $\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \leadsto \text{impossibile}$

2° sistema $\begin{cases} \phi_x = \lambda \phi_x \\ \phi_y = \lambda \phi_y \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \begin{cases} 2x = 4\lambda x^3 \\ 4y = 4\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \begin{cases} x = 2\lambda x^3 \\ y = \lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$

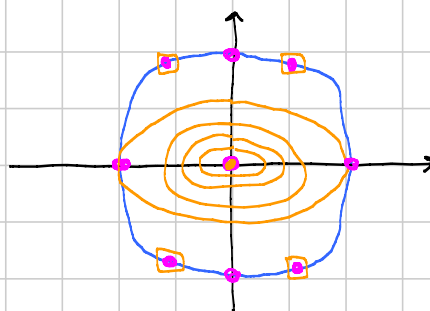


da cui trovo $x^2 = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ $y^2 = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$ scarto quelle con

il segno - e trovo 4 possibilità per (x,y)

Alla fine ho trovato 8 pti +
quello stazionario interno.

Sostituendo trovo max/min.



Dalle linee di livello è chiaro che
il minimo è nell'origine, ma non
è chiaro se il max è in $(0, \pm 1)$ o nei 4 pti simmetrici.
— o — o —

ANALISI 2

—

LEZIONE 019

Titolo nota

14/10/2015

Interpretazione brutale del metodo dei moltiplicatori

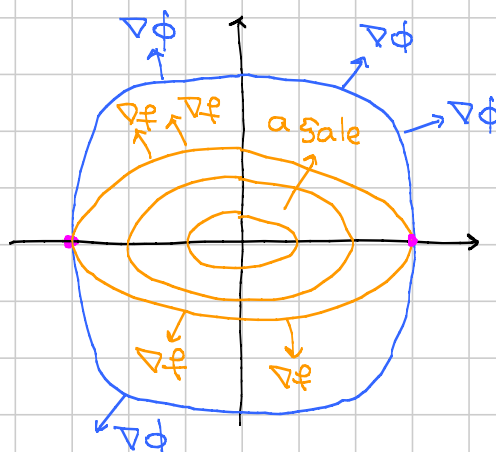
$$\max / \min \{ x^2 + 2y^2 : \underline{x^4 + y^4 = 1} \}$$

solo bordo

Sto cercando le linee di livello di $f(x)$ che risultano TANGENTI all'insieme V .

Ora il fatto geometrico è questo:
IL GRADIENTE È PERPENDICOLARE alle linee di livello

Nei pti di tangenza le linee di livello di f e ϕ sono tangenti, quindi $\nabla \phi$ e ∇f sono perpendicolari alla stessa cosa e dunque uno multiplo dell'altro.

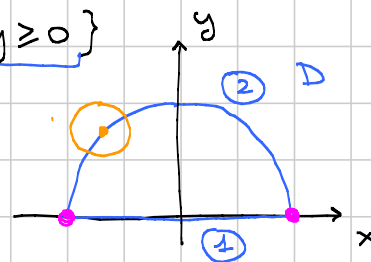


UTILIZZO MISTO DI MOLTIPLICATORI E ALTRE TECNICHE

Esempio $\max / \min \{ x + 2y : \underline{x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0} \}$

D

D compatto, f continua \Rightarrow max e min esistono



→ Stat. e sing. interni : \emptyset

→ Bordo : sono 2 pezzi

Per il pezzo ① uso la param. $\{ (t, 0) : t \in [-1, 1] \}$

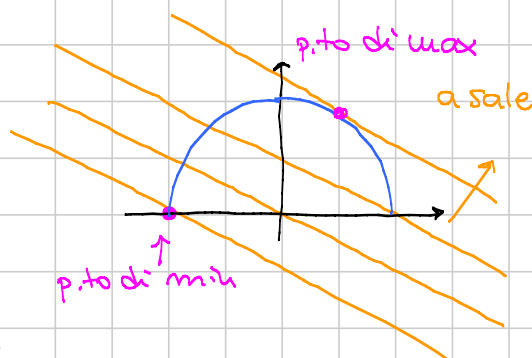
$f(t, 0) = t$ che studio per $t \in [-1, 1] \leadsto$ trovo $(\pm 1, 0)$

Sul pezzo 2 vorrei usare i moltiplicatori con $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ ma questa sarebbe tutta la circ.

Questo si può fare MA occorre

- ① scartare i candidati che hanno $y < 0$
- ② includere d'ufficio i "BORDI DEI BORDI", altrimenti detti PUNTI DI TAGLIO, cioè gli estremi del pezzo di bordo che sto considerando, cioè $(\pm 1, 0)$

Facendo i conti, il p.to di max esce dal 2° sistema dei moltiplicatori



— 0 — 0 —

Esempio 2 $\max / \min \{x - 2y : x^2 = y^3, x \in [-1, 1]\}$
 D compatto con $\text{Int}(D) = \emptyset$

L'equazione di D è $\underbrace{x^2 - y^3 = 0}_{\phi(x, y)} = 0$

1° sistema : $\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x = 0 \\ -3y^2 = 0 \\ x^2 = y^3 \end{cases} \leadsto \text{ha come soluz. } \boxed{(0, 0)}$

2° sistema $\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -2 = -3\lambda y^2 \\ x^2 = y^3 \end{cases} \begin{matrix} \leadsto \text{ricavo } x \\ \leadsto \text{ricavo } y \end{matrix} \}$

Alternativa: divido le prime 2 equazioni : $-\frac{1}{2} = -\frac{2}{3} \frac{x}{y^2}$
 da cui

$$x = \frac{3}{4} y^2$$

sostituisco nella 3ª

$$\frac{9}{16} y^4 = y^3$$

$$\nearrow y = 0 \leadsto x = 0$$

$$\leadsto y = \frac{16}{9} \leadsto x = \frac{3}{4} \frac{256}{81}$$

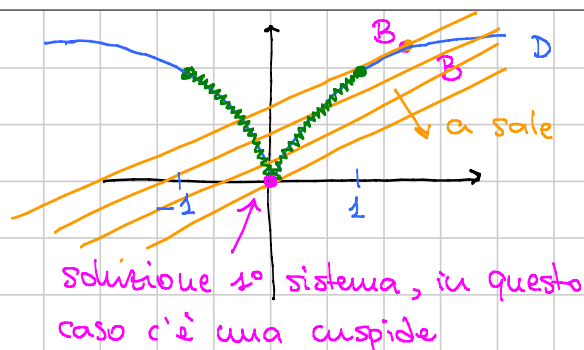
Il secondo candidato è $\left(\frac{64}{27}, \frac{16}{9}\right) = B$ $= \frac{64}{27}$

\uparrow
 $x > 1$
 \uparrow
 eliminato

$$x - 2y = a \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{a}{2}$$

Devo includere d'ufficio i p.ti di taglio

$$(\pm 1, 1)$$



Riassumendo ho 3 candidati

$$\leadsto (1, 1) \leadsto f(1, 1) = -1$$

$$\leadsto (-1, 1) \leadsto f(-1, 1) = -3 \leftarrow \text{MIN}$$

$$\leadsto (0, 0) \leadsto f(0, 0) = 0 \leftarrow \text{MAX}$$

— 0 — 0 —

Esercizio 3 Sia A una matrice simmetrica. Sia $q(x) = \langle Ax, x \rangle$ la forma quadratica ad essa associata.

Calcolare max/min di $q(x)$ sui vettori di norma 1, cioè

$$\max / \min \{ \underbrace{q(x)}_{f(x)} : \underbrace{|x| = 1}_V \}$$

Una possibile eq. per V è $|x| - 1 = 0$, ma meglio è

$$\underbrace{|x|^2 - 1}_{\phi(x,y)} = 0$$

Max e min esistono grazie a Weierstrass. Li cerco via moltiplicatori. Sessono $\nabla f(x)$ e $\nabla \phi(x)$ che abbiamo fatto in una lezione precedente:

$$\nabla f(x) = 2Ax \quad (\text{in generale } (A + A^T)x)$$

$$\nabla \phi(x) = 2x$$

$$\boxed{1^\circ \text{ sistema}} \begin{cases} \nabla \phi = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x = 0 \\ |x|^2 = 1 \end{cases} \text{impossibile}$$

$$\boxed{2^o \text{ sistema}} \quad \begin{cases} \nabla \phi = \lambda \nabla \Phi \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{2} Ax = \cancel{2} \lambda x \\ |x| = 1 \end{cases}$$

Sorpresona: i p.ti stazionari sono gli autovettori (normalizzati in modo da stare in γ) e i corrispondenti moltiplicatori di Lagrange sono i con. autovalori.

Quando sostituisco in $q(x)$ un autovettore trovo

$$q(x) = \langle Ax, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda$$

In conclusione : $\max = \max \text{ autovalore}$
 $\min = \min \text{ autovalore}$

Oss. Studiare \max / \min di $q(x)$ in $|x|=1$ è equivalente a studiare \max e \min di

$$R(x) = \frac{q(x)}{|x|^2} \quad \text{su tutto } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

↑

Quoziente di REYLEIGH

Basta osservare che $R(\lambda x) = R(x)$ per ogni $\lambda > 0$ quindi R è costante sulle semirette che escono dall'origine

Back to lezione? Sia M una matrice $n \times n$. Trovare la costante di Lip. della funzione $\varphi(x) = Mx$ pensata come $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Sense che $|M(x-y)| \leq L |x-y| \quad \forall x, y$
 quindi $Mx - My$

$$L = \max \frac{|Mv|}{|v|} \quad v: \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Ma allora

$$L^2 = \max \left\{ \frac{|Mu|^2}{|u|^2} : u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\}$$

$$= \max \{ |Mu|^2 : |u|^2 = 1 \}$$

Oss. finale

$$|Mu|^2 = \langle Mu, Mu \rangle = \langle \underbrace{M^T M}_{\substack{\uparrow \\ \text{simmetrica}}} u, u \rangle$$

Conclusione : la costante di Lip. è il più grande (in modulo) autovalore della matrice

$$M^T M$$

(che è simmetrica, dunque ha autovalori reali).
Poi va fatta la radice.

ANALISI 2 — LEZIONE 020

Titolo nota

16/10/2015

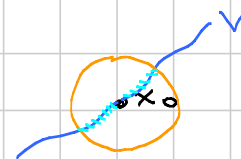
Moltiplicatori di Lagrange (caso con più moltiplicatori)Setting: $V \subseteq \mathbb{R}^n$ descritto come luogo di zeri di più funzioni

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\phi_1(x) = \phi_2(x) = \dots = \phi_k(x) = 0}_{k \text{ equazioni che descrivono } V}\}$$

Def. Dato V come sopra e data $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dico che $x_0 \in V$ è p.to di max / min locale per f in V se

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \cap V$$

↑
caso minimo



Teorema (misterioso) Supponiamo che x_0 sia p.to di max / min per f ristretta a V .

Supponiamo che $f(x), \phi_1(x), \dots, \phi_k(x)$ siano differenziabili in $B_\delta(x_0)$. Allora x_0 rientra in una di queste due categorie:

→ $\nabla \phi_1(x_0), \dots, \nabla \phi_k(x_0)$ sono k vettori LINEARMENTE DIPENDENTI, cioè equivalentemente la matrice che li ha come righe (o colonne) ha rango $\leq k-1$

→ $\nabla f(x_0)$ è combinazione lineare di $\nabla \phi_1(x_0), \dots, \nabla \phi_k(x_0)$, cioè esistono numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ t.c.

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla \phi_1(x_0) + \dots + \lambda_k \nabla \phi_k(x_0)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono i moltiplicatori

Operativamente:

→ i punti del primo tipo li ottengo risolvendo il 1° sistema

$\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_k = 0$ ← k equazioni
 tutti i minori $k \times k$ della
 matrice con righe $\nabla \Phi_i$ ← $\binom{n}{k}$ equazioni
 siano nulli

n incognite
 equas/esagerate
 \Rightarrow in genere
 no soluzioni

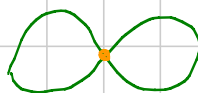
→ i pti del secondo tipo li ottengo risolvendo il 2° sistema

$\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_k = 0$ ← k equazioni
 $\nabla f = \lambda_1 \nabla \Phi_1 + \dots + \lambda_k \nabla \Phi_k$ ← n equazioni, una per componenti

$k+n$ equazioni e $k+n$ incognite (n componenti di x e k moltiplicatori) \leadsto ragionevole avere # finito di soluzioni.

Brutalmente: i pti del secondo tipo sono i pti in cui è tangente agli insiemi di livello di f .

I pti del 1° tipo sono i pti in cui V può essere "fatto male", cioè avere cuspidi, intersezioni di vari rami, e così via.



Esempi Già con una sda funzione.

$$\Phi(x, y) = 0$$

$$xy = 0$$



$$\nabla \Phi(x, y) = (y, x)$$

L'origine soddisfa il 1° sistema

$$\Phi = 0 \quad \nabla \Phi = (0, 0)$$

$$\Phi(x, y) = 0$$

$$x^{20} = 0$$

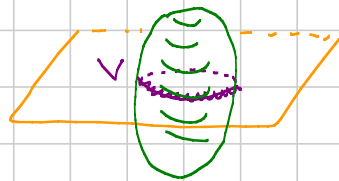


Tutti i pti di V sono soluz. del 1° sistema

Esempio 1 $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + 2y^2 + z^2 = 4}_{\text{ellissoide}}, \underbrace{x + y + z = 1}_{\text{piano}}\}$

$$f(x, y, z) = z + x^2$$

max / min di f su V



V è compatto: \rightarrow è limitato perché contenuto in una sfera, o ancora meglio nel cubo $[-2, 2]^3$
 \rightarrow è chiuso perché è intersezione di chiusi perché sono controimmagini di un pto (chiuso) wrt una funzione continua.

$W \Rightarrow$ max e min esistono, quindi basta trovare i candidati

$$\Phi_1(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4 = 0$$

$$\Phi_2(x, y, z) = x + y + z - 1$$

1° sistema $\begin{pmatrix} \nabla \Phi_1 \\ \nabla \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 4y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Devo dim. che ha rango 2 nei pti di V

Se ha rango 1 vuol dire che

$$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ 4y - 2z = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{annullamento dei} \\ 3 \text{ minori} \end{array} \right\}$$

$$x = 2y$$

$$x = z$$

$$z = 2y$$

$$x = z = 2y$$

\downarrow piano

$$x = \frac{2}{5} \quad y = \frac{1}{5}$$

$$z = \frac{2}{5}$$

$$\frac{4}{25} + \frac{2}{25} + \frac{4}{25} = 4$$

\uparrow NO \Rightarrow nessuna soluzione

\swarrow Sostituisco nell'ellissoide

2° sistema $\nabla f = \lambda \nabla \Phi_1 + \mu \nabla \Phi_2$

$$f(x, y, z) = z + x^2$$

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x + \mu \\ 0 = 4\lambda y + \mu \\ 1 = 2\lambda z + \mu \\ \Phi_1 = \Phi_2 = 0 \end{cases}$$

$$2^a - 3^a : 4\lambda y - 2\lambda z = -1$$

$$2\lambda(2y - z) = -1$$

$$1^a - 2^a : 2x = 2\lambda x - 4\lambda y$$

$$x = \lambda x - 2\lambda y$$

Provo ad eliminare λ usando le 2 equ. ottenuto

$$\lambda = \frac{-1}{2(2y-z)} = \frac{x}{x-2y}$$

↑
posso dividere...

Dividendo nella seconda
devo stare attento a non
perdere soluzioni (nel video
c'è)

Restano 3 equazioni in x, y, z

$$\begin{cases} 2y - x = 2x(2y - z) \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

→ speso di risolvere

Oss. Supponiamo di avere $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = a \end{cases}$

Quando il 1° sistema ha soluzione? Quando l'ellissoide è
tangente al piano

— o —

Oss. Le soluzioni del 2° sistema sono i pti stazionari non
vincolati per la funzione

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x) - \lambda_1 \phi_1 - \dots - \lambda_k \phi_k.$$

— o — o —

ANALISI 2

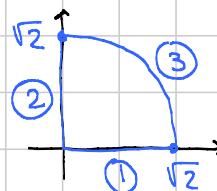
LEZIONE 021

Titolo nota

16/10/2015

Esempio 1 $\max/\min \{ x^2 y : x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0, y \geq 0 \}$

$W \Rightarrow \max$ e \min . esistono



$\nabla f(x, y) = (2xy, x^2)$ i p.ti stazionari
sono tutti e soli i p.ti dell'asse y
 \Rightarrow infiniti p.ti stazionari

\leadsto nessuno stazionario interno!

\leadsto nessun Singolare interno

Bordo: 2 pezzi con parametrizz, 1 pezzo con moltiplicatori

① e ②

③

① : $\{(t, 0) : t \in [0, \sqrt{2}]\}$

② : $\{(0, t) : t \in [0, \sqrt{2}]\}$

su questi pezzi $f \equiv 0$

③ $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 2 \leadsto$ nessuna soluz. in sistema

2° sistema

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2xy = 2\lambda x \\ x^2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

$x(y - \lambda) = 0 \leftarrow 1^a \text{ equ.}$

$x = 0$

$\downarrow 3^a \text{ equ.}$

$y = \pm \sqrt{2}$

\downarrow
 $(0, \pm \sqrt{2})$

$y = \lambda$

$\downarrow 2^a \text{ equ.}$

$x^2 = 2y^2$

$\downarrow 3^a \text{ equ.}$

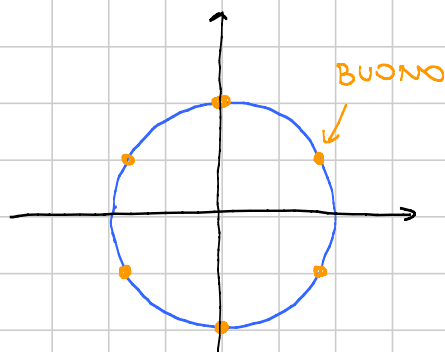
$3y^2 = 2$

\downarrow
 $y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$

$x^2 = \frac{4}{3}$

$x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\rightarrow \left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}, \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)$



4 p.ti

In conclusione nel nostro caso i candidati sono

→ tutti i p.ti dei pezzi ① e ② $\leadsto f(x,y) = 0$

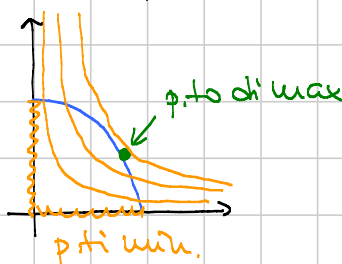
→ il p.to $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \leadsto f(\dots) = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$

$$\text{Max} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \quad \text{p.to di max} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$$

min = 0 p.ti di min = tutti i p.ti dei pezzi ① e ②

Linee di livello : $x^2y = \lambda$

$$y = \frac{\lambda}{x^2}$$



Esempio 1-bis max/min $\{x^2y + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 : (x,y) \in \text{insieme di prima}\}$

Se imposto il sistema con i moltiplicatori, vengono LHS omibili.

In realtà però

$$\underbrace{x^2y + x^4 + 2x^2y^2 + y^4}_{f(x,y)} = x^2y + (x^2+y^2)^2 = \overbrace{x^2y + 4}^{\hat{f}(x,y)} \text{ sulla circonferenza}$$

Tecnica di SOSTITUZIONE DEL VINCOLO : "semplificare" la funzione f da studiare trovando una funzione più semplice che coincide con f nei p.ti di V .

Ovviamente cambia la parte stazionari e singolari interni.

Nell'esempio si può procedere così

min = 0 con unico p.to di min $(0,0)$. Infatti $f(0,0) = 0$ e per ogni altro (x,y) si ha

$$f(x,y) = \underbrace{x^2y}_{\geq 0} + (x^2+y^2)^2 \geq (x^2+y^2)^2 > 0 \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0)$$

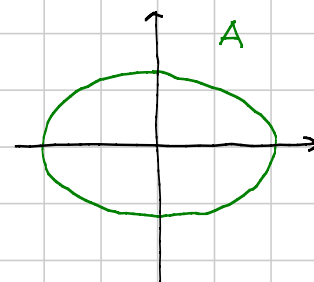
$\max = f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ con unico p.to di max.

Infatti per ogni altro p.to

$$f(x, y) = \underbrace{x^2 y}_{\substack{\leq \text{valore} \\ \text{nel p.to} \\ (\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})}} + \underbrace{(x^2 + y^2)^2}_{\leq 4} < f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right).$$

Oss. Se il problema fosse stato $\max/\min \{x^2 y + \dots : (x, y) \in \textcircled{3}\}$ conveniva fare i moltiplicatori su $\hat{f}(x, y)$ invece che su $f(x, y)$.

Esempio 2 $\max/\min \{ \underbrace{|x^2 - y|}_{f(x, y)} : \underbrace{x^2 + 2y^2 \leq 5}_{\text{ellisse}} \}$



Valore assoluto \rightsquigarrow p.ti singolari interni

A è compatto: \rightarrow limitato perché $A \subseteq [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]^2$
 \rightarrow chiuso perché controimmagine di $[-\infty, 5]$ che è un chiuso

$W \Rightarrow \max$ e \min esistono.

Semplificazione: STUDIO SENZA IL VALORE ASSOLUTO
e poi deduco

$g(x, y) = x^2 - y \rightsquigarrow$ viene stud. e sing. interni

Bordo: 1° sistema non ha soluzioni

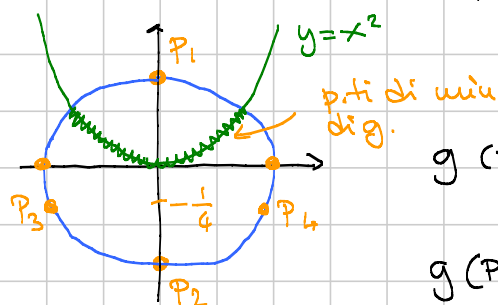
$$2^\circ \text{ sistema } \begin{cases} g_x = \lambda \phi_x \\ g_y = \lambda \phi_y \\ x^2 + 2y^2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ -1 = 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 5 \end{cases}$$

$$2^{\text{a}} \text{ equ.} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{4y} \Rightarrow \cancel{2x} = \cancel{2} \left(-\frac{1}{4y}\right)x ; 4xy = -x$$

$$\nearrow x=0 \leadsto y^2 = \frac{5}{2} \leadsto y = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\searrow 4y = -1 \leadsto y = -\frac{1}{4} \leadsto x^2 + \frac{2}{16} = 5 \leadsto \text{trovo } x^2 = \frac{78}{16}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{159}}{4}$$



$$g(x, y) = x^2 - y$$

$$g(P_1) = \boxed{-\frac{\sqrt{5}}{2}} \quad g(P_2) = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$g(P_3) = g(P_4) = \frac{78}{16} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{82}{16}} \quad \text{max di } g$$

$$\max f = \frac{82}{16} \quad (\text{che ha battuto } \frac{\sqrt{5}}{2}) \quad \text{p.ti di max: } P_3 \text{ e } P_4$$

$\min f = 0$ p.ti di min. gli infiniti p.ti in cui si annulla $g(x, y)$, cioè tutti i p.ti della parabola $y = x^2$ che cascano nell'ellisse.

Esempio 3 $f(x, y, z, w) = \frac{x^2 y z^2}{x^4 + y^4 + z^4 + w^4}$

Limite di f per $(x, y, z, w) \rightarrow (0, 0, 0, 0)$

Due approcci: introduco coord. polari in \mathbb{R}^4 oppure

$$|f(x, y, z, w)| = \left| x \cdot \frac{xyz^2}{x^4 + y^4 + z^4 + w^4} \right|$$

se fosse $\leq M$ per

$(x, y, z, w) \neq (0, 0, 0, 0)$ concluderei con i carabinieri

La funzione (2^{a}) è omogenea di grado 0, quindi

$$\max \{ g(x) : x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \} = \max \{ g(x) : x^4 + y^4 + z^4 + w^4 = 1 \}$$

$M \in \mathbb{R}$ per Weierstrass.

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 022

Titolo nota

20/10/2015

Max e min su insiemi non compatti

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\inf / \sup / \max / \min \{ f(x) : x \in A \}$$

TEOREMA (Weierstrass generalizzato)Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è continua(ii) esiste un sottoinsieme non vuoto e compatto, cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$K_M = \{ x \in D : f(x) \leq M \} \leftarrow \text{sottoinsieme}$$

è non vuoto e compatto.

Allora

$$\min \{ f(x) : x \in D \}$$

esiste per forza.

Oss. Se voglio che esista il max, basta usare il soprainsiemeDim. Per W. classico esiste

$$\min \{ f(x) : x \in K_M \}$$

Sia x_0 un p.to di minimo in K_M . Dico che x_0 è p.to di min. per tutto D . Infatti:

- se $x \in K_M$, allora $f(x) \geq f(x_0)$ (per def. di x_0)
- se $x \in D \setminus K_M$, allora

$$f(x) > M \geq f(x_0)$$

\uparrow per def. di K_M \uparrow perché $x_0 \in K_M$

Quindi in ogni caso

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in D.$$

□

Corollario Supponiamo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua e

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Allora esiste il minimo.

Dim. Basta dim. che esiste un sottolivello non vuoto e compatto.

Scelgo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a caso (ad esempio $x_0 = 0$) e pongo

$$M = f(x_0).$$

Il corrispondente sottolivello è

- $\neq \emptyset$ perché contiene x_0 ,
- chiuso perché controimmagine di un chiuso $(-\infty, M]$
- limitato perché per definizione di limite

$\exists R > 0$ t.c. $f(x) \geq M+1 \quad \forall x$ t.c. $|x| \geq R$
quindi

$$K_M \subseteq B_R(0)$$

Conclusione $K_M \neq \emptyset$ e compatto. \square

Esempio 1 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 \quad D = \mathbb{R}^2$

$$\underbrace{f(x, y)}_{\downarrow +\infty} \geq \underbrace{x^2 + y^2}_{\downarrow +\infty}$$

Siamo nelle ipotesi del corollario \Rightarrow minimo esiste (si vede a occhio che è in $(0, 0)$).

Dal limite segue anche che $\sup = +\infty$.

Esempio 1-bis $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 7 \sin x \quad D = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ (banalmente) e il min. esiste perché

$$f(x, y) \geq \underbrace{x^2 + y^2}_{\downarrow +\infty} - 7 \quad \text{e quindi siamo nelle Hp del coroll.}$$

Esempio 2 $f(x,y) = x^2 - 2y^2$ $D = \mathbb{R}^2$

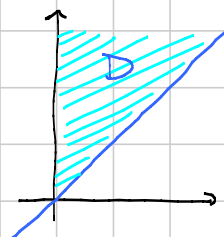
$\sup = +\infty$ $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 = +\infty$

$\inf = -\infty$ $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0,t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -2t^2 = -\infty$

Esempio 3 $f(x,y) = x^2 - 2y^2$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq x\}$

$\inf = -\infty$ $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0,t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -2t^2 = -\infty$

Dico che esiste max e vale 0



1° modo Dimostrazione diretta

$$f(x,y) \leq x^2 - 2x^2 = -x^2 \leq 0 \quad \text{per ogni } (x,y) \in D$$

\uparrow
 $y \geq x$

e vale il segno di uguale se e solo se $y = x = 0$

2° modo Se voglio usare W. gen. devo dimostrare che

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in D}} f(x,y) = -\infty$$

Come lo dimostro? Vedo almeno 2 possibilità

[1] Coord. polari: $f(x,y) = \rho^2 (\cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta)$
 $= \rho^2 (1 - 3 \sin^2 \theta)$

Ora $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ e quindi $\frac{1}{2} \leq \sin^2 \theta \leq 1$, ma allora

$$\underbrace{f(x,y)}_{-\infty} \leq \rho^2 \left(1 - \frac{3}{2}\right) = \underbrace{-\frac{1}{2} \rho^2}_{-\infty}$$

② Truccoso : $f(x, y) = x^2 - 2y^2$

$$= \underbrace{x^2 - y^2}_{\leq 0} - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y^2$$

$$\leq -\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y^2 \quad \left[\begin{array}{l} \text{valgono solo} \\ \text{perché siamo} \\ \text{in } D \end{array} \right]$$

$$\leq -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

\downarrow
 $-\infty$

Una volta che so che max esiste, allora il p.to di max si trova nelle solite 3 categorie

→ staz. e sing. interni non esistono

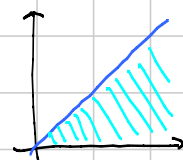
→ bordo è fatto da 2 pezzi

- ① $\{(0, t) : t \geq 0\}$
- ② $\{(t, t) : t \geq 0\}$

Esempio 4 $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x\}$

Sup = $+\infty$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = +\infty$



inf = $-\infty$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -t^2 = -\infty$

Esempio 5 $f(x, y) = x^2 + \arctan(xy)$ $D = \mathbb{R}^2$

Sup = $+\infty$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = +\infty$

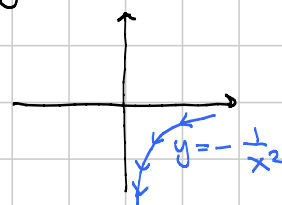
che è l'inf. tecnico

inf ≤ 0

perché $f(0, 0) = 0$

Punto a $-\frac{\pi}{2}$: serve x molto vicino a 0, e $xy \sim -\infty$

$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, -\frac{1}{t^2}) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 + \arctan(-\frac{1}{t}) = -\frac{\pi}{2}$



Esempio 6 Dimostrare la disuguaglianza tra media aritmetica e quadratiche

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

o equivalentemente

$$x_1 + \dots + x_n \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Abbiamo 2 opzioni basate sul fatto che è omogenea.

$$\rightarrow \text{Fare } \max \{ \underbrace{x_1 + \dots + x_n}_{\neq} : \underbrace{x_1^2 + \dots + x_n^2}_{\neq} = 1 \}$$

$$\rightarrow \text{Fare } \min \{ x_1^2 + \dots + x_n^2 : x_1 + \dots + x_n = 1 \}$$

La prima è migliore perché il vincolo è compatto, quindi max esiste. A quel punto uso i moltiplicatori

$$\nabla f = \lambda \nabla \phi$$

$$1 = 2\lambda x_1$$

$$1 = 2\lambda x_2$$

$$\vdots$$

$$1 = 2\lambda x_n$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 = 2\lambda x_1 \\ 1 = 2\lambda x_2 \\ \vdots \\ 1 = 2\lambda x_n \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = \dots = x_n \text{ e a quel punto li trovo con il vincolo.}$$

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 023

Titolo nota

16/10/2015

Esercizio (TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA)

Dimostrare che ogni polinomio a coeff. complessi ammette almeno una radice complessa

Dim. Road map \rightarrow formularlo in termini di max/min
 \rightarrow fare vedere che il min esiste
 \rightarrow fare vedere che solo 0 può essere min.

$$p(z) = a_m z^m + \dots + a_1 z + a_0$$

lo trasformo in una funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = |p(x + iy)|$$

\uparrow modulo del numero complesso

A questo punto tesi $\Leftrightarrow \min \{ f(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \} = 0$

Detto (x_0, y_0) un pto di min. si avrà che

$$f(\underbrace{x_0 + i y_0}_{z_0}) = 0$$

Passo 1 Dimostriamo che il minimo esiste (w. generalizzato)

Intanto $f(x, y)$ è continua in \mathbb{R}^2 .

Mostriamo che

$$\lim_{x^2 + y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$$

Torniamo al polinomio, che wlog possiamo pensare monico

$$|p(z)| = |z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0|$$

$$|p(z)| = \underbrace{|z^n|}_{|z|^n} \cdot \underbrace{\left| 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right|}_{\geq 1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|z|^n}}$$

Ho usato una proprietà dei moduli, cioè la disuguaglianza triangolare

$$|p(z)| \geq |z|^n \left(1 - \underbrace{\frac{|a_{n-1}|}{|z|}}_0 - \dots - \underbrace{\frac{|a_0|}{|z|^n}}_0 \right)$$

Quando $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$, anche $|z| \rightarrow +\infty$ (occhio: $|z| = \rho$)

quindi $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} |p(z)| = +\infty$

Per w. generalizzato il min. esiste.

Passo 2 Dimostriamo che il minimo è 0. Se per assurdo non fosse 0, facciamo vedere con uno STUDIO LOCALE che si può scendere.

Wlog possiamo assumere che un p.to di minimo sia $(0,0)$ ($z_0=0$) (se così non fosse considero il nuovo polinomio $p(z-z_0)$)

$$p(z) = \underbrace{b_0}_{\neq 0} + \underbrace{b_k}_{\text{primo coeff successivo ad essere } \neq 0} z^k + b_{k+1} z^{k+1} + \dots + b_n z^n$$

$\in \mathbb{C}$

Ora considero i valori di z del tipo $t \hat{w}$ con t piccolo reale

$$p(tw) = b_0 + b_k t^k w^k + o(t^k)$$

Scelgo $w \in \mathbb{C}$ in maniera tale che $b_k w^k = -b_0$, cioè

$w^k = -\frac{b_0}{b_k}$ (ho diviso per $b_k \neq 0$ e basta saper fare le radici k -esime, per le quali c'è una teoria elementare)

Detto w_0 questo w appena scelto, abbiamo

$$p(tw_0) = b_0 - b_0 t^k + o(t^k) = (1-t^k)b_0 + o(t^k)$$

e quindi

$$|p(tw_0)| = |(1-t^k)b_0 + o(t^k)| \stackrel{\text{triangolo}}{\leq} (1-t^k)|b_0| + |o(t^k)|$$

$< |b_0|$ per t piccolo

$$(1-t^k)|b_0| + |o(t^k)| = |b_0| - t^k|b_0| + o(t^k) < |b_0|$$

per studio locale.

— o — o —

Oss. Abbiamo dimostrato un risultato più forte: dato $p \in \mathbb{C}[z]$ se $z_0 \in \mathbb{C}$ non è una radice, allora c'è una direzione che esce da z_0 nella quale $|p(z)|$ decresce.

Quindi le radici di $p(z)$ sono tutti e soli i p.ti di min. loc. per la funzione $|p(z)|$.

— o — o —

Esercizio Calcolare $\inf/\sup/\max/\min$ di $\underline{x^2+y^2+z^2}$
sull'insieme $\neq (x,y,z)$

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, xyz = 3\}$$

Capiamo come è fatto D :

→ è chiuso perché è intersezione di 4 chiusi

→ non è limitato perché $(1, n, \frac{3}{n}) \in D$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
e la norma $\rightarrow +\infty$

\Rightarrow addio w .

Però abbiamo già dim. che $\sup = +\infty$. Infatti

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f\left(\underbrace{1, t, \frac{3}{t}}_{\in D}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + t^2 + \frac{9}{t^2} = +\infty$$

Ora $\lim_{\substack{x^2+y^2+z^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y,z) \in D}} f(x,y,z) = +\infty$ perché lo è anche senza la condizione $(x,y,z) \in D$

W generalizzato \Rightarrow esiste il minimo, che posso calcolare con i moltiplicatori o la parametrizzazione

$$\nabla f = \lambda \nabla \phi \quad \begin{cases} 2x = \lambda yz & \bullet x \\ 2y = \lambda xz & \bullet y \\ 2z = \lambda xy & \bullet z \\ xyz = 3 \end{cases} \quad \begin{aligned} 2x^2 &= \lambda xyz = 3\lambda \\ 2y^2 &= &= 3\lambda \\ 2z^2 &= &= 3\lambda \end{aligned}$$

Quindi $x=y=z = \sqrt[3]{3}$ e questo è l'unico p.to di minimo.

Con la parametrizz. mi ritrovavo $z = \frac{3}{xy}$ e mi riducevo

$$a \quad \min \left\{ x^2 + y^2 + \frac{9}{xy^2} : \underbrace{x \geq 0, y \geq 0}_{\text{vincolo non compatto}} \right\}$$

— 0 — 0 —

ANALISI 2

LEZIONE 024

Titolo nota

21/10/2015

FUNZIONI CONVESSE DI PIÙ VARIABILI

Def Sia V uno sp. vettoriale. Un sottoinsieme $C \subseteq V$ si dice CONVESSO se

$$\forall x \in C \quad \forall y \in C \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in C$$

segmento di estremi x e y

Def. Sia $C \subseteq V$ convesso e sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$.
La funzione f si dice convessa se

$$\forall x \in C, \forall y \in C, \forall \lambda \in [0, 1] \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

La funzione f si dice strettamente convessa se vale $<$ quando $x \neq y$ e $\lambda \in (0, 1)$.

Lemma Se $C \subseteq V$ è convesso, $(x_1, \dots, x_n) \in C^n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$ tali che $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, allora

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in C$$

comb. convessa di x_1, \dots, x_n

Dim. Induzione su n . $n=2$ è la def.

$n-1 \Rightarrow n$ wlog $\lambda_n \neq 1$. Allora

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda_n x_n = \underbrace{\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_n} x_1 + \dots + \frac{\lambda_{n-1}}{1-\lambda_n} x_{n-1} \right)}_{\text{comb. conv. di } x_1, \dots, x_{n-1} \Rightarrow \in C} (1-\lambda_n) + \lambda_n x_n.$$

— o — o —

Teorema (Jensen negli sp. vettoriali) Sia $C \subseteq V$ convesso, sia $n \geq 2$, sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa, siano $(x_1, \dots, x_n) \in C^n$, siano $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$ t.c. $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$.

Allora

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

Dim. Come ad analisi 1, a partire dalla riga precedente. \square

Teoria base delle funzioni convesse di 1 variabile

Convessità vs continuità

- f è continua in $\text{Int}(C)$
- f è loc. lip. in $\text{Int}(C)$

Convessità vs derivata prima Supponiamo f derivabile in $\text{Int}(C)$

Allora

f convessa $\Leftrightarrow f'(x)$ deb. cresc. in $\text{Int}(C)$

f strett. conv. $\Leftrightarrow f'(x)$ strett. cresc. in $\text{Int}(C)$

Convessità vs derivata seconda Supponiamo $f''(x)$ esiste in $\text{Int}(C)$

Allora

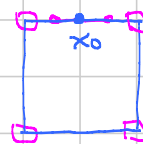
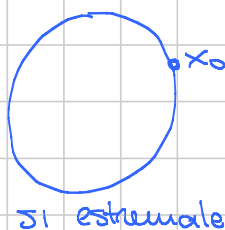
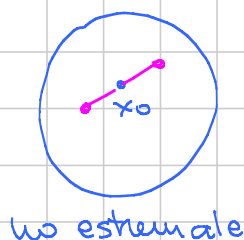
f convessa $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \text{Int}(C)$

f strett. conv. $\Leftrightarrow f''(x) > 0 \quad \forall x \in \text{Int}(C)$

l'altra è falsa, solo \geq

Moralmente il quadro è analogo in \mathbb{R}^n .

Def. Sia $C \subseteq V$ un insieme convesso. Un punto $x_0 \in C$ si dice punto estremo se non sta nell'interno di nessun segmento con estremi in C non sul bordo.

Esempi

- I punti estremali sono per forza su ∂C
- I pti estremali di $B_n(x_0)$ sono il bordo
- I pti estremali di un poligono sono solo i vertici.

Proposizione Se $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso e compatto, e $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e convessa, allora il max (che esiste per W.) è assunto almeno in un pto estremoale.
(Almeno uno dei pti di max è estremoale)

Dim. In una variabile una funzione convessa assume il max agli estremi di un intervallo.
Ripetendo il ragionamento sui segmenti che contengono x_0 segue la tesi. \square

— o — o —

Fatto: la convessità, anche in \mathbb{R}^n , è una faccenda unidimensionale, cioè $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa se e solo se sono convesse le sue restrizioni alle rette.

Detto meglio, i seguenti fatti sono equivalenti:

- (1) f è convessa in C
- (2) $\forall x_0 \in C, \forall v \in \mathbb{R}^n, \varphi(t) := f(x_0 + tv)$ è convessa per i valori di t per cui è definita
- (3) $\forall x_0 \in C, \forall x_1 \in C$, la funzione

$$\varphi(t) = f(x_0 + t(x_1 - x_0))$$
 è convessa in $[0, 1]$.

Dim. (1) \Rightarrow (3) Devo dimostrare che

$$\varphi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leq \lambda \varphi(t_1) + (1-\lambda)\varphi(t_2)$$

Ora $\varphi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) = \varphi(\underbrace{x_0 + \lambda t_1 (x_1 - x_0)}_P + \underbrace{(1-\lambda)t_2 (x_1 - x_0)}_Q)$

$$\varphi(t_1) = \varphi(\underbrace{x_0 + t_1 (x_1 - x_0)}_P)$$

$$\varphi(t_2) = \varphi(\underbrace{x_0 + t_2 (x_1 - x_0)}_Q)$$

$$\lambda P + (1-\lambda)Q = \underbrace{\lambda x_0 + (1-\lambda)x_0}_{S} + \underbrace{\lambda t_1 (x_1 - x_0) + (1-\lambda)t_2 (x_1 - x_0)}_S$$

$$\varphi(S) \leq \lambda \varphi(P) + (1-\lambda)\varphi(Q)$$

(3) \Rightarrow (1) La tesi è che φ è convessa quindi

$$\varphi(\underbrace{\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1}_{\varphi''(1-\lambda)}) \leq \lambda \underbrace{\varphi(x_0)}_{\varphi''(0)} + (1-\lambda) \underbrace{\varphi(x_1)}_{\varphi''(1)}$$

So per ipotesi che $\varphi(t) = \varphi(x_0 + t(x_1 - x_0))$ è convessa

Spero che LHS sia $\varphi(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1) = \varphi(1-\lambda)$

$$\varphi(1-\lambda) = \varphi(x_0 + (1-\lambda)(x_1 - x_0)) = \varphi(\cancel{x_0} + x_1 - \cancel{x_0} - \lambda x_1 + \lambda x_0) = \varphi(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1).$$



$$\varphi(P) \leq \lambda \varphi(x_0) + (1-\lambda)\varphi(x_1)$$

$$\lambda = \frac{|x_1 - P|}{|x_1 - x_0|}$$

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme qualunque e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.
Si dice che f è localmente limitata in D se solo se

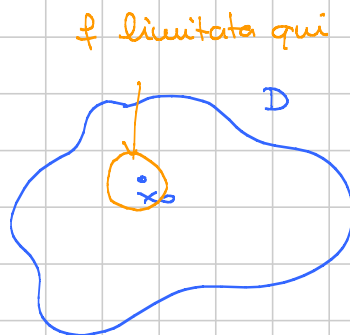
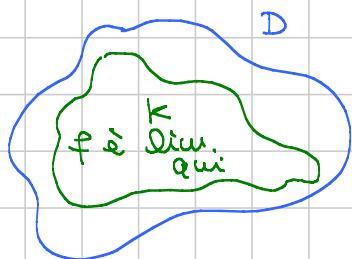
$$\forall K \subseteq \text{Int}(D) \quad \exists M \text{ t.c. } |f(x)| \leq M \quad \forall x \in K$$

\uparrow
compatto

Prop. Nelle ipotesi di sopra, sono fatti equivalenti

(1) $\forall K \subseteq \text{Int}(D) \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in K \quad |f(x)| \leq M$

(2) $\forall x_0 \in \text{Int}(D) \quad \exists r > 0 \text{ t.c. } \overline{B}_r(x_0) \subseteq \text{Int}(D) \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \overline{B}_r(x_0) \quad |f(x)| \leq M.$



ANALISI 2

-

LEZIONE 025

Titolo nota

21/10/2015

Dim. prop. fine ora precedente(1) \Rightarrow (2) è ovvio perché
 $\overline{B_r(x_0)}$ è un compatto(2) \Rightarrow (1) Sia $K \subseteq \text{Int}(D)$ compatto. $\forall x_0 \in K$ esiste $r > 0$ t.c.
 f è limitata in $\overline{B_r(x_0)}$.Ma $\{B_r(x_0) : x_0 \in K\}$ è un ricoprimento aperto
di K , ^{\uparrow dipende da x_0} quindi esiste un sottoricoprimento finito

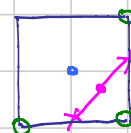
$$K \subseteq B_{r_1}(x_1) \cup B_{r_2}(x_2) \cup \dots \cup B_{r_m}(x_m)$$

Siano M_1, \dots, M_m le costanti che limitano $|f(x)|$
in queste palle, allora

$$f(x) \leq \max \{M_1, \dots, M_m\} \quad \forall x \in K.$$

Teorema Sia $C \subseteq \mathbb{R}^m$ un convesso e sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ una
funzione convessa.Allora f è loc. limitata dall'alto in $\text{Int}(C)$.

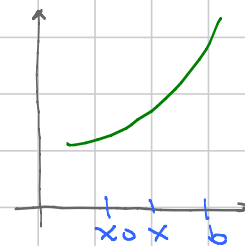
(Non sappiamo ancora che è continua)

Dim. Basta dimostrare che f è limitata nei cubetti che contengono
un dato p.to.Detto meglio: $\forall x_0 \in \text{Int}(C)$, f è limitata dall'alto
in almeno un cubetto con centro in x_0 .Questo è vero perché i p.ti estremali
sono un numero finito.LA PARTE QUI SOTTO È RIFATTA MEGLIO ALLA
LEZIONE 26 \downarrow

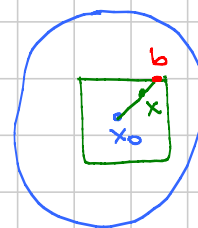
Teorema $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.
Allora f è continua in $\text{Int}(C)$

Dim.

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| |x - x_0| \\ &\leq \left| \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} \right| |x - x_0| \end{aligned}$$



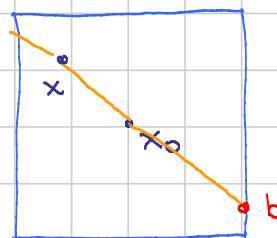
$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{|x - x_0|} |x - x_0| \\ &\leq \frac{f(b) - f(x_0)}{|b - x_0|} |x - x_0| \\ &\leq \underbrace{\frac{M - f(x_0)}{|b - x_0|}}_{\text{Fisso}} \cdot |x - x_0| \end{aligned}$$



A questo punto faccio tendere $x \rightarrow x_0$ però mi serve il valore assoluto, cioè vorrei

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{M - f(x_0)}{|b - x_0|} |x - x_0|$$

Prendo il b dalla parte in cui si realizza il massimo sul segmento, e a quel p.to il numeratore è positivo.



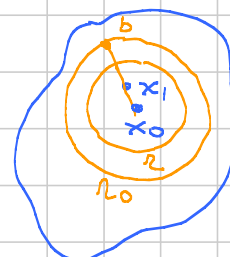
— o — o —

Teorema $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa \Rightarrow localmente lipschitziana

Dim.

Prendo due raggi $0 < r < r_0$ t.c.

$$\overline{B}_r(x_0) \subseteq \text{Int}(C)$$



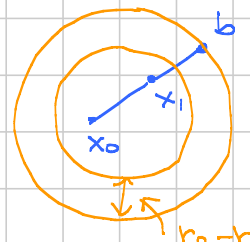
Ora sappiamo che in $\overline{B}_r(x_0)$ $f(x)$ ammette massimo M e minimo m , per la continuità appena "dimostrata". Allora per ogni x_0 e x_1 in $B_r(x_0)$ avremo che

$$|f(x_1) - f(x_0)| = \frac{|f(x_1) - f(x_0)|}{|x_1 - x_0|} |x_1 - x_0|$$

$$\leq \frac{|f(b) - f(x_0)|}{|b - x_0|} |x_1 - x_0|$$

$$\leq \frac{M - m}{r_0 - r} |x_1 - x_0|$$

"



FINE PARTE RIFATTA
(MEGLIO?) ALLA LEZ. 26

Monotonia del gradiente

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $g: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione.

Si dice che g è monotona se

$$\langle g(y) - g(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in D \quad \forall y \in D$$

↑
se $>$ quando $x \neq y$ allora è
strettamente monotona

Teorema $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile.

Allora

$$f \text{ è convessa} \iff \nabla f(x) \text{ è monotono}$$

Dav. \Rightarrow Devo dimostrare che

$$\langle \nabla f(x_1) - \nabla f(x_0), x_1 - x_0 \rangle \geq 0 \quad \forall x_0 \in C, \forall x_1 \in C$$

Considero $\varphi(t) = f(x_0 + t(x_1 - x_0))$

Allora φ è convessa e derivabile, quindi $\varphi'(1) \geq \varphi'(0)$

Ma $\varphi'(t) = \langle \nabla f(x_0 + t(x_1 - x_0)), x_1 - x_0 \rangle$ per chain rule

$$\underbrace{\langle \nabla f(x_0), x_1 - x_0 \rangle}_{\varphi''(0)} \leq \underbrace{\langle \nabla f(x_1), x_1 - x_0 \rangle}_{\varphi''(1)}$$

Porto al RHS e ho la tesi.

☐ Basta dimostrare che tutte le $\varphi(t)$ come sopra sono convesse in $[0, 1]$. Essendo φ derivabile basta far vedere che $\varphi'(t)$ è debolmente crescente, cioè

$$\underbrace{\langle \nabla f(x_0 + t_2(x_1 - x_0)), x_1 - x_0 \rangle}_{\varphi'(t_2)} \geq \underbrace{\langle \nabla f(x_0 + t_1(x_1 - x_0)), x_1 - x_0 \rangle}_{\varphi'(t_1)}$$

per ogni $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$.

Se porto tutto a sx ho

$$\underbrace{\langle \nabla f(x_0 + t_2(x_1 - x_0)) - \nabla f(x_0 + t_1(x_1 - x_0)), x_1 - x_0 \rangle}_{(t_1 - t_2)(b - a)} \geq 0$$

e quindi segue dalla monotonia del gradiente.

In una variabile le funzioni convesse stanno sopra le rette tangenti (se esistono).

A livello di $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = f(x_0 + t(x_1 - x_0))$$

$$\varphi(1) \geq \varphi(0) + 1 \cdot \varphi'(0)$$

"

"

$$f(x_1) \geq \underbrace{f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x_1 - x_0 \rangle}_{\text{equazione del piano tangente nel. pto } x_0}$$

$$f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$$

Le funzioni convesse stanno sopra il piano tangente.

ANALISI 2

-

LEZIONE 026

Titolo nota

23/10/2015

Convessità vs Continuità in più variabili

 $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso

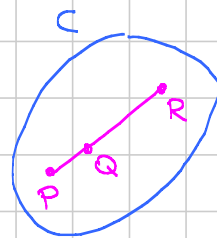
ROAD MAP

① f è loc. limitata dall'alto in $\text{Int}(C)$ ② f è continua in $\text{Int}(C)$ ③ f è loc. limitata dall'alto e dal basso in $\text{Int}(C)$ ④ f è loc. Lipschitziana in $\text{Int}(C)$ ① Segue dal fatto che f essendo convessa è limitata dall'alto sui cubi che hanno # finito di pti estremali (2^n in \mathbb{R}^n)

③ Segue dal p.to ② e dal te. di Weierstrass.

Lemma (dei 3 rapporti incrementali) Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, e sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.Siano P, Q, R tre pti di C , con Q che sta sul segmento PR .

Allora



$$\frac{f(Q) - f(P)}{|Q - P|} \leq \frac{f(R) - f(P)}{|R - P|} \leq \frac{f(R) - f(Q)}{|R - Q|}$$

Dim. Considero $\varphi(t) := f(P + t(R - P)) \quad t \in [0, 1]$

È una funzione convessa.

$$\varphi(0) = f(P)$$

$$\varphi(1) = f(R)$$

$$\varphi(t_0) = f(Q) \text{ con } t_0 = \frac{|Q - P|}{|R - P|} \quad (\text{N.B. } 1 - t_0 = \frac{|R - Q|}{|R - P|})$$

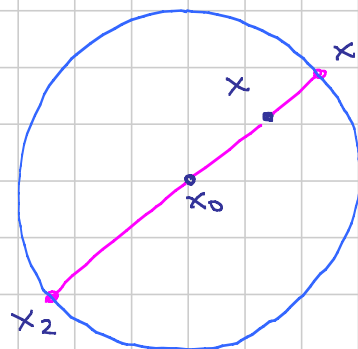
Scrivo il lemma dei 3 rapporti per la $\varphi(t)$:

$$\frac{f(Q) - f(P)}{|Q - P|} |R - P| \leq \frac{f(R) - f(P)}{1} \leq \frac{f(R) - f(Q)}{|R - Q|} |R - P|$$

1 0 1 0 1

Dim. Prendo $x_0 \in \text{Int}(C)$ e scelgo $n_0 > 0$ t.c.

Per il punto ① sappiamo che $f(x)$ è limitata dall'alto in $\overline{B_{r_0}(x_0)}$, diciamo $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c.



$$f(x) \leq M \quad \forall x \in \overline{B}_{\rho_0}(x_0)$$

Applico il lemma dei 3 rapporti con $P = x_0$, $Q = x$, $R = x_1$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{|x - x_0|} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{|x_1 - x_0|} \leq \frac{M - f(x_0)}{r_0}$$

Applico ora il lemma con $P = x_2$, $Q = x_0$ ed $R = x$:

$$\frac{f(x_0) - M}{\epsilon_0} \leq \frac{f(x_0) - f(x_2)}{|x_0 - x_2|} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{|x - x_0|}$$

Abbiamo dim. che

$$-\frac{M-f(x_0)}{\eta_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{|x - x_0|} \leq \frac{M - f(x_0)}{\eta_0}$$

cioè

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq \frac{M - f(x_0)}{r_0}$$

Porto $|x - x_0|$ al RHS e passo al limite per $x \rightarrow x_0$ e ho dim. la continuità in x_0 .

— o — o —

Oss. A seconda del segno di $f(x) - f(x_0)$ basta fare una delle 2 scelte

$$x_0 - x - x_1 \quad \text{oppure} \quad x_2 - x_0 - x$$

— o — o —

④ Sia $x_0 \in \text{Int}(C)$ e siano $0 < r_1 < r_0$ t.c.

$\bar{B}_{r_0}(x_0) \subseteq \text{Int}(C)$. Allora $f(x)$ ha massimo M e minimo m in $\bar{B}_{r_0}(x_0)$ e

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{M - m}{r_0 - r_1} |y - x|$$

(Lip. di $f(x)$ in $\bar{B}_{r_1}(x_0)$)

per ogni x e y in $\bar{B}_{r_1}(x_0)$.

Dim.

Uso il solito lemma con $x - y - x_1$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{|y - x|} \leq \frac{f(x_1) - f(y)}{|x_1 - y|} \leq \frac{M - m}{r_0 - r_1}$$

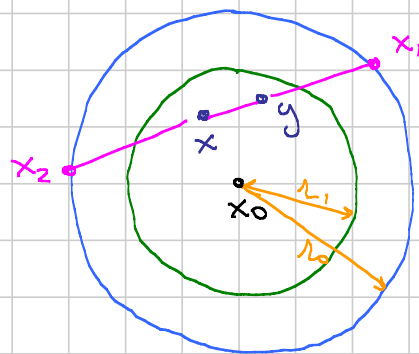
Questo dimostra la tesi se num. del LHS è ≥ 0 .

Uso il solito lemma con $x_2 - x - y$:

$$\frac{m - M}{r_0 - r_1} \leq \frac{f(y) - f(x_2)}{|y - x_2|} \leq \frac{f(y) - f(x)}{|y - x|}$$

pensarci bene!
Num. potenzialmente negativi !!!!!

Conclusione come nel caso di ②



Oss. Dimostriamo per bene che $|x_1 - y| \geq r_0 - r_1$

Dim. $r_0 = |x_1 - x_0| = |(x_1 - y) + (y - x_0)| \leq$ (triangolo)

$$\leq |x_1 - y| + |y - x_0| \leq |x_1 - y| + r_1$$

Porto r_1 al LHS e concludo.

Concettualità e derivate seconde $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, $f: C \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo che $f \in C^2(\text{Int}(C))$.

Allora

f è convessa $\Leftrightarrow Hf$ è semidefinita positiva in $\text{Int}(C)$

Dim. Basta dimostrare che le funzioni $\varphi(t) = f(x_0 + tv)$ sono convesse dove definite.

Essendo le funzioni φ di classe C^2 , sono convesse se e solo se $\varphi''(t) \geq 0$.

Basta dimostrare che

$$\varphi''(t) = \langle Hf(x_0 + tv) v, v \rangle$$

\uparrow matrice \uparrow vettori

Questo si può vedere calcolando le derivate con la chain-rule o più brevemente usando Taylor.

Mettiamoci in un pito t_0

$$\varphi(t_0 + R) = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)R + \frac{1}{2} \varphi''(t_0)R^2 + o(R^2)$$

$$f(\underbrace{x_0 + t_0 v}_{y_0} + \underbrace{Rv}_k) = \underbrace{\varphi(t_0)}_{f(y_0)} + \underbrace{\langle \nabla f(y_0), v \rangle R}_{\langle \nabla f(y_0), k \rangle} + \frac{1}{2} \underbrace{\langle Hf(y_0) v, v \rangle R^2}_{\langle Hf(y_0) k, k \rangle} + o(R^2)$$

$$f(y_0 + k) = f(y_0) + \langle \nabla f(y_0), k \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(y_0) k, k \rangle + o(|k|^2)$$

La dimostrazione che

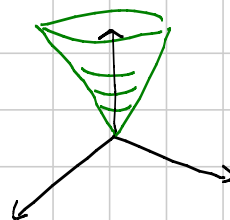
$$f \text{ strett. convessa} \iff Hf \text{ definito pos. in } \text{Int}(C)$$

è esattamente la stessa.

— o — o —

Esempio (non banale) $f(x) = |x|$

Questa è convessa, ma non è nemmeno C^1 .



La convessità si dimostra con la definizione:

dati x e y in \mathbb{R}^n e dati $\lambda \geq 0$ e $\mu \geq 0$ con $\lambda + \mu = 1$,
devo dim. che

$$|\lambda x + \mu y| \stackrel{?}{\leq} \lambda |x| + \mu |y|$$

Faccio i quadrati (posso perché...)

$$\cancel{\lambda^2 |x|^2} + \cancel{\mu^2 |y|^2} + 2\lambda\mu \langle x, y \rangle \stackrel{?}{\leq} \cancel{\lambda^2 |x|^2} + \cancel{\mu^2 |y|^2} + 2\lambda\mu |x| \cdot |y|$$

Quello che resta è Cauchy - Schwarz.

Oss. Sarebbe anche una triangolare, MA ... occhio che...
la triangolare si dimostra così !!!

— o — o —

ANALISI 2

—

LEZIONE 027

Titolo nota

23/10/2015

Esercizio 1 Consideriamo $f(x, y) = x^a y^b$ definita in

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$$

Determinare per quali valori di a e b reali risulta convessa.

(Fosse in \mathbb{R} : $f(x) = x^a$ è convessa per $x > 0 \Leftrightarrow a(a-1) \geq 0$)

Dim. Essendo C^∞ basta fare Hf

$$f_x = a x^{a-1} y^b$$

$$f_{xx} = a(a-1) x^{a-2} y^b$$

$$f_y = b x^a y^{b-1}$$

$$f_{yy} = b(b-1) x^a y^{b-2}$$

$$f_{xy} = ab x^{a-1} y^{b-1}$$

$$Hf = \begin{pmatrix} a(a-1)x^{a-2}y^b & abx^{a-1}y^{b-1} \\ abx^{a-1}y^{b-1} & b(b-1)x^ay^{b-2} \end{pmatrix}$$

Hf è semidefinita positiva \Leftrightarrow

$$a(a-1) \geq 0$$

$$b(b-1) \geq 0$$

$$\text{Det} \geq 0 \quad a(a-1)b(b-1) - a^2b^2 \geq 0$$

Esercizio 2 Consideriamo una funzione radiale

$$f(x, y) = g(x^2 + y^2)$$

con g di classe C^2 .

Capire quali condizioni su g assicurano la convessità di $f(x, y)$

Dom Calcolo le derivate:

$$f_x = g'(x^2+y^2) \cdot 2x$$

$$f_{xx} = g''(x^2+y^2) 4x^2 + 2g'(x^2+y^2)$$

$$f_y = g'(x^2+y^2) \cdot 2y$$

$$f_{yy} = g''(x^2+y^2) 4y^2 + 2g'(x^2+y^2)$$

$$f_{xy} = g''(x^2+y^2) 4xy$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^2 g''(\dots) + 2g'(\dots) & 4xy g''(\dots) \\ 4xy g''(\dots) & 4y^2 g''(\dots) + 2g'(\dots) \end{pmatrix}$$

Le condizioni sono: \rightarrow due termini sulla diagonale ≥ 0
 $\rightarrow \text{Det} \geq 0$

$$\text{Det} = (4x^2 g'' + 2g')(4y^2 g'' + 2g') - 16x^2 y^2 (g'')^2$$

$$= 16x^2 y^2 (g'')^2 + 8(x^2+y^2) g'' g' + 4(g')^2 - 16x^2 y^2 (g'')^2$$

$$= 4g'(x^2+y^2) [2(x^2+y^2) g''(x^2+y^2) + g'(x^2+y^2)]$$

La condizione, in termini della $g(x)$, è che

$$g'(x) [2x g''(x) + g'(x)] \geq 0 \quad \forall x \geq 0$$

Esempio 3 Stabilire dove è convessa la funzione

$$f(x,y) = \log(1+x^2+y^2)$$

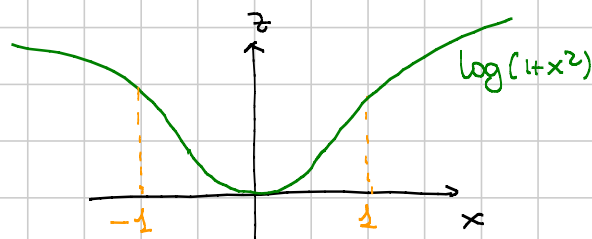
Siamo nel caso precedente con $g(x) = \log(1+x^2)$. Facciamo i conti:

$$g'(x) = \frac{2x}{1+x^2} > 0 \text{ per } x > 0; \quad g''(x) = \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$2x g''(x) + g'(x) = \frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} + \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2x(2-2x^2+1+x^2)}{(1+x^2)^2}$$

Semberebbe venire $\frac{2x(3-x^2)}{(1+x^2)^2} \geq 0 \dots$ controllare.

Come è fatta la funzione?

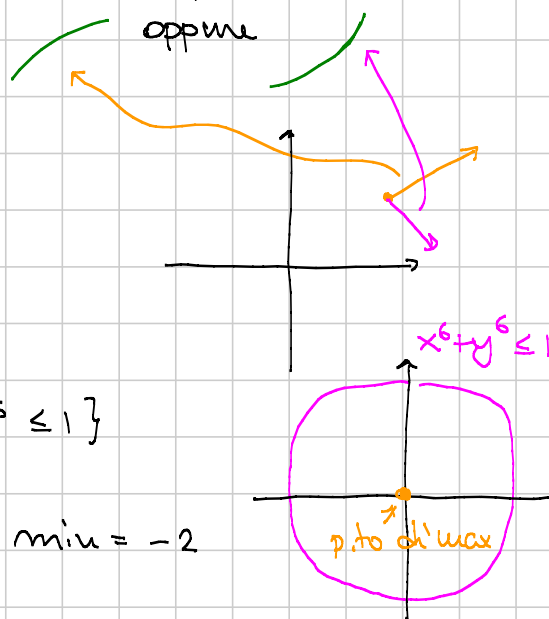


$\log(1+x^2+y^2)$ = rotazione intorno
all'asse z del grafico precedente pensato nel
piano xz

Idea geometrica:

- vicino all'origine f è convessa
- lontano dall'origine $\text{Det } Hf < 0$, quindi Hf ha autovalori +
quindi $f(x,y)$ non è né concava, né convessa.

Detto: curve diverse che passano per un p.to lontano
dall'origine possono vedere



Esempio 4 $\max_{\min} \{ \cos x + \cos y : x^6 + y^6 \leq 1 \}$

Se fosse su tutto \mathbb{R}^2 : $\max = 2$, $\min = -2$

Insieme compatto: \max e \min esistono 😊

→ Singolari interni: \emptyset

→ Staz. interni $\begin{cases} -\sin x = 0 \\ -\sin y = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = k\pi \\ y = l\pi \end{matrix} \quad \text{interni solo } (0,0)$

Il minimo sarà sul bordo, che tratto con i moltiplicatori

1° sistema : verificare che non ha soluzioni

2° sistema :

$$\begin{cases} \Phi_x = \lambda \Phi_x \\ \Phi_y = \lambda \Phi_y \\ \Phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\sin x = 6\lambda x^5 \\ -\sin y = 6\lambda y^5 \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases}$$

→ Se $x=0$, allora $y = \pm 1 \rightsquigarrow (0, \pm 1)$

→ Se $y=0$, allora $x = \pm 1 \rightsquigarrow (\pm 1, 0)$

→ Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$ divido e trovo

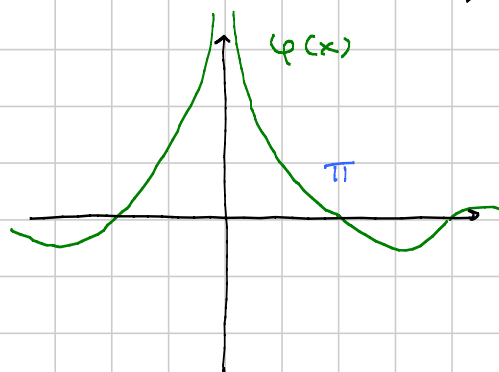
$$-\frac{\sin x}{x^5} = 6\lambda = -\frac{\sin y}{y^5}$$

Spero proprio tanto che $\frac{\sin x}{x^5}$ sia iniettiva in $[-1, 1]$
così deduco che $x=y$.

Ora è PARI ☹, ma fortunatamente è iniettiva in $[0, 1]$,
quindi posso dedurre che $x = \pm y$.

$$\varphi(x) = \frac{\sin x}{x^5}$$

$$\varphi'(x) = \frac{\cos x \cdot x^5 - 5x^4 \cdot \sin x}{x^{10}}$$



Spero $\varphi'(x) \leq 0$ per $x \in [0, 1]$, cioè

$$x^4 (\underbrace{x \cos x - 5 \sin x}_{\text{questa si studia}}) < 0$$

$$g(x)$$

$$g'(x) = \cos x - x \sin x - 5 \cos x$$

$$= -x \sin x - 4 \cos x < 0 \text{ in } (0, \frac{\pi}{2})$$

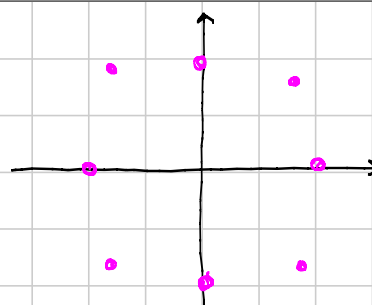
Inoltre $g(0) = 0$, quindi

$$g(x) < 0 \text{ per } x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Una volta stabilito che $y = \pm x$
vengono fuori 4 altre soluzioni del sistema.

Quindi alla fine i candidati sono 8

Non resta che sostituire



Domanda: cosa succede se considero

$$x^6 + y^6 = R$$

Per R piccoli il minimo sarà con $x = \pm y$, ad un certo valore R_0 il minimo non sarà più nei pti con $x = \pm y$

— o — o —

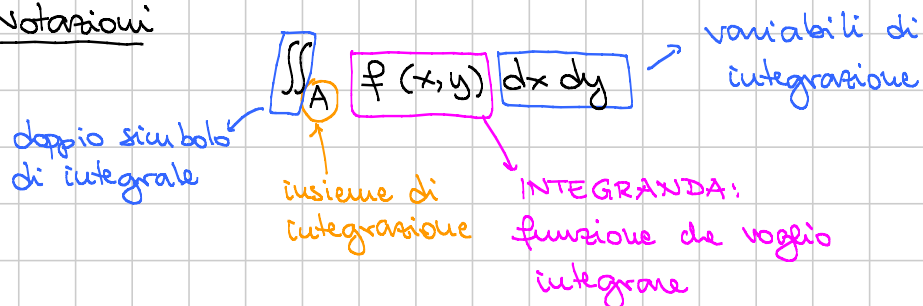
ANALISI 2

- LEZIONE 028

Titolo nota

27/10/2015

- INTEGRALI DOPPI**
- ① Come si indicano (notazioni)
 - ② Significato geometrico
 - ③ Definizione
 - ④ Tecniche di calcolo

③ Notazioni

Spesso si abbrevia scrivendo $\int_A f(x,y) dx dy$

Si parla di integrale **PROPRIO** se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e sono verificate due richieste

- (i) A limitato (cioè $\exists R > 0$ t.c. $A \subseteq B_R(0,0)$)
- (ii) f limitata (cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x,y)| \leq M$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$)

Si parla di integrale **IMPROPRIO** se manca almeno una delle richieste fondamentali.

Il "risultato" dell'integrale, posto che esista, è un **NUMERO REALE**.

— o — o —

② Significato geometrico Supponiamo $f(x,y) \geq 0$ in A .

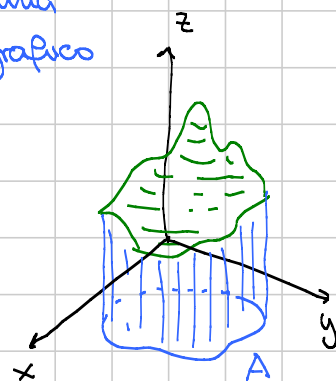
$\iint_A f(x,y) dx dy =$ volume della regione di spazio compresa tra piano base xy e grafico di f .
Formalmente la regione è

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{(x,y) \in A}_{\substack{\uparrow \\ \text{la regione si} \\ \text{proietta su } A}}, \underbrace{0 \leq z \leq f(x,y)}_{\substack{\text{la quota varia} \\ \text{da 0 al grafico} \\ \text{di } f(x,y)}}\}$$

Se $f(x,y) \leq 0$ in A , allora integrale = volume cambiato di segno

Se $f(x,y)$ ha segno variabile, allora

integrale = somma algebrica dei volumi delle varie zone in cui $f(x,y)$ ha segno costante
— 0 — 0 —



③ Definizione Conviene definire $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy$ prendendo come ipotesi che

(ii) f è limitata in \mathbb{R}^2

(i) $\exists A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato tale che $f(x,y) = 0$ per ogni $(x,y) \notin A$
(poi può fare 0 anche in parti di A)

A questo punto quando vorremo calcolare / definire l'integrale su un certo $B \subseteq \mathbb{R}^2$ potremo

$$\iint_B f(x,y) dx dy := \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(x,y) dx dy \quad \text{dove}$$

$$\hat{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in B \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin B \end{cases}$$

La definizione procede in 3 tappe:

- caso banale
- caso semibanale
- caso generale

Caso banale : f costante su un rettangolo con lati // agli assi, cioè esistono $[a, b]$ e $[c, d]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x, y) = \lambda \quad \text{per } (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$$

$= 0$ al di fuori

In questo caso si pone

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy := \lambda \underbrace{(b-a)(d-c)}_{\substack{\uparrow \text{area rettangolo} \\ \text{base}}}$$

altezza con segno del parallelepipedo

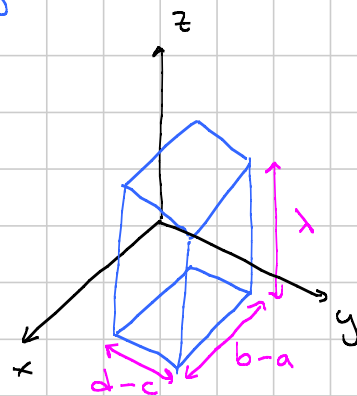
Caso semibanale : f è combinazione lineare di casi banali, cioè

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_{R_i}(x, y)$$

dove $R_i := [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$ e

$$\varphi_{R_i}(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in R_i \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin R_i \end{cases}$$

funzione caratteristica del rettangolo R_i



Def. Indichiamo con $SF(\mathbb{R}^2)$ l'insieme delle funzioni di questo tipo, che si chiamano

- step functions
- funzioni semplici
- funzioni a gradino

In questo caso si pone

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy := \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{(b_i - a_i)(d_i - c_i)}_{\substack{\text{Area } R_i \\ \uparrow \\ \text{altezza parallelepipedo } i\text{-esimo}}}$$

Oss. Il "grafico" di una $f \in SF(\mathbb{R}^2)$ è una serie di mattoni con lati paralleli agli assi di \mathbb{R}^3 .

Lemma (fondamentale che avrebbe dimostrato) Se due combinazioni lineari diverse definiscono la stessa funzione, allora l'integrale definito come sopra è lo stesso.

— o — o —

Caso generale Sia ora $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa le ipotesi (i) e (ii). Allora si pone

$$\iint_{\mathbb{R}^2}^* f(x,y) dx dy := \inf \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) dx dy : \varphi \in SF(\mathbb{R}^2) \text{ e } f(x,y) \leq \varphi(x,y) \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

↑
integrale superiore

$$\iint_{* \mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy := \sup \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) dx dy : \varphi \in SF(\mathbb{R}^2) \text{ e } f(x,y) \geq \varphi(x,y) \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

↑
integrale inferiore

Lemma (Quasi ovvio) Per ogni $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ che verifica (i) e (ii) vale la disuguaglianza

$$\iint_{* \mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy \leq \iint_{\mathbb{R}^2}^* f(x,y) dx dy$$

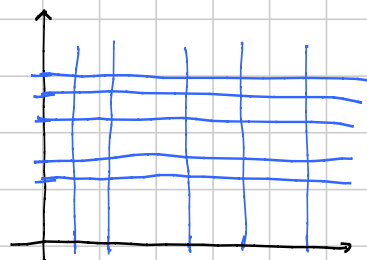
Per dimostrarlo per bene servirebbe sapere che se φ e ψ sono in $SF(\mathbb{R}^2)$ e

$$\varphi(x,y) \leq \psi(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

allora

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) dx dy \leq \iint_{\mathbb{R}^2} \psi(x,y) dx dy$$

(a sua volta serve un lemma che dice che 2 step functions possono essere pensate definite a partire dagli stessi rettangoli)



Def. Quando succede che nel lemma quasi ovvio c'è uguaglianza, allora si dice che f è integrabile secondo RIEMANN in \mathbb{R}^2 e il valore comune è l'integrale.

Proposizione (Quasi ovvio) Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa (i) e (ii). Allora f è integrabile secondo Riemann se e solo se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi_\varepsilon \in SF(\mathbb{R}^2) \text{ e } \psi_\varepsilon \in SF(\mathbb{R}^2) \text{ tali che}$

$$\varphi_\varepsilon(x,y) \leq f(x,y) \leq \psi_\varepsilon(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} [\psi_\varepsilon(x,y) - \varphi_\varepsilon(x,y)] dx dy \leq \varepsilon$$

$\xrightarrow{\text{somme sup}} \text{somme sup}$
 \uparrow
 integrale

Oss

(1) Abbiamo usato (i) e (ii) per essere sicuri che esistono elementi di $SF(\mathbb{R}^2)$ sopra e sotto $f(x,y)$.

(2) Si ottiene la stessa definizione (esercizio) lavorando alla DARBOUX, cioè usando solo funzioni $SF(\mathbb{R}^2)$ ottenute prendendo in ogni rettangolo \sup e \inf di $f(x,y)$.

— o — o —

ANALISI 2

—

LEZIONE 29

Titolo nota

27/10/2015

Teorema (molto misterioso)

Funzioni decanti (ad esempio continue)

su insiemi decanti (ad esempio poligoni / cerchi / ...)

sono integrabili secondo Riemann.

Inoltre l'integrale si può calcolare con la formula di riduzione

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy$$

FORMULA DI
RIDUZIONE

$$= \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx$$

$$2 = 1 + 1$$

Oss. Queste formule sono l'analogo di quello che in matematica discreta si chiama DOUBLE COUNTING

k_{ij}	k_{00}	k_{01}	k_{02}		$\rightarrow R_0$
		k_{11}			$\rightarrow R_1$
			k_{23}		$\rightarrow R_2$
	k_{30}			k_{34}	
	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	
	C_0	C_1	C_2	C_3	

$$\sum_{i,j} k_{ij} = \sum_j C_j = \sum_i R_i$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \right] dx = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx \right] dy$$

x è fisso e integro solo rispetto alla variabile y =
 integro su colonna x

y è fisso =
 integro sulla riga ad altezza y

Primo caso L'insieme di integrazione è un rettangolo

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y) = \int_c^d dy \int_a^b dx f(x, y)$$

Esempio 1 $R = [0, 2] \times [0, 1]$ $f(x, y) = y^2 + xy$

$$\begin{aligned} \iint_R (y^2 + xy) dx dy &= \int_0^2 dx \int_0^1 dy (y^2 + xy) \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{primitiva rispetto ad } y \\ \text{(sostituisco estremi)} \end{array} \right. \\ &= \int_0^2 dx \left[\frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{2} x y^2 \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} x \right) dx \quad \text{(Analisi 1)} \\ &= \left[\frac{1}{3} x + \frac{1}{4} x^2 \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{2}{3} + 1 = \boxed{\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

Posso usare formula di riduzione nell'altro senso

$$\begin{aligned} \iint_R (y^2 + xy) dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^2 dx (y^2 + xy) \quad \text{(Primitiva in } x) \\ &= \int_0^1 dy \left[x y^2 + \frac{1}{2} x^2 y \right]_{x=0}^{x=2} \quad \text{(sostituisco estremi)} \\ &= \int_0^1 dy [2y^2 + 2y] \quad \text{(Analisi 1)} \\ &= \left[\frac{2}{3} y^3 + y^2 \right]_0^1 = \frac{2}{3} + 1 = \boxed{\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

Oss. Fare l'integrale in 2 modi è un'ottima verifica della correttezza del risultato.

INSIEMI NORMALIUn insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice

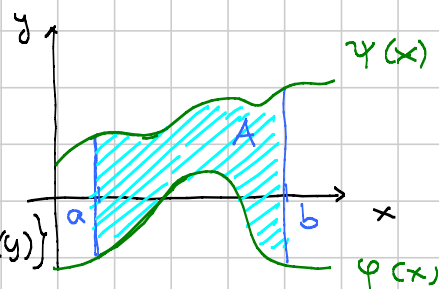
- normale rispetto all'asse x se si può scrivere nella forma

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

per opportuni $a < b$ e funzioni $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

- normale rispetto all'asse y se si può scrivere come

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

(come prima, ma girato di 90°).

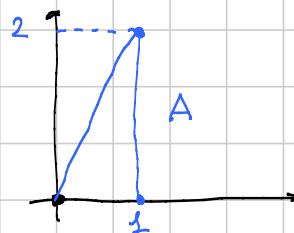
Oss. Se φ e ψ sono continue, l'insieme A rientra tra quelli decanti del teorema misterioso.

Formula di riduzione su insiemi normali

Asse x : $\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy f(x, y)$

Asse y : $\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} dx f(x, y)$

Esempio $A =$ triangolo con vertici in $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$
 $f(x, y) = y$



Scrivo A come normale asse x :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x\}$$

$$\begin{aligned} \iint_A y \, dx \, dy &= \int_0^1 dx \int_0^{2x} dy \cdot y && \text{(primitiva rispetto a } y) \\ &= \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=2x} && \text{(sostituisco estremi)} \\ &= \int_0^1 2x^2 \, dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_{x=0}^{x=1} = \boxed{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

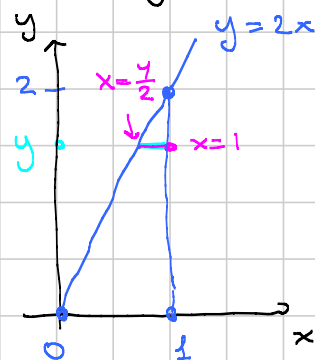
Per verifica, scrivo A come normale rispetto all'asse y

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2, \frac{1}{2}y \leq x \leq 1\}$$

$$\iint_A y \, dx \, dy =$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 dy \int_{\frac{1}{2}y}^1 dx \, y &= \text{(primitiva in } x) \\ &= \int_0^2 dy [xy]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=1} && \text{(sostituisco gli estremi)} \end{aligned}$$

$$= \int_0^2 dy \left[y - \frac{1}{2}y^2 \right] = \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3 \right]_0^2 = 2 - \frac{4}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$$



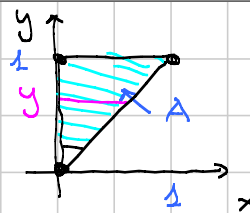
Osservazione Il secondo svolgimento si poteva semplificare

$$\int_0^2 dy \int_{\frac{1}{2}y}^1 dx \, \underbrace{y}_{\substack{\text{non dipende da } x, \\ \text{quindi può uscire} \\ \text{fuori}}}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^2 y \, dy \underbrace{\int_{\frac{1}{2}y}^1 dx \cdot 1}_{\substack{\text{l'integrale di } 1 \text{ su un} \\ \text{insieme } \text{è la lunghezza } 1 - \frac{1}{2}y}} \\ &= \int_0^2 y \left(1 - \frac{1}{2}y\right) dy = \text{come prima.} \end{aligned}$$

Esempio 2 $\iint_A e^{-y^2} dx dy$

Normale asse x



$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$$

$$\iint_A e^{-y^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_x^1 dy e^{-y^2} \quad (\text{Non so fare la primitiva } \text{☹})$$

Normale asse y

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$$

$$\begin{aligned} \iint_A e^{-y^2} dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^y dx e^{-y^2} = \int_0^1 e^{-y^2} dy \int_0^y dx \\ &= \int_0^1 y e^{-y^2} dy \quad \text{☺} \end{aligned}$$

Per veri duri...

$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy e^{-y^2} = \int_0^1 dx [F(y)]_x^1 = \int_0^1 dx [F(1) - F(x)]$$

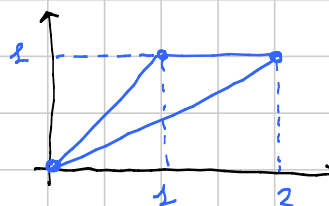
\uparrow una primitiva \uparrow se calcolo bene la primitiva fa 0 ☺

L'altro termine lo integro per parti e mi viene $x e^{-x^2}$

— o — o —

Normale asse x

$$\int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^x dy \dots + \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^1 dy \dots$$



Normale asse y

$$\int_0^1 dy \int_y^{2y} dx \dots$$

ANALISI 2

-

LEZIONE 030

Titolo nota

28/10/2015

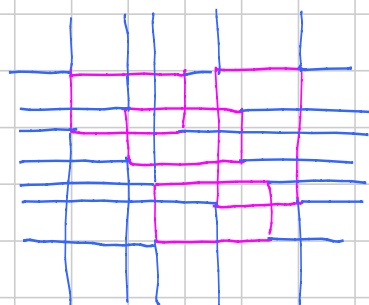
Proposizione (criterio di integrabilità) Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e nulla fuori da un limitato.

Allora f è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono φ_ε e ψ_ε in $SF(\mathbb{R}^2)$ t.c.

$$\varphi_\varepsilon(x, y) \leq f(x, y) \leq \psi_\varepsilon(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\underbrace{\psi_\varepsilon(x, y) - \varphi_\varepsilon(x, y)}_{\in SF(\mathbb{R}^2) \text{ e } \geq 0}] dx dy \leq \varepsilon$$

Oss. Posso sempre supporre φ_ε e ψ_ε ottenuta a partire da una stessa "rettangolazione" di \mathbb{R}^2



Proprietà semplici delle funzioni integrabili

① L'insieme delle funz. int. è uno sp. vett. e l'integrale è un'applic. lineare (LINEARITÀ)

[Dim. date f e g , prendo step. funct. sopra e sotto per f e g e poi le sommo]

② (MONOTONIA) Se f e g sono integrabili e $f \leq g$ su \mathbb{R}^2 , allora

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy \leq \iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y) dx dy$$

[Dim. Tutte le s.f. superiori per g sono buone anche per f]

③ (VALORE ASSOLUTO) f integrabile $\Rightarrow |f|$ integrabile e

$$\left| \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy \right| \leq \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)| dx dy$$

[Dim. prendo φ_ε e ψ_ε per f e costruisco opportune $\hat{\varphi}_\varepsilon$ e $\hat{\psi}_\varepsilon$ per $|f|$ decidendo rettangolo per rettangolo

- se $f \geq 0$ in rett., allora $\hat{\varphi}_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$, $\hat{\psi}_\varepsilon = \psi_\varepsilon$
- se $f \leq 0$ in rett., allora $\hat{\varphi}_\varepsilon = -\psi_\varepsilon$, $\hat{\psi}_\varepsilon = -\varphi_\varepsilon$
- se f ha segno variabile in rett., allora $\hat{\varphi}_\varepsilon = 0$, $\hat{\psi}_\varepsilon = \max\{\varphi_\varepsilon, -\varphi_\varepsilon\}$

Si verifica che

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \hat{\psi}_\varepsilon - \hat{\varphi}_\varepsilon \leq \iint_{\mathbb{R}^2} (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) \quad]$$

④ (Proprietà di reticolo) Se f e g sono integrabili, allora $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ sono integrabili

[Dim. Ci sono 2 possibili approcci:

- costruire s.f. sopra e sotto opportunamente
- basarsi sul val. assoluto

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(|x-y| + x+y) \text{ e idem per min.}]$$

⑤ (PRODOTTO) Se f e g sono integrabili, allora $f \cdot g$ è integrabile (e basta: non c'è formula per integrale del prodotto)

[Dim. Due fasi

- se $f \geq 0$ e $g \geq 0$ si lavora con le step functions aggiungendo e togliendo il termine misto
- se f e g sono a segno variabile, introduco parti positive e negative

$$f = f^+ - f^-$$

$$f^+ \geq 0, f^- \geq 0$$

$$g = g^+ - g^-$$

$$g^+ \geq 0, g^- \geq 0$$

e moltiplico tutto, oppure osservo che

$$fg = \frac{1}{2} [(f+g)^2 - f^2 - g^2]$$

ora f int. $\Rightarrow |f|$ int. e $z_0 \Rightarrow f^2$ int.

⑥ Additività rispetto alla zona di integrazione

Se f è integrabile in A e in B con $A \cap B = \emptyset$, allora f è integrabile in $A \cup B$ e vale

$$\iint_{A \cup B} f(x,y) dx dy = \iint_A \dots + \iint_B \dots$$

[Dim. non c'è nulla da fare se non osservare che su tutto \mathbb{R}^2 si riduce alla somma di funzioni]

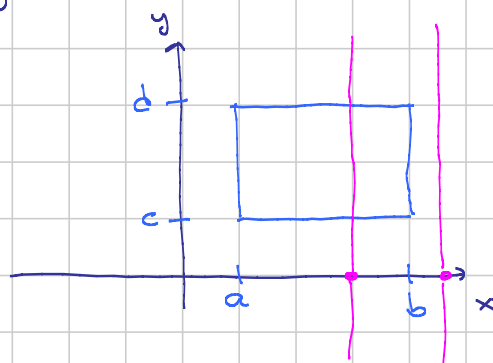
FORMULA DI RIDUZIONE (FUBINI o FUBINI-TONELLI)

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e nulla fuori da un limitato.
Allora

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy &\leq \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}}^* f(x,y) dy \leq \iint_{\mathbb{R}^2}^* f(x,y) dx dy \end{aligned}$$

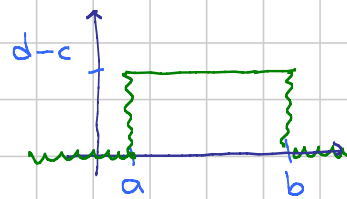
[Dim.] Caso banale : $f(x,y)$ = funzione caratteristica di rettangolo $[a,b] \times [c,d]$

RHS e LHS sono $(b-a) \times (d-c)$ per definizione, senza super. o inferiore.
Esaminiamo i 2 termini centrali



Fissato x

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [a,b] \\ d-c & \text{se } x \in [a,b] \end{cases}$$



quindi è a sua volta una step function nella variabile x
Quando integro rispetto ad x ottengo

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy f(x,y) = (b-a)(d-c)$$

senza bisogno di inferiori o superiori.

Quindi vale la formula con tutti uguali.

Caso semibianale : $f(x,y) \in SF(\mathbb{R}^2)$

Truccaccio : considero $f \rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy$

$$f \rightarrow \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy f(x,y)$$

Sono due applicazioni lineari $SF(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ che coincidono su una base (le caratteristiche di rettangoli). Quindi coincidono, quindi ancora una volta la formula vale con tutti =.

Caso generale prendo f qualunque e prendo una qualunque $\varphi \in SF(\mathbb{R}^2)$ con $f(x,y) \leq \varphi(x,y)$ sempre.

Allora per ogni x fissato vale

$$\int_{\mathbb{R}}^* f(x,y) dy \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y) dy$$

↑
perché $f \leq \varphi$ sulla colonna verticale

Ma allora

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}}^* f(x,y) dy \leq \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y) dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) dx dy$$

Facendo l'inf su tutte le $\varphi(x,y) \geq f(x,y)$ in SF, a destra ottengo

$$\int_{\mathbb{R}^2}^* f(x,y) dx dy.$$

Per concludere basta osservare che

- la disug. a sx si fa uguale con le SF dal basso
- quella centrale è banale perché

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \leq \int_{\mathbb{R}}^* f(x,y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

— o — o —

Esercizio (Hard?) Trovare un esempio in cui i 4 numeri sono diversi (addirittura assegnati).

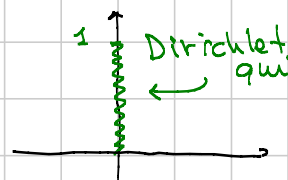
Esempio 1 Trovare $f(x,y)$ con $\iint_{\mathbb{R}^2}^* f \neq \iint_{+\mathbb{R}^2} f$

Posso prendere $f(x,y) = 0$ fuori da $[0,1] \times [0,1]$
 $f(x,y) = 1$ se $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$ e $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$
 $f(x,y) = 0$ altrimenti

Esempio 2

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0, y \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esempio 3 f non integrabile, ma i due termini centrali coincidono e senza bisogno di integrali inferiori e superiori.



ANALISI 2

-

LEZIONE 031

Titolo nota

28/10/2015

Formula di spezzamento (caso speciale)Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ come sempre.

Supponiamo che

(i) f è integrabile su \mathbb{R}^2 (ii) per ogni $x \in \mathbb{R}$ la restrizione alla colonna $y \rightarrow f(x, y)$ è integrabile in \mathbb{R} . (ii) non segue da (i)

Allora

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} dx \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dy f(x, y)}_{\text{ho assunto che esiste}}$$

il fatto che esiste fa parte della tesi

Dim Scrivo la tesi del teorema generale con tutti = (perché per ipotesi (i) sono uguali RHS e LHS):

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}} dx \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy}_{\text{esiste * per hp (ii)}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

Questo basta per concludere che la funzione

$$x \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$$

è integrabile su \mathbb{R} e vale l'uguaglianza.

Oss. Vale un enunciato simmetrico per concludere che

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} dx f(x, y)$$

Oss. Non basta che gli integrali spaziali esistano senza problemi e coincidano per dedurre l'integrabilità in \mathbb{R}^2
(vedi esempio di fine les. precedente)

— o — o —

INSIEMI MISURABILI

Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato si dice misurabile se la sua funzione caratteristica è integrabile secondo Riemann su \mathbb{R}^2 , cioè

$$\iint_A 1 \, dx \, dy \text{ esiste.}$$

In tal caso l'integrale si chiama misura di A

Criterio di misurabilità Un insieme limitato $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è misurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due insiemi

$$B_\varepsilon \subseteq A \subseteq C_\varepsilon$$

tali che

(i) B_ε e C_ε sono unioni di rettangoli con lati // agli assi

(ii) $\text{Area}(C_\varepsilon) - \text{Area}(B_\varepsilon) \leq \varepsilon$

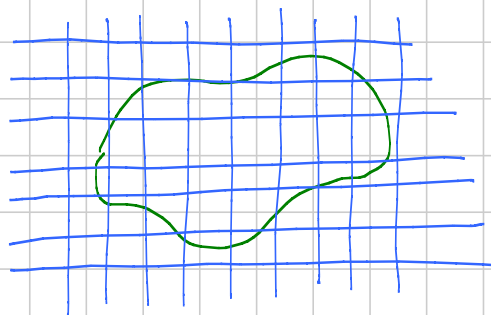
essendo unioni di rettangoli,
l'area è quella classica

[Unioni FINITE:
precisazione (spero ovvia)
aggiunta dopo video]

→ In C_ε prendo tutti i rettangoli R

t.c. $R \cap A \neq \emptyset$

→ In B_ε prendo gli R t.c.
 $R \subseteq A$



Dim (idea) Se la funzione caratt. di A è integrabile, allora esistono S.F. φ_ε e ψ_ε con

$$\varphi_\varepsilon(x, y) \leq \underbrace{1_A(x, y)}_{\text{caratteristica}} \leq \psi_\varepsilon(x, y)$$

con

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) dx dy \leq \varepsilon$$

Pongo $B_\varepsilon := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_\varepsilon(x, y) > 0\}$

$C_\varepsilon := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \psi_\varepsilon(x, y) > 0\}$

Si verifica che

$$B_\varepsilon \subseteq A \subseteq C_\varepsilon$$

e inoltre

$$\text{Area}(C_\varepsilon) - \text{Area}(B_\varepsilon) \leq \int_{\mathbb{R}^2} (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) dx dy \leq \varepsilon$$

↑
varrebbe = se facessi φ_ε e ψ_ε alla
Darboux

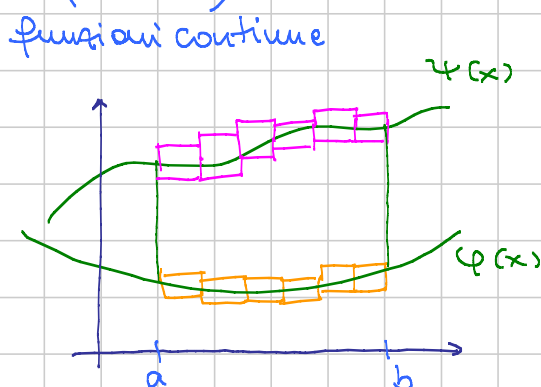
— o — o —

Conseguenza Gli insiemi normali con "tappi" continui sono misurabili

Dim. Prendiamo il caso rispetto all'asse x . Allora

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

Basta che φ e ψ siano integrabili nel senso dell'analisi 1 per avere B_ε e C_ε come richiesto. La conclusione è ovvia.



Teorema (più sensato di quello della lezione 29)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme limitato e misurabile

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e continua

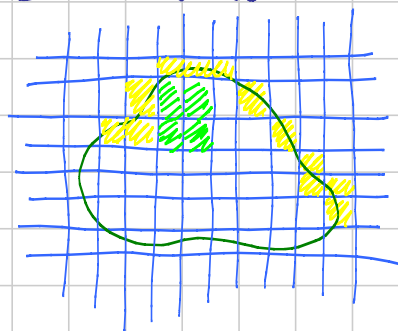
Allora f è integrabile su \mathbb{R}^2

Dim. Pongo $\hat{f}(x,y) = f(x,y) \cdot 1_A(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{in } A \\ 0 & \text{fuori} \end{cases}$

Dato $\varepsilon > 0$, devo costruire φ_ε e ψ_ε come nel criterio di integrabilità

Nei rettangolini gialli, pongo

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(x,y) &= -M \\ \psi_\varepsilon(x,y) &= M \end{aligned} \quad |f(x,y)| \leq M$$



"Pongo" $\iint_{\text{gialli}} (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) \leq 2M \cdot \underbrace{\text{Area gialli}}_{\substack{\uparrow \\ \text{essendo } A \text{ misurabile,} \\ \text{può diventare piccola a} \\ \text{piacere.}}}$

Pongo $B :=$ unione rettangoli dentro. Allora B è compatto, quindi essendo f continua vale Heine-Cantor (come ad analisi 1) e quindi poi di suddividere abbastanza fitto so che

$$\max \{ f(x,y) : (x,y) \in R \} - \min \{ f(x,y) : (x,y) \in R \} \leq \varepsilon$$

per ogni rettangolo R .

Definisco ora

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(x,y) &= \min_{R \text{ che fa parte di } B} f(x,y) \\ \psi_\varepsilon(x,y) &= \max_{R \text{ che fa parte di } B} f(x,y) \end{aligned}$$

Pongo
$$\iint_B (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) dx dy \leq \varepsilon \cdot \text{area}(B)$$

\uparrow diventa piccolo a piacere
(più voglio ε piccolo, più devo prendere i rettangoli R fitti)

— o — o —

Hint per costruire f non integrabile con sezioni molto buone

Lemma Esiste $D \subseteq [0,1] \times [0,1]$ denso tale che

(i) ogni retta $x = x_0$ contiene al max 1 pto di D

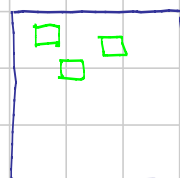
(ii) " " $y = y_0$ " " " " " "

Dato il lemma, l'esempio cercato è 1_D (non è integrabile e sulle sezioni viene 0).

Idea per il lemma D è denso se e solo se interseca ogni sottoquadrato con estremi razionali

I sottoquadrati con estremi in \mathbb{Q} sono numerabili, cioè li posso mettere in successione

$Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_k, \dots$



Per induzione posso prendere punti $P_k \in Q_k$ facendo in modo che P_k non stia sulle $(k-1)$ rette orizz. e $(k-1)$ rette verticali già usate prima.

Con la stessa idea forse si può fare l'esempio più difficile.

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 032

Titolo nota

30/10/2015

INTEGRALI DOPPI IN COORDINATE POLARI

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

FORMULA

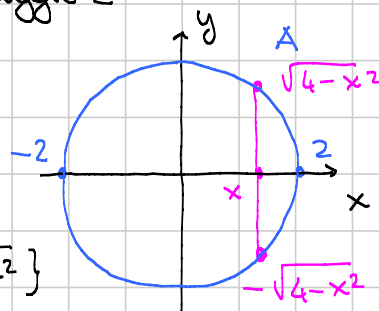
$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B f(\overset{x}{\rho \cos \theta}, \overset{y}{\rho \sin \theta}) \boxed{\rho} d\rho d\theta$$

\uparrow integrale che voglio calcolare
 \uparrow insieme A descritto in coordinate polari
 \uparrow pagamento

Esempio 1 $\iint_A (x^2 + y^2) dx dy$ $A =$ cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio 2

1° modo Vedere A come insieme normale rispetto asse x

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$



A questo p.to

$$\begin{aligned} \iint_A (x^2 + y^2) dx dy &= \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2) dy \\ &= \int_{-2}^2 dx \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \end{aligned}$$

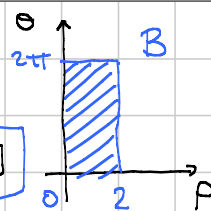
= resta integrale pieno di radici

Stessa sorte se lo vedo come insieme normale rispetto asse y.

2° modo Uso coordinate polari

Descrivo A in coord. polari

$$\rho \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi]$$



$$\begin{aligned} \iint_A (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \\ &\quad \begin{array}{l} \text{B: descrizione di} \\ \text{A in coord. polari} \end{array} \quad \begin{array}{l} \rho^2 \\ \uparrow \\ f(x,y) \text{ in} \\ \text{coord. polari} \end{array} \quad \begin{array}{l} \rho \\ \uparrow \\ \text{pagamento} \end{array} \\ &= \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \quad \rho^3 = \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi \int_0^2 \rho^3 d\rho \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^2 = 8\pi \end{aligned}$$

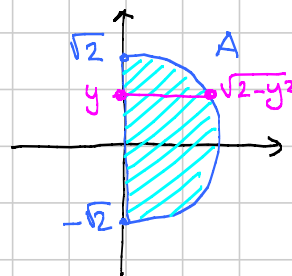
Operativamente: integrare in coord. pol. è comodo quando si ha simmetria radiale.

Esempio 2 $\iint_A y^2 dx dy$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0\}$

Come insieme normale

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq \sqrt{2}, -\sqrt{2-x^2} \leq y \leq \sqrt{2-x^2}\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}, 0 \leq x \leq \sqrt{2-y^2}\}$$



In coord. polari: $0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ opp. $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{2}$

Non pensare nemmeno $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \iint_A y^2 dx dy &= \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &\quad \begin{array}{l} \text{A in coord.} \\ \text{pol.} \end{array} \quad \begin{array}{l} \rho^2 \sin^2 \theta \\ \text{y}^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \rho \\ \text{pag.} \end{array} \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Oss. (rivolgere analisi 1)

$k \in \mathbb{Z}, R \in \mathbb{Z}$

$$\int_{k\frac{\pi}{2}}^{R\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \, d\theta = \int_{k\frac{\pi}{2}}^{R\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta = (R-k) \frac{\pi}{4}$$

In altre parole: l'integrale di $\sin^2 \theta$ o di $\cos^2 \theta$ tra estremi che sono multipli interi di $\frac{\pi}{2}$ è uguale a metà della lunghezza dell'intervallo.

Dim. $C = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \, d\theta$ $S = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta$

Allora $C = S$ (per simmetria) e $C + S = \int_0^{\pi/2} 1 \, d\theta = \frac{\pi}{2}$

Per riflessione su tutti gli altri intervalli

Altra cosa da ricordare: $\int_{k\frac{\pi}{2}}^{(k+1)\frac{\pi}{2}} \sin \theta \, d\theta = \pm 1$ e idem. per $\cos \theta$

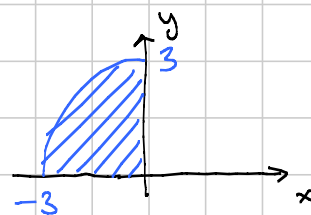
Esempio 3 $\iint_A x \, dx \, dy$

A = cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio 3 intersecato il 2° quadrante.

$$= \underbrace{\int_0^3 dp}_{\substack{\text{A in coord.} \\ \text{polari}}} \underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi} d\theta}_{\times} \underbrace{p \cos \theta}_{\text{pag}}$$

$$= \underbrace{\int_0^3 p^2 dp}_9 \underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi} \cos \theta d\theta}_{-1} = -9$$

Oss. Il segno poteva prevederlo dall'inizio perché l'integrandola è ≤ 0 nell'insieme di integrazione



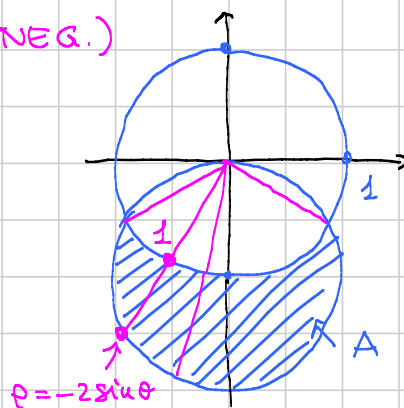
— 0 — 0 —

Esempio 4 $\iint_A y \, dx \, dy$ (DEVE VENIRE NEG.)

A = lunetta come in figura

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + (y+1)^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 + 2y = 0$$



In coord. cartesiane sembra complicato.

Proviamo in coord. polari

$$x^2 + y^2 \geq 1 \quad \leadsto \quad \rho \geq 1 \quad (\text{fuori dal primo cerchio})$$

$$x^2 + y^2 + 2y \leq 0 \quad \leadsto \quad \rho^2 + 2\rho \sin \theta \leq 0 \quad (\text{dentro il 2° cerchio})$$

$$\rho + 2 \sin \theta \leq 0 \quad \leadsto \quad \rho \leq -2 \sin \theta$$

Riassumendo: $1 \leq \rho \leq -2 \sin \theta$

Se suppongo $1 \leq -2 \sin \theta$ ottengo dove varia θ : $\sin \theta \leq -\frac{1}{2}$
da cui $\frac{7\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{11\pi}{6}$.

L'insieme A in coord. polari è

$$\frac{7\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{11\pi}{6}, \quad 1 \leq \rho \leq -2 \sin \theta$$

Normale rispetto all'asse θ

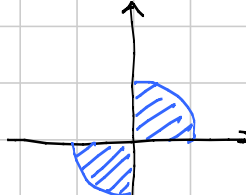
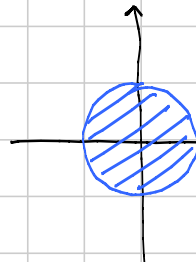
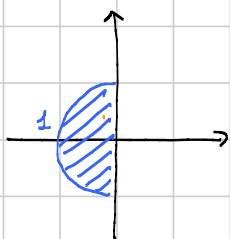
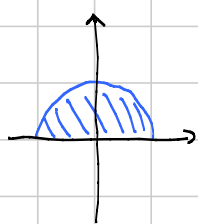
$$\iint_A y \, dx \, dy = \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} d\theta \int_1^{-2 \sin \theta} \rho \sin \theta \, \boxed{\rho} \, d\rho$$

↑
pag.

$$= \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \sin \theta \, d\theta \int_1^{-2 \sin \theta} \rho^2 \, d\rho = \text{conti analisi 1.}$$

— o — o —

Oss. Spesso le simmetrie posso semplificare dei calcoli mostrando che certi integrali sono nulli.



x	○	< 0	○	○
y	> 0	○	○	○
xy	○	○	○	> 0
$x^2 \text{ or } \cos^2 y$	○	○	○	> 0
$\sin x \cos y$	○	< 0	○	○
↑ INTEGRANDE		↑ SEGNO PREVISTO DELL'INTEGRALE		

ANALISI 2

-

LEZIONE 033

Titolo nota

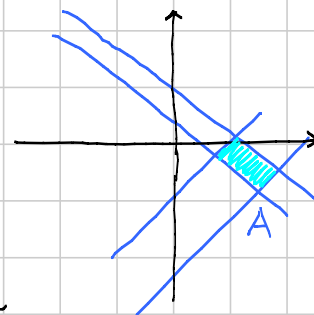
30/10/2015

FORMULA DI CAMBIO DI VARIABILI IN GENERALE

$$\iint_A (x^2 - y^2) dx dy$$

$$(x^2 - y^2) = u \cdot v$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq \overbrace{x+y}^u \leq 3, \quad 7 \leq \overbrace{x-y}^v \leq 11\}$$



Si può fare come insieme normale, ma richiede vari spezzamenti

Mi piacerebbe tanto scrivere $\iint_A (x^2 - y^2) dx dy = \int_2^3 du \int_7^{11} dv (uv)$

Domanda: come calcolare $J(u, v)$
 \uparrow
 JACOBIANO

$J(u, v)$
 pagam. \nearrow

Formula: $\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B \boxed{g(u, v)} \boxed{J(u, v)} du dv$

$\underbrace{\quad}_{\text{ciò che voglio calcolare}} \quad \underbrace{\quad}_{\substack{\uparrow \\ \text{A descritto nelle} \\ \text{variabili } u \text{ e } v}} \quad \underbrace{\quad}_{\substack{\uparrow \\ f(x, y) \text{ nelle} \\ \text{nuove} \\ \text{variabili}}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{pagam.}}$

- Ricetta per ottenere J :
- ① ricavare x e y in funzione di u e v
 - ② scrivere la matrice jacobiana della trasformazione
 - ③ $J(u, v) = |\text{Det}|$

Nell'esempio: ① $u = x + y \quad v = x - y$

$$\leadsto x = \frac{u+v}{2} \quad y = \frac{u-v}{2}$$

② Matrice jacobiana $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$③ \quad J(u,v) = |\text{Det}| = \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}$$

Quindi nell'esempio $\iint_A (x^2 - y^2) dx dy = \int_2^3 du \int_{\frac{1}{u}}^{\frac{2}{u}} dv \quad (uv) \quad \frac{1}{2}$

\uparrow
 $J(u,v)$

= banalità
— o — o —

Verifica: cosa succederebbe nel caso delle coord. polari

$$① \quad x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta$$

② Matrice

$$\begin{pmatrix} x_\rho & x_\theta \\ y_\rho & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$③ \quad |\text{Det}| = \rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta = \rho$$

— o — o —

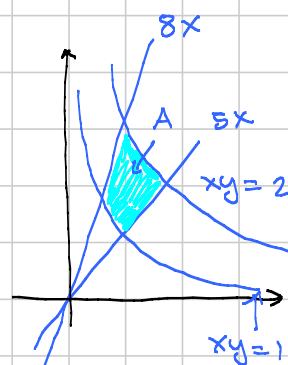
Esempio $\iint_A y \, dx \, dy$

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \underbrace{xy}_u \leq 2, \quad 5x \leq y \leq 8x \}$$

In cartesiane si farebbe

Nelle nuove coordinate l'insieme è

$$1 \leq u \leq 2 \quad 5 \leq v \leq 8$$



$$① \quad \text{Ricavo } x \text{ e } y : \quad u = xy \quad v = \frac{y}{x}$$

$$y = \sqrt{uv} \quad x = \sqrt{\frac{u}{v}}$$

$f(x,y)$ è diventata \sqrt{uv}

$$② \quad \text{Matrice} \quad \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{u}}{v\sqrt{v}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \quad J(u,v) = |\text{Det}| = \left| \frac{1}{4} \frac{1}{v} + \frac{1}{4} \frac{1}{v} \right| = \frac{1}{2v}$$

In conclusione

$$\iint_A y \, dx \, dy = \underbrace{\int_1^2 du \int_5^8 dv}_{\text{insieme A nelle coord. } u \text{ e } v} \underbrace{\sqrt{uv}}_y \cdot \underbrace{\frac{1}{2v}}_{J(u,v)} = \text{facile.}$$

Procedura alla rovescia per calcolare $J(u,v)$

① Scrivo u e v in funzione di x e y : $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$

② Faccio la matrice in questa direzione

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Calcolo } |\text{Det}| = \frac{2y}{x} = 2v$$

④ Faccio J inverso $J(u,v) = \frac{1}{2v}$ come prima.

Oss. È come se partissi dall'integrale in (u,v) e volessi trasportarlo in (x,y) .

— o — o —

Casi speciali utili

① Traslazioni: $u = x+a$, $v = y+b \rightsquigarrow J(u,v) = 1$

② Dilatazioni lungo gli assi: $u = ax$, $v = by \rightsquigarrow J(u,v) = (ab)^{-1}$

③ Affinità: $(x,y) = A(u,v) + (a,b) \rightsquigarrow J(u,v) = |\text{Det } A|^{-1}$

Esempio 1 $\iint_A y^2 dx dy$ $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 2x^2 + 3y^2 \leq 5\}$

Risolvo d'insieme

$$\underbrace{(\sqrt{2}x)^2}_u + \underbrace{(\sqrt{3}y)^2}_v \leq 5 \quad u^2 + v^2 \leq 5$$

① $x = \frac{u}{\sqrt{2}} \quad y = \frac{v}{\sqrt{3}}$

② $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

③ $J(u,v) = \frac{1}{\sqrt{6}}$

Conclusione $\iint_A y^2 dx dy = \iint_{u^2+v^2 \leq 5} \underbrace{\frac{v^2}{3}}_{y^2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}}}_{J(u,v)} du dv$

$= \frac{1}{3\sqrt{6}} \iint_{u^2+v^2 \leq 5} v^2 du dv = \frac{1}{3\sqrt{6}} \int_0^{\sqrt{5}} dp \int_0^{2\pi} d\theta \rho^2 \sin^2 \theta \rho$

↑
coord. polari

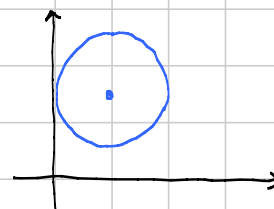
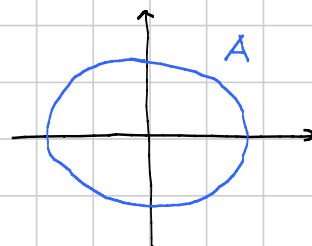
$= \frac{1}{3\sqrt{6}} \underbrace{\int_0^{\sqrt{5}} \rho^3 d\rho}_{\frac{25}{4}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta}_{\pi} = \frac{1}{3\sqrt{6}} \cdot \frac{25}{4} \cdot \pi$

Esempio 2 $\iint_A x dx dy$ $A = \text{cerchio con centro in } (2,3) \text{ e raggio } 2$

Deve venire positivo

$$\underbrace{(x-2)^2}_u + \underbrace{(y-3)^2}_v \leq 4$$

Traslazione $\Rightarrow J(u,v) = 1$



Quindi

$$\begin{aligned} \iint_A x \, dx \, dy &= \iint_{u^2+v^2 \leq 4} (u+2) \cdot 1 \, du \, dv \\ &= \underbrace{\iint_{u^2+v^2 \leq 4} u \, du \, dv}_0 + 2 \underbrace{\iint_{u^2+v^2 \leq 4} 1 \, du \, dv}_{\text{Area cerchio} = 4\pi} = 8\pi \end{aligned}$$

" per simmetria

Oss. 1 In generale $\iint_A 1 \, dx \, dy = \text{Area}(A)$

Oss. 2 Il discorso delle simmetrie si dimostra con un cambio di variabili usando la simmetria stessa.

Giustificazione ULTRA-BRUTALE della procedura

→ se vale per i rettangoli, vale per tutte le funzioni

→ se la trasformazione è una affinità, allora
rettangolo \leadsto parallelogrammo, la cui area è
un determinante

→ se il rettangolo è abbastanza piccolo, posso appross.
la trasformazione al 1° ordine con Taylor, quindi
con una affinità.

— o — o —

ANALISI 2

—

LEZIONE 034

Titolo nota

03/11/2015

INTEGRALI TRIPLI

- ① Notazione
- ② Significato geometrico / fisico
- ③ Definizione
- ④ Tecniche di calcolo

① Notazione

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$A \subseteq \mathbb{R}^3$ ↑ integrand
 zona di integr.

Si intende : $\rightarrow A$ è limitato
 $\rightarrow f$ è limitata

② Significato fisico

$A \subseteq \mathbb{R}^3$ limitato pensato come un solido
 $f(x, y, z) \geq 0$ pensata come densità del
 materiale di cui è fatto il solido

Supponiamo di voler definire il peso totale del solido.

Idea: pensare di scomporre il solido in tanti "mattoncini" piccoli
 in ciascuno dei quali la densità è circa costante.

Posso approssimare il peso del solido con la somma dei pesi
 dei mattoncini che so calcolare facendo

$$\text{peso mattoncino} = \underbrace{\text{densità nel mattoncino}}_{\substack{\uparrow \\ \text{supposta costante}}} \cdot \underbrace{\text{Volume}}_{\substack{\uparrow \\ \text{parallelepipedo}}}$$

Matematicamente ho costruito una somma di Riemann.

③ Definizione Andiamo a definire $\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz$

→ Caso banale $f = \text{costante}$ in un parallelepipedo
 $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$
 $e = 0$ fuori

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = \lambda \prod_{i=1}^3 (b_i - a_i)$$

→ Caso semi-banale $f = \text{comb. lineare di casi banali}$
 L'integrale è def. come comb. lineare degli integrali

→ Caso generale : integrale inf. e sup. come sempre e poi se coincidono...

Valgono le solite propr. di sempre (linearità, monotonia, valore assoluto, prodotto) con le solite dimostrazioni.

Oss. Che nel passaggio di approx le step functions "sforano" rispetto al bordo dell'insieme in cui $f \neq 0$.

④ Tecniche di calcolo Formule di riduzione

$$3 = 1 + 1 + 1$$

$$3 = 2 + 1$$

$$3 = 1 + 2$$

Formula $3 = 1 + 1 + 1$

$A = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$
 $= \text{parallelepipedo}$

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz f(x, y, z)$$

Oss. Cambiando i nomi alle variabili ottengo 6 formule diverse
 \uparrow 0° ordine

Esempio $A = [0,1] \times [0,2] \times [1,3]$ $f(x,y,z) = x+yz$

$$\begin{aligned}
 \iiint_A (x+yz) dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_1^3 dz (x+yz) = (\text{primit. in } z) \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \left[xz + \frac{1}{2} y z^2 \right]_{z=1}^{z=3} \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy [2x + 4y] \quad (\text{primitiva in } y) \\
 &= \int_0^1 dx [2xy + 2y^2]_{y=0}^{y=2} = \int_0^1 dx (4x + 8) \\
 &= [2x^2 + 8x]_{x=0}^{x=1} = 10.
 \end{aligned}$$

Stesso esercizio, in modo forse più pratico

$$\begin{aligned}
 \iiint_A x dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_1^3 dz \quad \textcircled{x} = \int_0^1 x dx \int_0^2 dy \int_1^3 dz \\
 &= \int_0^1 4x dx = [2x^2]_0^1 = 2
 \end{aligned}$$

Area $[0,2] \times [1,3]$
quindi 4

$$\begin{aligned}
 \iiint_A yz dx dy dz &= \int_0^2 dy \int_1^3 dz \int_0^1 yz dx = \int_0^2 y dy \int_1^3 z dz \int_0^1 dx \\
 &= 8 \quad (+2 \text{ di prima} = 10)
 \end{aligned}$$

$\left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^2$ " 2
 $\left[\frac{1}{2} z^2 \right]_1^3$ " 4
 $\int_0^1 dx$ " 1

Formula $3 = 2 + 1$

INTEGRALE PER COLONNE

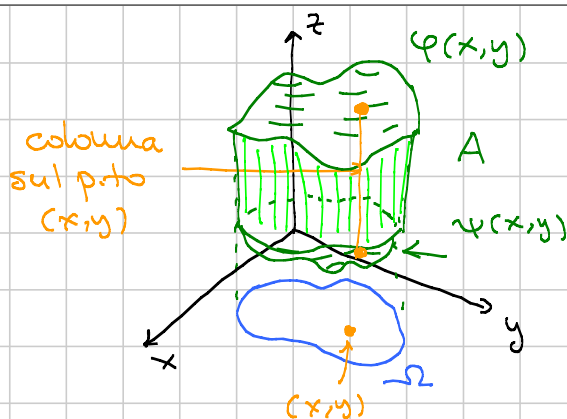
Definizione Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice NORMALE rispetto al piano xy se è della forma

$$A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \underbrace{\Omega}_{\text{base}}, \underbrace{\psi(x,y)}_{\text{tappo sotto-sopra}} \leq z \leq \underbrace{\varphi(x,y)}_{\text{tappo sotto-sopra}} \}$$

La formula di integrazione diventa

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x,y,z) dz$$

integrale in una variabile (z)
tra $\psi(x,y)$ e $\varphi(x,y)$



Esempio $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$

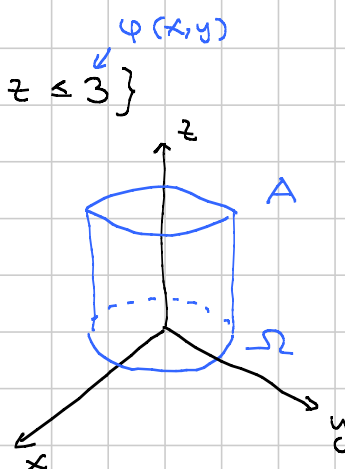
$$f(x,y,z) = z$$

A è normale rispetto al piano xy con
base $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$

$$\iiint_A z dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \underbrace{\int_0^3 dz \cdot z}_{\text{colonna}}$$

$$(\text{primitiva in } z) = \iint_{\Omega} dx dy \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=0}^{z=3} = \frac{9}{2} \iint_{\Omega} dx dy$$

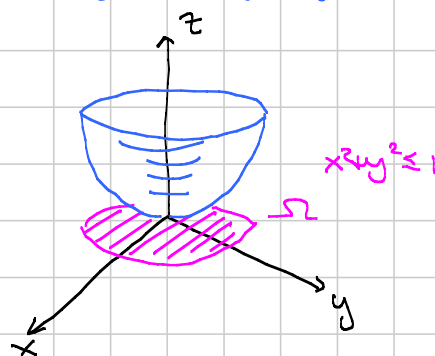
$$= \frac{9}{2} \text{Area}(\Omega) = \frac{9}{2} \cdot 2\pi = 9\pi$$



Esempio $f(x,y,z) = z$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2}_{\psi(x,y)} \leq z \leq \underbrace{1}_{\varphi(x,y)}\}$

"Sopra il paraboloide $z = x^2 + y^2$,
sotto il piano $z = 1$ "

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 \leq 1}_{\Omega}, \underbrace{x^2 + y^2 \leq z \leq 1}_{\text{colonna}}\}$$



A questo punto

integrale sulla colonna

$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz = \iint_{\Omega} dx \, dy \int_{x^2+y^2}^1 dz \, z \quad (\text{primitiva in } z)$$

$$= \iint_{\Omega} dx \, dy \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=x^2+y^2}^{z=1}$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [1 - (x^2+y^2)^2] \, dx \, dy$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy - \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (x^2+y^2)^2 \, dx \, dy$$

$$= \frac{1}{2} \text{Area}(\Omega) - \frac{1}{2} \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \, \rho^4 \cdot \rho$$

$$= \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \cdot 2\pi \int_0^1 \rho^5 \, d\rho$$

$$= \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{6} \pi = \frac{1}{3} \pi$$

ANALISI 2

—

LEZIONE 035

Titolo nota

03/11/2015

Formula di riduzione $3 = 1+2$

Integrazione per SEZIONI

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{S_z} f(x,y,z) dx dy$$

dove

→ $[a,b]$ è l'insieme in cui varia z in A → S_z è la sezione di A ad altezza z , cioè

$$S_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in A\}$$

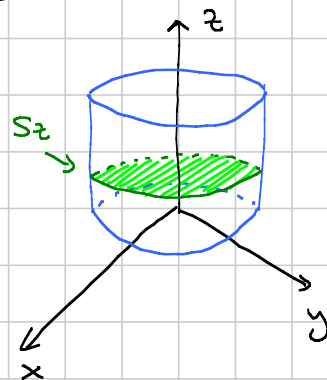
Esempio 1 Esempio della lezione precedente con $f(x,y,z) = z$
e $A = \text{cilindro} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$

$$\iiint_A z dx dy dz = \int_0^3 dz \iint_{S_z} dx dy \quad z$$

$$= \int_0^3 z dz \iint_{S_z} dx dy$$

$$= \int_0^3 dz \quad z \cdot \text{Area}(S_z) \quad \text{cerchio di raggio } \sqrt{2}$$

$$= 2\pi \int_0^3 z dz = \pi [z^2]_{z=0}^{z=3} = 9\pi$$



Esempio 2 $f(x,y,z) = \sin x + z^2$

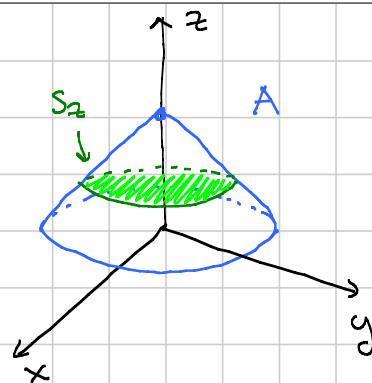
$A = \text{cono con base } x^2 + y^2 = 36 \text{ e vertice in } (0,0,1)$

Abbiamo almeno 2 opzioni

→ normale rispetto al piano (x, y)

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 36 \leftarrow \text{base } \Omega \\ 0 \leq z \leq 1 - \frac{1}{6} \sqrt{x^2 + y^2} \}$$

colonna sul p.to (x, y) in cui
uso eq. del cono per il "tappo a ito"



$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_0^{1 - \frac{1}{6} \sqrt{x^2 + y^2}} (\sin x + z) dz$$

↑
per colonne = (fare ...)

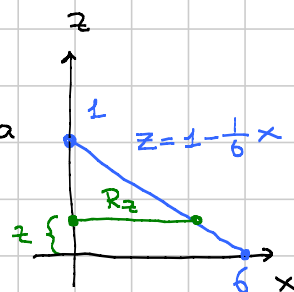
→ per sezioni

$$\iiint_A \dots = \int_0^1 dz \iint_{S_z} dx dy (\sin x + z)$$

Bisogna capire chi è S_z = cerchio di raggio R_z
che dipende dall'altezza

$$z = 1 - \frac{1}{6} R_z, \quad 6z = 6 - R_z, \quad R_z = 6(1 - z)$$

(controllo per $z=0, z=1$
viene sensato)



$$\begin{aligned} \iiint_A z dx dy dz &= \int_0^1 dz \iint_{S_z} dx dy \quad \textcircled{z} = \int_0^1 dz \cdot z \cdot \text{Area}(S_z) = \\ &= \int_0^1 z \cdot 6^2 (1 - z)^2 \pi dz = \text{Analisi 1} \end{aligned}$$

$$\iiint_A \sin x dx dy dz = 0 \quad \text{per simmetria !!!}$$

Utilizzo delle simmetrie per semplificare alcuni calcoli

Caso degli integrali di Analisi 1:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad \text{se } f \text{ è dispari}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad \text{se } f \text{ è pari}$$

Slogan: f dispari in x , insieme simmetrico (cioè $[-a, a]$)
 $\Rightarrow \int_A f = 0$.

Caso degli integrali doppi

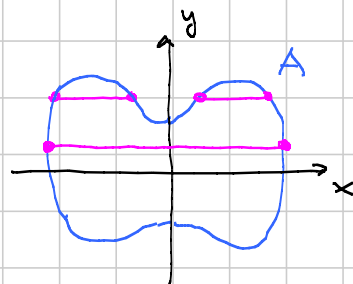
Slogan: $\rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^2$ simmetrico rispetto all'asse y , cioè

$$(x, y) \in A \Leftrightarrow (-x, y) \in A$$

$\rightarrow f(x, y)$ dispari in x , cioè

$$f(-x, y) = -f(x, y) \quad \forall (x, y) \in A$$

Allora
$$\iint_A f(x, y) dx dy = 0$$



[Dim. quando integro in dx sono nella stessa situazione di Analisi 1]

Se invece $f(-x, y) = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in A$ simmetrico come sopra
 allora

$$\iint_A f(x, y) dx dy = 2 \iint_{A^+} f(x, y) dx dy$$

↑ metà destra di A (o sinistra)

Gli stessi discorsi valgono, con la stessa dim., in 3 o più variabili

Tornando all'esempio $\iiint_A \sin x \, dx \, dy \, dz = 0$

perché: $\rightarrow \sin x$ è dispari in x

\rightarrow Ω insieme A è simmetrico nel senso che

$$(x, y, z) \in A \Leftrightarrow (-x, y, z) \in A.$$

Analogamente, sullo stesso A , sarebbero nulli gli integrali di

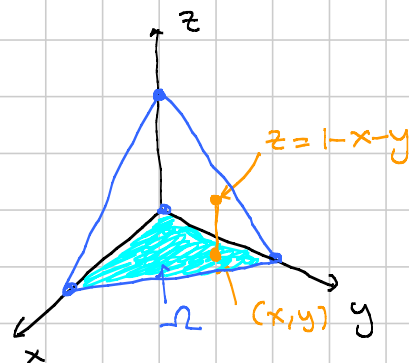
xy , $\frac{x^2 \arctan y}{\text{dispari in } y}$, $\frac{\sin(xz)}{\text{dispari in } x}$ ma non $x^2 y^2$

Esempio (Esercizio della tavola) $f(x, y, z) = x$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$$

$x + y + z = 1 \leadsto$ piano per i 3 vettori della base canonico

A è un tetraedro particolare.



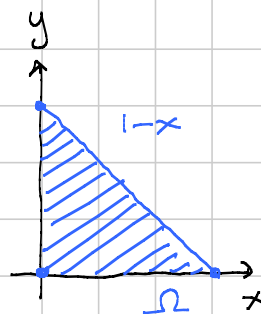
Per calcolare Ω l'integrale diventa

$$\iiint_A x \, dx \, dy \, dz = \iint_{\Omega} dx \, dy \int_0^{1-x-y} dz \, x$$

$\underbrace{\int_0^{1-x-y} dz}_{\text{colonna su } (x,y)}$

$$= \iint_{\Omega} x \, dx \, dy \int_0^{1-x-y} dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \, x = \int_0^1 x \, dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz$$



Avessi voluto procedere per sezioni

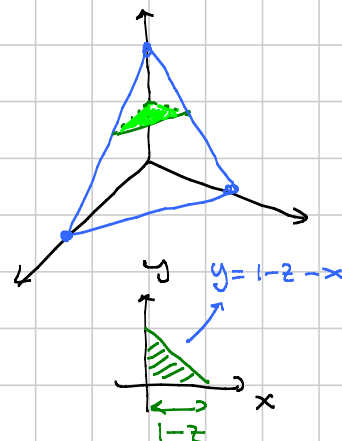
$$\iiint_A x \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 dz \iint_{S_z} x \, dx \, dy = (\star)$$

Ora S_z è un triangolo descritto da

$$S_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1-z\}$$

$$(\star) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \int_0^{1-z-x} dy \, x$$

triangolo S_z come insieme normale risp. asse x



Esempio Rifacciamo l'esempio con

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 1 \quad \text{e} \quad f(x, y, z) = z$$

Per sezioni diventa:

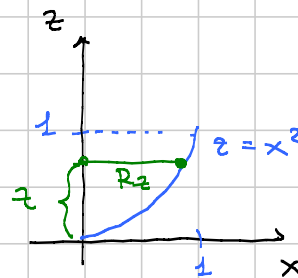
$$\begin{aligned} \iiint_A z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 dz \iint_{S_z} dx \, dy \quad \text{(z)} \\ &= \int_0^1 z \, dz \iint_{S_z} dx \, dy = \int_0^1 z \cdot \text{Area}(S_z) \, dz = (\star) \end{aligned}$$

S_z = cerchio di raggio R_z , quindi

$$z = R_z^2, \text{ cioè } R_z = \sqrt{z}$$

$$= \int_0^1 z \cdot \pi z \, dz = \pi \int_0^1 z^2 \, dz = \frac{1}{3} \pi.$$

— 0 — 0 —



ANALISI 2

—

LEZIONE 036

Titolo nota

04/11/2015

COORDINATE CILINDRICHE (in \mathbb{R}^3) (x, y, z) cartesiane

(ρ, θ, z) cilindriche
 quota
 polari corrispondenti a x e y

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta \quad z = z$$

Esempio $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 3, |z| \leq 4\}$
 in coord. cilindriche diventa

$$0 \leq \rho \leq \sqrt{3} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad -4 \leq z \leq 4$$

Negli integrali

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz$$

\uparrow Descrizione di A in coord. cilindriche
 \uparrow $J = \text{pagamento}$

COORDINATE SFERICHE

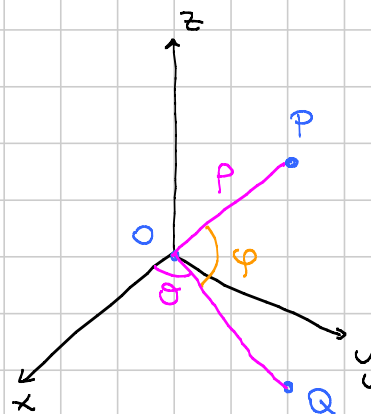
Coord. sferiche (alla moda dei geografi).

Dato $P \in \mathbb{R}^3$, si definisce Q come la proiezione di P sul piano xy e poi si definisce

→ $\rho = \text{lunghezza di } OP \quad (\rho \geq 0)$

→ $\varphi = \text{angolo tra } OP \text{ e } OQ \text{ (angolo tra } OP \text{ e piano } xy) \quad (\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$

→ $\theta = \text{"}\theta \text{ di } Q\text{"} = \text{angolo tra } OQ \text{ e semiasse } x > 0 \quad (\theta \in [0, 2\pi])$



Interpretazione geografica:

→ φ è la LATITUDINE di P

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

→ θ è la LONGITUDINE di P

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

Casi particolari:

→ L'origine ha $\rho=0$ e θ e φ con poco senso

→ i p.ti dell'asse z che hanno $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oppure $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ e θ non definito.

Formule di passaggio:

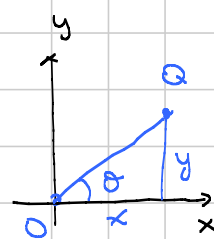
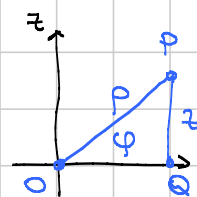
$$z = \rho \sin \varphi$$

$$x = \rho \cos \varphi \cos \theta$$

$$z = PQ = OP \cdot \sin \varphi$$

$$x = OQ \cdot \cos \theta = \rho \cos \varphi \cos \theta$$

$$y = OQ \cdot \sin \theta = \rho \cos \varphi \sin \theta$$



In conclusione

$$x = \rho \cos \varphi \cos \theta$$

$$y = \rho \cos \varphi \sin \theta$$

$$z = \rho \sin \varphi$$

Viceversa

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Determinante J da usare negli integrali.

Si parte dalla matrice

$$\begin{pmatrix} x_\rho & y_\rho & z_\rho \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \end{pmatrix}$$

esercizio

$$\leadsto \text{Det} = \rho^2 \cos \varphi$$

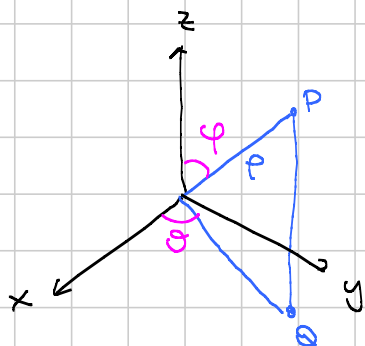
Formula per gli integrali

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_B f(\rho \cos \varphi \cos \theta, \dots) \rho^2 \cos \varphi d\rho d\theta d\varphi$$

↑
Descrizione di A in coord. sferiche

Achtung! Molti (in particolare i fisici) usano un'altra convenzione per la sferiche con

→ φ = angolo tra OP e semiasse positivo delle z



Conseguente

→ φ varia in $[0, \pi]$

→ nelle formule si scambiano $\sin \varphi$ e $\cos \varphi$

Esempio 1 $\iiint_S z^2 dx dy dz$

S = sfera con centro in O e raggio 2

$$= \underbrace{\int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi}_{\text{sfera in coordinate sferiche}} \underbrace{\rho^2 \sin^2 \varphi}_{z^2} \underbrace{\rho^2 \cos \varphi}_J$$

$$= \underbrace{\int_0^2 \rho^4 d\rho}_{\frac{32}{5}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi}_{\left[\frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}} = \frac{128}{15} \pi$$

Esempio 2

$$\iiint_S x^2 dx dy dz$$

è uguale per simmetria, ma il calcolo con la formula sarebbe più complicato (c'è anche θ)

Cambio di variabili in generale: funziona come in \mathbb{R}^2 solo che il Det della Jacobiana è 3×3 .

Esempio 3 $\iiint_S y^2 dx dy dz$ $S =$ sfera di raggio 2 e centro in $(5, 3, 4)$

Equazione sfera: $\underbrace{(x-5)}_u^2 + \underbrace{(y-3)}_v^2 + \underbrace{(z-4)}_w^2 \leq 4$

$$\iiint_S y^2 dx dy dz = \iiint_{S'} (v+3)^2 du dv dw$$

\downarrow
 S'
 \downarrow
sfera $u^2 + v^2 + w^2 \leq 4$

$J=1$ perché è una trasformazione

$$= \iiint_{S'} (v^2 + 6v + 9) du dv dw = \frac{128}{15} \pi + \frac{9 \cdot 32}{3} \pi$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 $\frac{128}{15} \pi$ 0 $9 \cdot \text{Vol}(S') = 9 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3$

Esempio 4 Volume della sfera di raggio $R = \iiint_S 1 dx dy dz$

1° modo Coord. sferiche

$$\int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot 1 \cdot \rho^2 \cos\varphi = \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi$$

$\underbrace{\int_0^R \rho^2 d\rho}_{\frac{1}{3} R^3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi}_2$

$$= \frac{4}{3} \pi R^3$$

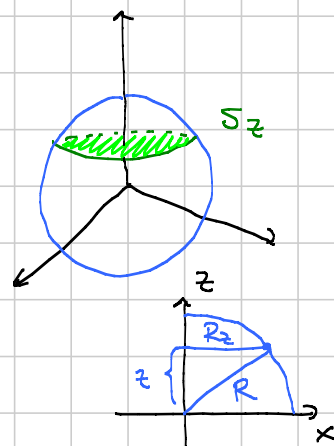
2° modo Per sezioni

$$\int_{-R}^R dz \iint_{S_z} 1 dx dy = \int_{-R}^R \text{Area}(S_z) dz$$

$\underbrace{\iint_{S_z} 1 dx dy}_{\text{Area}(S_z)}$

$$= \int_{-R}^R \pi R_z^2 dz$$

$$= \pi \int_{-R}^R (R^2 - z^2) dz = \text{si conclude}$$



3° modo Proviamo per colonne.

$$\text{Base} = \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\}$$

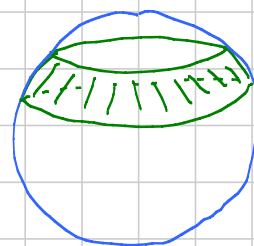
Quindi

$$\begin{aligned} \iiint_S 1 \, dx \, dy \, dz &= \iint_{\Omega} dx \, dy \int_{-\sqrt{\dots}}^{\sqrt{\dots}} 1 \, dz = 2 \iint_{\Omega} dx \, dy \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \\ &= 2 \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{R^2 - \rho^2} \quad \uparrow \\ &= 4\pi \int_0^R \rho \sqrt{R^2 - \rho^2} \, d\rho \\ &= 4\pi \left[\frac{2}{3} [R^2 - \rho^2]^{3/2} \left(-\frac{1}{2}\right) \right]_0^R \\ &= \frac{4\pi}{3} R^3 \end{aligned}$$

Esempio 5 Segmento sferico $\{(x, y, z) \in S : a \leq z \leq b\} = S_{a,b}$

Per sezioni promette bene

$$\begin{aligned} \iiint_{S_{a,b}} 1 \, dx \, dy \, dz &= \int_a^b dz \iint_{S_z} 1 \, dx \, dy \\ &= \pi \int_a^b R_z^2 \, dz \\ &= \pi \int_a^b (R^2 - z^2) \, dz \\ &= \pi \left\{ R^2(b-a) - \frac{1}{3}(b^3 - a^3) \right\} \end{aligned}$$



Casi speciali : $a=0$ e $b=R \rightsquigarrow \pi \left\{ R^3 - \frac{1}{3}R^3 \right\} = \frac{2\pi}{3} R^3$
 $a=-R$ e $b=R \rightsquigarrow$ tutta la sfera.

ANALISI 2

-

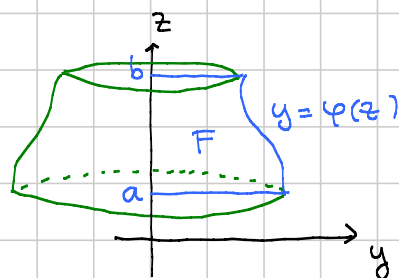
LEZIONE 037

Titolo nota

04/11/2015

SOLIDI DI ROTAZIONE

Figura F nel piano yz che ruotando intorno all'asse z descrive un solido S .



Nel caso nel disegno

$$F = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : a \leq z \leq b, 0 \leq y \leq \varphi(z)\}$$

descrive il profilo della figura F

Descrizione del solido S :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b, 0 \leq \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{\text{distanza dall'asse } z} \leq \varphi(z)\}$$

In coordinate cilindriche diventa

$$a \leq z \leq b \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 0 \leq \rho \leq \varphi(z)$$

Se ci interessa solo la sup. laterale, l'eq. è $\sqrt{x^2 + y^2} = \varphi(z)$

Esempio

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^4 &= 8 \\ x^2 + y^2 &= 8 - z^4 \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{8 - z^4} \\ &\quad \varphi(z) \end{aligned}$$

Solido rot.
intorno asse z

$$\begin{aligned} x^2 + y^4 + z^2 &= 8 \\ x^2 + z^2 &= 8 - y^4 \\ \sqrt{x^2 + z^2} &= \sqrt{8 - y^4} \end{aligned}$$

Solido rotat.
intorno asse y

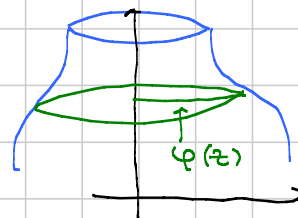
$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^2 &= 8 \\ \text{No solido} \\ \text{di rot.} \end{aligned}$$

Volume di un solido di rotazione

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b, \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq \varphi^2(z) \}$$

1° modo Per sezioni

$$\begin{aligned} \iiint_S 1 \, dx \, dy \, dz &= \int_a^b dz \iint_{S_z} dx \, dy \\ &= \int_a^b \text{Area}(S_z) \, dz \\ &= \pi \int_a^b \varphi^2(z) \, dz \end{aligned}$$



$$\text{Vol}(S) = \pi \int_a^b \varphi^2(z) \, dz$$

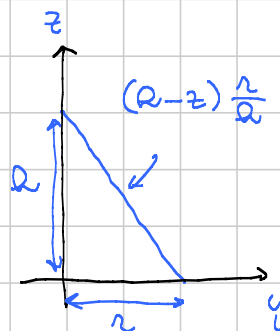
2° modo Coord. cilindriche

$$\begin{aligned} \int_a^b dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(z)} \rho \, d\rho &= \int_a^b dz \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{1}{2} \rho^2 \right]_{\rho=0}^{\rho=\varphi(z)} \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b dz \int_0^{2\pi} d\theta \, \varphi^2(z) = \pi \int_a^b \varphi^2(z) \, dz \end{aligned}$$

Esempio Volume cono $\varphi(z) = \frac{r}{R} (R-z)$

$$\text{Vol}(\text{cono}) = \int_0^R \frac{r^2}{R^2} (R-z)^2 \, dz \cdot \pi$$

$$= \text{controllare che venga } \frac{1}{3} \pi r^2 R$$



BARICENTRI E MOMENTI D'INERZIA

Def. Dato un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$, si dice **BARICENTRO** di A il punto $G = (x_G, y_G)$ dove

$$x_G = \frac{1}{\text{Area}(A)} \iint_A x \, dx \, dy$$

valore medio della coordinata x in A

$$y_G = \frac{1}{\text{Area}(A)} \iint_A y \, dx \, dy$$

valore medio di y in A

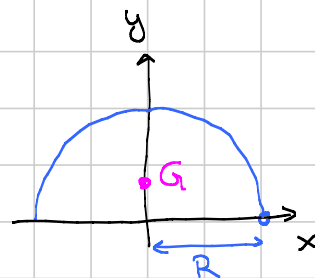
Oss. Se approssimiamo una figura con tanti quadratini e facciamo il baricentro dei centri dei quadratini, sto costruendo le somme di Riemann per i 2 integrali.

Def In \mathbb{R}^3 è analogo, solo che ho 3 coordinate e divido per il Volume

Esempio 1 Baricentro di una semicirconferenza

$$\text{Area} = \frac{\pi}{2} R^2 \quad x_G = 0 \text{ per simmetria}$$

$$\begin{aligned} \iint_A y \, dx \, dy &= \int_0^R dp \int_0^\pi d\theta \, p \sin \theta \cdot p \\ &= \underbrace{\int_0^R p^2 dp}_{\frac{1}{3} R^3} \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}_2 = \frac{2}{3} R^3 \end{aligned}$$



$$\text{Quindi } y_G = \frac{\iint y}{\text{Area}} = \frac{\frac{2}{3} R^3}{\frac{\pi}{2} R^2} = \frac{4}{3\pi} R$$

Oss. Se ho densità $\rho(x,y)$ variabile, allora

$$x_G := \frac{\iint_A \rho(x) \cdot x \, dx \, dy}{\iint_A \rho(x) \, dx \, dy}$$

$y_G :=$ stessa cosa

Esempio 2 Baricentro della semisfera $x_G = y_G = 0$

$$\text{Volume} = \frac{2}{3} \pi R^3$$

$$\begin{aligned} \iiint_S z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \underbrace{\rho \sin \varphi}_z \underbrace{\rho^2 \cos \varphi}_J \\ &= \int_0^R \rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{4} R^4 \\ &\quad \underbrace{\frac{1}{4} R^4}_{\frac{1}{4} R^4} \underbrace{2\pi}_{2\pi} \underbrace{\left[-\frac{1}{4} \cos(2\varphi) \right]_0^{\pi/2}}_{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } z_G = \frac{\pi}{4} R^4 \frac{3}{2\pi R^3} = \frac{3}{8} R$$

Confronto con semicerchio $\frac{3}{8} < \frac{4}{3\pi} \Leftrightarrow 9\pi < 32$

Il baricentro della semisfera sta sotto quello della semicirconf.

TEOREMA GULDINO 1

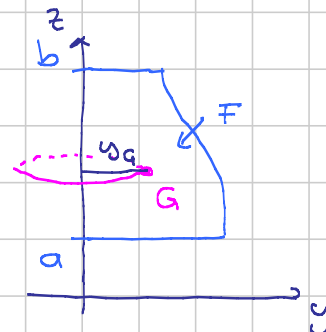
Il volume di un solido di rotazione è uguale all'area della figura che ruota moltiplicata per la lung. della arc. descritta dal baricentro della figura durante la rotazione.

Dim. Devo dimostrare che

$$\text{Vol}(S) = \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G$$

$$\text{Calcolo } y_G = \frac{1}{\text{Area}(F)} \cdot \iint_F y \, dy \, dz$$

quindi devo dim che $\text{Vol}(S) = 2\pi \iint_F y \, dy \, dz$



Ma

$$\begin{aligned} \iint_F y \, dy \, dz &= \int_a^b dz \int_0^{\varphi(z)} y \, dy = \int_a^b dz \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=\varphi(z)} \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \varphi^2(z) \, dz \end{aligned}$$

Quindi ci sono ridotto a $\text{Vol}(S) = \pi \int_a^b \varphi^2(z) \, dz$

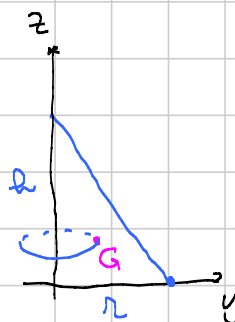
che è la formula trovata all'inizio.

Esempi

① Cono : $\text{Area}(F) = \frac{1}{2} R r$

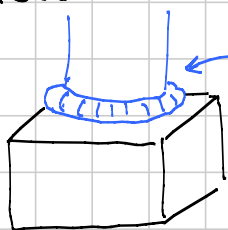
Baricentro : $G = \left(\frac{1}{3} r, \frac{1}{3} R \right)$

Volume = $\underbrace{\frac{1}{2} R r}_{\text{Area}} \cdot 2\pi \frac{1}{3} r = \frac{1}{3} \pi r^2 R$

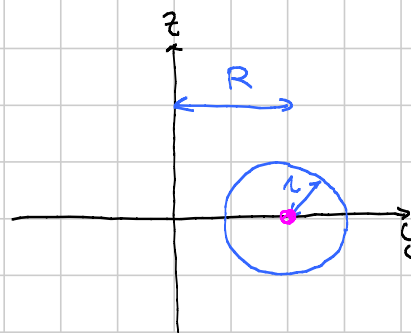


② Sfera e cilindro vengono facili.

③ Toro



THOROS



$\text{Vol}(\text{Toro}) = \underbrace{\pi r^2}_{\text{area}} \underbrace{2\pi R}_{2\pi y_G} = 2\pi^2 r^2 R$

Oss. Guldino 1 vale per qualunque figura F contenuta nel semipiano $y \geq 0$

ANALISI 2 — LEZIONE 038

Titolo nota

06/11/2015

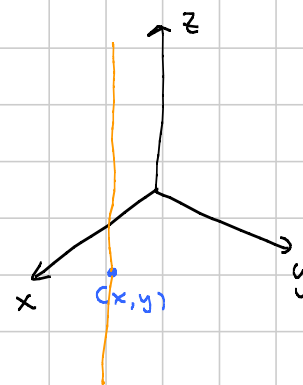
Piccolo commento sulle formule di riduzionePer esempio prendiamo la $3 = 2 + 1$

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &\leq \iint_{\mathbb{R}^2} dx \, dy \int_{\mathbb{R}} f(x, y, z) \, dz \\ &\leq \iint_{\mathbb{R}^2} dx \, dy \int_{\mathbb{R}}^* f(x, y, z) \, dz \leq \iiint_{\mathbb{R}^3}^* f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \end{aligned}$$

volendo potrei definire

$$c_*(x, y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y, z) \, dz$$

$$c^*(x, y) = \int_{\mathbb{R}}^* f(x, y, z) \, dz$$



Con queste notazioni posso riscrivere

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f \leq \iint_{\mathbb{R}^2} c_*(x, y) \leq \iint_{\mathbb{R}^2}^* c^*(x, y) \leq \iiint_{\mathbb{R}^3}^* f$$

Questa formula vale per ogni $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e nulla fuori da un limitato.

Se suppongo che per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ valga $c_*(x, y) = c^*(x, y)$, e che $f(x, y, z)$ sia integrabile su \mathbb{R}^3 , allora

- la funzione $c(x, y)$ è integrabile su \mathbb{R}^2
- valgono tutti gli = nella formula.

La formula generale si dimostra come in \mathbb{R}^2 , cioè

- si osserva che è banale per i parallelepipedi con lati // assi
- si estende per linearità alle SF
- nel caso generale si considera $SF \geq f$ e $SF \leq f$ e si fa sup e inf.

La formula per sezioni è la stessa cosa

$$\iint_{\mathbb{R}^3} f \leq \int_{\mathbb{R}} S_*(z) dz \leq \int_{\mathbb{R}} S^*(z) dz \leq \iint_{\mathbb{R}^3}^* f$$

dove

$$S_*(z) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y, z) dx dy \quad S^*(z) = \iint_{\mathbb{R}^2}^* f(x, y, z) dx dy$$

Quando abbiamo integrali su \mathbb{R}^n abbiamo formule analoghe del tipo $n = k + (n-k)$.

— 0 — 0 —

Teorema della media integrale

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sia $r > 0$, e sia $f: \overline{B}_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$. ↙ chiusa

Supponiamo f continua in tutto l'insieme.

Allora esiste almeno un pto $c \in \overline{B}_r(x_0)$ t.c.

$$\int_{\overline{B}_r(x_0)} f(x) = f(c) \cdot \underbrace{\text{meas}(\overline{B}_r(x_0))}_{= \int_{\overline{B}_r(x_0)} 1}$$

Dim. (stessa di Analisi 1) Sia m ed M il min e max di f nella palla (esistono per W.). Allora

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in \overline{B}_r(x_0)$$

Per monotonia e linearità dell'integrale

$$m \int_B 1 \leq \int_B f \leq M \int_B 1 = \text{meas}(B)$$

Ma allora $m \leq \frac{1}{\text{meas}(B)} \int_B f \leq M$. Visto che f è continua e B è connessa esiste un pto t.c. $f(c) =$

— 0 — 0 —

Oss. Non è importante essere in $\bar{B}_r(x_0)$, ma basta un compatto, connesso, misurabile.

Oss. La media integrale è il valore che dovrebbe avere una funzione costante per avere lo stesso integrale di $f(x)$.

MOMENTO D'INERZIA (Di una figura piana/solida rispetto ad un asse)

Per definizione è

doppio o triplo a seconda dei casi

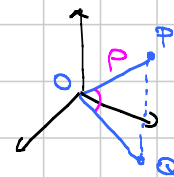
$$\int_F \text{dist}^2(x, \text{asse}) dx$$

assumendo densità costante

$$\int_F \rho(x) \cdot \text{dist}^2(x, \text{asse}) dx$$

Esempio 1 Calcolo momento di inerzia di una sfera rispetto ad un asse passante per il centro.

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\} \quad \text{Asse } z$$



$$\iiint_S \underbrace{(x^2 + y^2)}_{\text{dist}^2 \text{ dall'asse } z} dx dy dz = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \underbrace{\rho^2 \cos^2 \varphi}_{x^2 + y^2} \cdot \underbrace{\rho \cos \varphi}_J$$

$$= \underbrace{\int_0^R \rho^3 d\rho}_{\frac{1}{4} R^4} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos^3 \varphi}_{\text{un passaggio per parti}}$$

Esempio 2 Momento d'inerzia di un cilindro rispetto all'asse.

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2, 0 \leq z \leq R\} \quad \text{asse } z$$

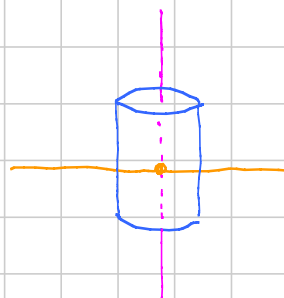
$$\iiint_C (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dz \rho^2 \cdot \rho =$$

↑
cilindriche

$$= \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dz = \frac{1}{2} \pi R^4 R$$

$\underbrace{\int_0^R \rho^3 d\rho}_{\frac{1}{4} R^4} \quad \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \quad \underbrace{\int_0^R dz}_R$

Esempio 3 Momento di un cilindro rispetto ad un asse passante per il centro e perpendicolare all'asse del cilindro stesso.



$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2, -\frac{R}{2} \leq z \leq \frac{R}{2}\}$$

Così il centro è nell'origine e posso usare l'asse x

$$\iiint_C (y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} dz \underbrace{(p^2 \sin^2 \theta + z^2)}_{y^2 + z^2} \underbrace{\rho}_{\uparrow}$$

\uparrow distanza² del generatore
 pto (x, y, z) dall'asse x

\uparrow cilindriche

Lo spezzo in 2 integrali

$$\int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} dz = \frac{\pi}{4} R^4 R$$

$\underbrace{\int_0^R \rho^3 d\rho}_{\frac{1}{4} R^4} \quad \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta}_{\pi} \quad \underbrace{\int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} dz}_R$

$$\int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} z^2 dz = \frac{\pi}{12} R^2 R^3$$

$\underbrace{\int_0^R \rho d\rho}_{\frac{1}{2} R^2} \quad \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \quad \underbrace{\int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} z^2 dz}_{\frac{1}{3} 2 \frac{R^3}{8}}$

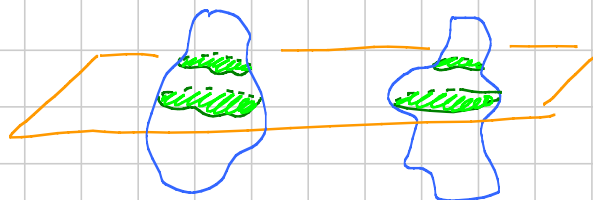
— 0 — 0 —

PRINCIPIO DI CAVALIERI

In versione \mathbb{R}^3 : due figure solide che determinano sezioni di area uguale rispetto ad una stessa famiglia di piani paralleli hanno lo stesso volume.

[Dim: calcolo del volume per sezioni]

$$\text{Vol}(S) = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \underbrace{\text{Area}(S_z)}_{\substack{\text{se le aree sono uguali,} \\ \text{i volumi sono uguali}}} dz$$



Preliminarmente, ho sistemato gli assi in modo che i piani paralleli siano quelli $z = \lambda$

In \mathbb{R}^2 vale lo stesso discorso, solo con la lunghezza delle sezioni.

Esempio

Tutte le sezioni con rette \parallel asse x hanno la stessa lunghezza.

Oss. È importante che sia la STESSA famiglia di piani o rette parallele.



$a > b$ per ogni pto della diagonale

ANALISI 2

LEZIONE 039


Titolo nota

06/11/2015

INTEGRALI CON VALORI ASSOLUTI

Strategie : \rightarrow cavarsela con le simmetrie
 \rightarrow spezzare la zona di integrazione

Esempio 1 $\iint_A |y| dx dy = \iint_A y dx dy$



$$= 2 \iint_B y dx dy = 2 \int_0^1 dp \int_0^{\pi/2} p \sin \theta \cdot p d\theta$$

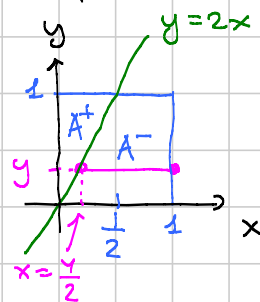
$$= 2 \underbrace{\int_0^1 p^2 dp}_{\frac{1}{3}} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta}_1 = \frac{2}{3}$$

Esempio 2 $\iint_A |x| dx dy$ $A = \text{semicerchio di prima}$

$$= 2 \iint_B |x| dx dy = 2 \iint_B x dx dy = \frac{2}{3} \text{ come prima}$$

Esempio 3 $\iint_A |y-2x| dx dy$ $A = [0,1] \times [0,1]$

$$|y-2x| = \begin{cases} y-2x & \text{in } A^+ \\ -y+2x & \text{in } A^- \end{cases}$$



$$\iint_A |y-2x| dx dy = \iint_{A^+} (y-2x) dx dy + \iint_{A^-} (2x-y) dx dy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{2x}^1 dy (y-2x) + \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{2x} dy (2x-y) + \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_0^1 dy (2x-y)$$

$$= \text{conti} \quad \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{y}{2}}^1 dx (2x-y)$$

Oss. Si poteva fare

$$\iint_A |y-2x| dx dy = \underbrace{\iint_A (2x-y) dx dy}_{\text{quadrato}} + 2 \underbrace{\iint_{A^+} (y-2x) dx dy}_{\text{triangolo}}$$

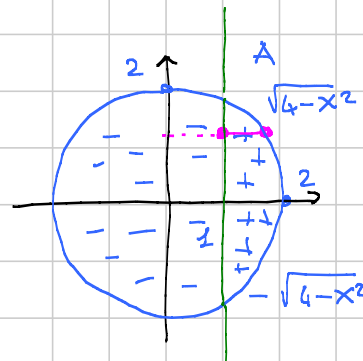
$$\iint_{A^+} (2x-y) + \iint_{A^-} (2x-y)$$

Esempio 4 $\iint_A |x-1| dx dy$

$$= \iint_{A^+} (x-1) dx dy - \iint_{A^-} (x-1) dx dy$$

oppure come nell'osservazione precedente

$$\underbrace{\iint_A (1-x) dx dy}_{\text{Banale: Area} = 4\pi} + 2 \iint_{A^+} (x-1) dx dy$$



Resta da calcolare $\iint_{A^+} (x-1) dx dy$. Tre strategie possibili

1° modo Normale asse x:

$$\int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x-1) dy = \int_1^2 (x-1) \cdot 2\sqrt{4-x^2} dx = \text{analisi 1}$$

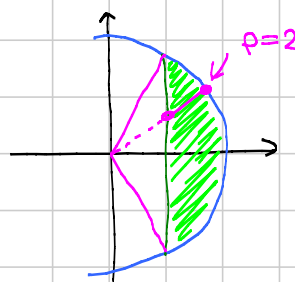
seccante

2° modo Normale asse y: $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dy \int_1^{\sqrt{4-y^2}} dx (x-1) = \text{si fa}$

3° modo Polari dirette $\theta \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$

$$x=1 \quad \rho \cos \theta = 1 \quad \rho = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\frac{1}{\cos \theta} \leq \rho \leq 2$$



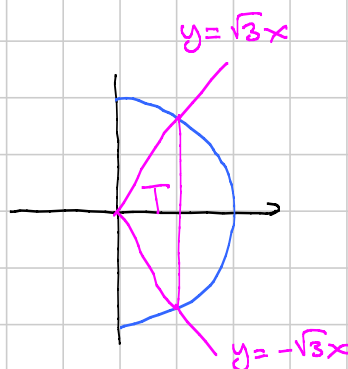
L'integrale diventa

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^1 dp \left[\underbrace{p \cos\theta - 1}_{x-1} \right] \underbrace{p}_{\uparrow} \\ &= 2 \int_0^{\pi/3} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^1 dp \left[p^2 \cos\theta - p \right] = 2 \int_0^{\pi/3} d\theta \left[\frac{1}{3} p^3 \cos\theta - \frac{1}{2} p^2 \right]_{\frac{1}{\cos\theta}}^1 \\ &= 2 \int_0^{\pi/3} d\theta \left(\frac{1}{3} \cos\theta - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \frac{1}{\cos^3\theta} + \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2\theta} \right) = \text{analisi 1 facile} \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2\theta} = \tan\theta$$

4° modo Settore - triangolo

settone



$$\iint_{A^+} = \int_0^2 dp \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\theta (p \cos\theta - 1) p - \underbrace{\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{3}x}^{\sqrt{3}x} dy (x-1)}_{\text{triangolo} \quad \triangle \text{ in cartesiane}}$$

Esempio 5 $\iiint_S |x-1| dx dy dz$

S = sfera con centro nell'origine e raggio 2

Osservo che è uguale a $\iiint_S |z-1| dx dy dz$ e questo lo faccio per sezioni lungo asse z .

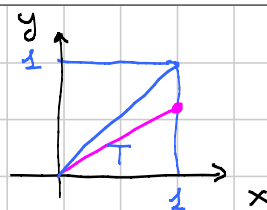
$$\begin{aligned} \iiint_S |z-1| dx dy dz &= \int_{-2}^2 dz |z-1| \cdot \text{Area}(S_z) \\ &= \int_{-2}^2 dz |z-1| \cdot \pi R_z^2 = \pi \int_{-2}^2 |z-1| (4-z^2) dz \\ &= \text{analisi 1 con valore assoluto.} \end{aligned}$$

Esempio 6 $\iint_Q \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy \quad Q = [0,1] \times [0,1]$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \sqrt{x^2+y^2}$$

si fa con la comoda sostituzione

$$y = x \sinh t$$



Provo in polari. Per simmetria

$$\iint_Q \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy = 2 \iint_{\frac{T}{4}} \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy$$

$$\rho \cos \theta = 1 \quad \rho = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} \underbrace{\rho}_{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \rho \, d\rho$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \left[\rho^3 \right]_0^{\frac{1}{\cos \theta}} = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 \theta} \, d\theta$$

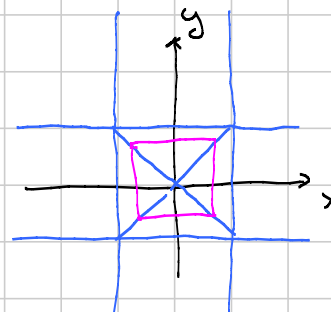
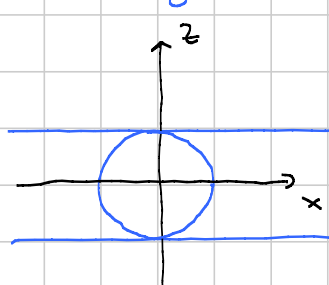
$$\int \frac{1}{\cos^3 \theta} \, d\theta = \int \frac{\cos \theta}{\cos^4 \theta} \, d\theta = \int \frac{\cos \theta}{(1-\sin^2 \theta)^2} \, d\theta = \int \frac{dt}{(1-t^2)^2} = \text{si fa.}$$

Esempio 7 $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+z^2 \leq 1}_{\text{cilindro asse } y}, \underbrace{y^2+z^2 \leq 1}_{\text{cilindro asse } x}\}$

$$\text{Vol}(S) =$$

$$= \int_{-1}^1 dz \, \text{Area}(S_z)$$

Cui è S_z ?



Fisso z , e voglio capire dove variano x e y : dalle equazioni

$$x^2 \leq 1-z^2, \quad y^2 \leq 1-z^2, \quad \text{cioè} \quad |x| \leq \sqrt{1-z^2} \quad |y| \leq \sqrt{1-z^2}$$

La sezione è un quadrato di lato $2\sqrt{1-z^2}$

In conclusione

$$\int_{-1}^1 \text{Area}(S_z) dz = 4 \int_{-1}^1 (1-z^2) dz = \text{si fa banale}$$

Oss. L'area $4(1-z^2)$ è, a meno di fattori π , la stessa che si ottiene sezionando una sfera.

Quindi per il principio di Cavalieri

$$\text{Vol}(S) = \frac{4}{\pi} \text{Vol}(\text{sfera di } R=1) = \frac{4}{\pi} \frac{4}{3} \pi = \frac{16}{3}$$

Esercizio vero: aggiungere il terzo cilindro lungo asse z e trovare

- volume
 - numero di "facce"
 - superficie (in futuro)
- o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 040

Titolo nota

10/11/2015

CAMBIO DI VARIABILI NEGLI INTEGRALI MULTIPLI

Def. Siano A e B due aperti di \mathbb{R}^n . Si dice **DIFFEOMORFISMO** tra A e B una qualunque funzione $\varphi: A \rightarrow B$ di classe C^1 con inversa $\psi: B \rightarrow A$ pure lei di classe C^1 .

Oss. La matrice jacobiana $J_\varphi(x)$ è invertibile in ogni p.to $x \in A$ e idem per $J_\psi(x)$ per $x \in B$. Inoltre per il te. delle funzioni composte

$$J_\psi(\varphi(x)) \cdot J_\varphi(x) = \text{Id} \\ \forall x \in A$$

$$J_\varphi(\psi(x)) J_\psi(x) = \text{Id} \\ \forall x \in B$$

Teorema Sia $\varphi: A \rightarrow B$ un diffeomorfismo.
Sia $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata con supporto compatto $K \subseteq B$ (cioè $f(x) = 0$ per ogni $x \notin K$).
Allora

$$\int_B^* f(y) dy = \int_A^* f(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

e idem per gli integrali inferiori.

Oss. In un certo senso generalizza il cambio di variabili di analisi 1:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy = \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$$

$$y = \varphi(x)$$

$$\varphi: \underset{A}{[a, b]} \rightarrow \underset{B}{[\varphi(a), \varphi(b)]}$$

Non c'è il valore assoluto, ma gli estremi

possono venire "scambiati". Ad analisi 1 φ non era per forza invertibile.

Oss. Visto che abbiamo usato \int^* e \int_* la formula vale sempre.
 Inoltre la funzione al LHS è integrabile \Leftrightarrow lo è quella
 al RHS ed in tal caso vale tutto con integrali veri.
 — o — o —

ROAD MAP

- (1.1) La formula si comporta bene per composizione
 - (1.2) Se vale per i rettangoli (cioè f è una funzione caratt. di un rett. $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$), e vale con integrali veri, allora vale sempre
 - (2.1) La formula vale se $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una trasformazione affine speciale
 - (2.2) Vale per le trasformazioni affini in generale
- FINE PRIMA PARTE

1.1 Siano $\varphi_1: A \rightarrow B$ e $\varphi_2: B \rightarrow C$. Se vale per φ_1 e φ_2 , allora vale per $\varphi_3: A \rightarrow C$ definita da $\varphi_3(x) = \varphi_2(\varphi_1(x))$

Dim. Sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ ammissibile. Allora

$$\begin{aligned}
 \int_C^* f(z) dz &= \int_B^* \overbrace{f(\varphi_2(y)) \cdot |\text{Det } J_{\varphi_2}(y)|}^{\hat{f} \text{ su } B} dy \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \text{vale per } \varphi_2 \\
 &= \int_A^* f(\varphi_2(\varphi_1(x))) \cdot |\text{Det } J_{\varphi_2}(\varphi_1(x))| \cdot |\text{Det } J_{\varphi_1}(x)| dx \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \text{vale per } \varphi_1 \\
 &= \int_A^* f(\varphi_3(x)) \underbrace{|\text{Det } J_{\varphi_3}(x)|}_{\text{Funzione composta}} dx
 \end{aligned}$$

e idem per gli integrali inferiori.

— o — o —
 \uparrow con int. veri

1.2 Se vale per i rettangoli per ogni φ appartenente ad una classe di trasformazioni chiusa rispetto al passaggio all'inversa, allora vale per tutte le f per tutte le trasformazioni della classe.

Dim. Step 1 Se vale per i rettangoli con integrali veri, allora vale per le step functions, sempre con integrali veri.

$$\int_B f_R(y) dy = \int_A f_R(\varphi(x)) |\text{Det } J_\varphi(x)| dx \quad f_R(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \in R \\ 0 & \text{se } y \notin R \end{cases}$$

$I_1(\varphi) = \text{LHS}$, $I_2(\varphi) = \text{RHS}$ sono applicazioni lineari definite su SF e coincidono in una base, quindi coincidono ovunque. Qui serve che siano integrali veri.

Step 2 Se vale sulle SF, allora prendo una f qualunque e prendo una qualunque SF $g \geq f$ in B (g nulla fuori da B)
Allora

$$\begin{aligned} \int_B g(y) dy &= \int_A \underbrace{g(\varphi(x))}_{\geq f(\varphi(x))} |\text{Det } J_\varphi(x)| dx \\ &\geq \int_A^* f(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx \\ &\quad \uparrow \end{aligned}$$

Fatto generale: se $g_1 \geq g_2$ e g_1 è integrabile, allora $\int g_1 \geq \int^* g_2$

Facendo l'inf. su tutte le $g \geq f$ ottengo

$$\int_B^* f(y) dy \geq \int_A^* f(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx = (\star)$$

Step 3 Ora abbiamo assunto che tutto ciò valga non solo per φ , ma anche per la sua inversa $\psi: B \rightarrow A$. Ma allora

$$(\star) \geq \int_B^* \underbrace{f(\varphi(\psi(x)))}_x \underbrace{|\text{Det } J_\varphi(\psi(x))| \cdot |\text{Det } J_\psi(x)|}_1 dx = \int_B^* f(x) dx$$

Quindi sono tutte uguali. Idem per gli integrali superiori
— 0 — 0 —

2.1 Trasf. affini speciali

(A) Traslazioni : è banale che vale per i rettangoli, sono stabili per inversa, quindi vale per le traslazioni

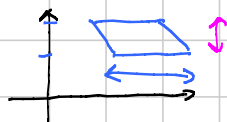
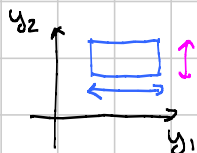
(B) Scambi di coordinate : $M_{ij}(x_1, \dots, x_n) =$ scambiare x_i e x_j
Per queste vale banalmente sui rettangoli, ognuna è l'inversa di se stessa, quindi per queste vale

(C) Dilatazione sulla prima coord : $M_\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, x_2, \dots, x_n)$

Vale per i rettangoli perché il $|\det| = |\lambda|$ compensa il cambio di "volume" del rettangolo. La classe è chiusa per inversa, quindi anche qui vale per ogni funzione.

(D) Somma prime due coordinate $S(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n)$
 $|\det S| = 1$. L'effetto su un rettangolo

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{\mathbb{R}}(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f_{\mathbb{R}}(\varphi(x)) dx$$



Ancora una vale per i rettangoli, dunque vale in generale perché l'inversa è dello stesso tipo.

2.2 Trasformazioni affini generali

Ogni trasformazione affine è composizione di trasformazioni di tipo (A), (B), (C), (D) (Lemma di algebra lineare).

Grazie al pto 2.1 se vale per le singole trasformazioni vale anche per la composizione.

Corollario Sia $\varphi(x) = Lx$ una trasformazione lineare.
 Sia $S \subseteq B$ un insieme misurabile
 Allora

$$\int_B f_S(y) dy = \int_A f_S(\varphi(x)) |\text{Det } L| dx \quad \begin{array}{l} \varphi: A \rightarrow B \\ \psi: B \rightarrow A \end{array}$$

$$\stackrel{||}{\text{meas}(S)} = |\text{Det } L| \text{meas}(\psi(S))$$

Questo dice come si trasforma la misura degli insiemi.

Analogamente, dato un insieme $K \subseteq A$ misurabile

$$\text{meas}(\varphi(K)) = |\text{Det } L| \text{meas}(K)$$

Dim. Basta usare la riga di sopra con $S = \varphi(K)$

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 041

Titolo nota

10/11/2015

CAMBIO DI VARIABILI IN GENERALE

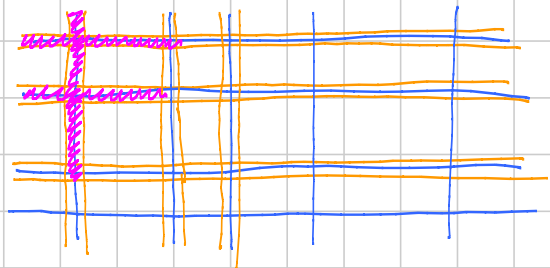
- ROAD MAP :
- ① Se vale per i cubi con integrali veri per una classe di trasformazioni chiusa rispetto all'inversa, allora vale in generale
 - ② Se vale per i cubi piccoli a meno di ϵ (da specificare), allora vale per i cubi
 - punto vero \rightarrow ③ Vale per i cubi piccoli a meno di ϵ

- ① La teoria degli integrali con SF costruite usando i rettangoli coincide con la teoria fatta a partire dai cubi.

"Dim" 1° passo Posso fare la teoria usando solo rettangoli ad estremi razionali

estremi reali

estremi in \mathbb{Q}



Nelle zone "interne" non modifica la step function.

Nelle zone "ai bordi" la posso $\pm \pi$, dove π è la costante che limita la funzione.

In termini di integrale la diffe può essere una piccola.

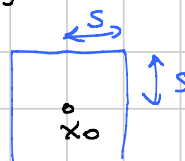
2° passo I rettangoli ad estremi razionali sono unione di cubi.

— o — o —

2 Notazione $\|x\| := \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|$

Si definisce $C(x_0, s) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - x_0\| \leq s\}$

↑
cubo con centro in x_0
e semilato s



Supponiamo che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. \forall cubo $C(y_0, s) \subseteq B$
con $s \leq \delta$ vale la formula

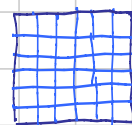
$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^{m+1}} \int_A \dots \leq \int_B f_C(y) dy \leq (1+\varepsilon)^{m+1} \int_A f_C(\varphi(x)) |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

↑ vale a meno di ε sui cubi piccoli (di semilato $s \leq \delta$)

Allora vale su tutti i cubi senza l'epsilon.

Dem. Prendo un cubo C grande, fisso $\varepsilon > 0$ e scrivo C come
unione di cubi piccoli (rispetto ad ε) essenzialmente
disgiunti (senza parti comuni in comune)

$$C = \bigcup_{i=1}^k C_i$$



Ma allora $f_C(y) = \sum_{i=1}^k f_{C_i}(y)$

Uso la linearità a LHS, RHS, e ottengo

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^{m+1}} \int_A \dots \leq \int_B f_C(y) dy \leq (1+\varepsilon)^{m+1} \int_A f_C(\varphi(x)) |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

Poiché vale per ogni $\varepsilon > 0$ facendo tendere $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ho la tesi.

— o — o —

Cubi e diffeomorfismiSia $R: U \rightarrow V$ un diffeomorfismo.

Sia

 $R^{-1}: V \rightarrow U$ la sua inversa.Come posso stimare $\|R(u_1) - R(u_2)\|$?

Uso Lagrange sulle singole componenti

$$|R_i(u_1) - R_i(u_2)| = \langle \nabla R_i(\theta_i), u_1 - u_2 \rangle = \langle \text{vettore}, \text{vettore} \rangle$$

$$|\langle v, w \rangle| = |v_1 w_1 + \dots + v_m w_m| \leq |v_1| \cdot |w_1| + \dots + |v_m| \cdot |w_m| \\ \leq (|v_1| + \dots + |v_m|) \|w\|$$

Quindi

$$|R_i(u_1) - R_i(u_2)| \leq \|u_1 - u_2\| \cdot \text{somma elementi della riga } i\text{-esima di } J_R$$

Questa vale per ogni i , quindi

$$\|R(u_1) - R(u_2)\| \leq \max_{u \in U} \|J_R(u)\| \cdot \|u_1 - u_2\|$$

dove $\|J\| = \max_{1 \leq i \leq m} \|\text{riga } i\text{-esima}\|$

$$\begin{pmatrix} |*|*|*|*| \\ |*|*|*|*| \\ |*|*|*|*| \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \\ \rightarrow R_3 \end{matrix} \\ \downarrow \text{max} \\ \|J\|$$

Data una matrice J :

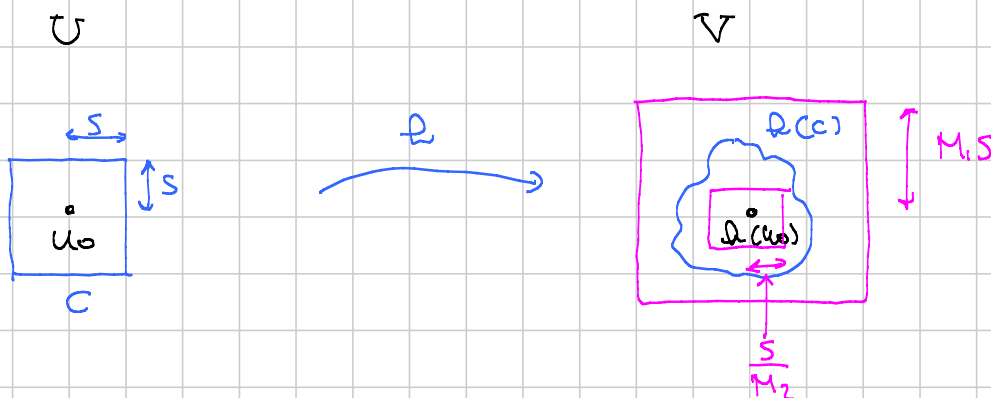
$$\|Jx\| \leq \|J\| \cdot \|x\|$$

\uparrow max comp \uparrow max comp.
 \uparrow max somma riga

Aggiunto dopo video: da qui in poi
 è fatto forse meglio alla LEZ. successiva

Lemma dei cubettiSe $R: U \rightarrow V$ è un diffeomorfismo,
allora esistono 2 costanti M_1 ed M_2 t.c.

$$C(R(u_0), \frac{s}{M_2}) \subseteq R(C(u_0, s)) \subseteq C(R(u_0), M_1 s)$$



La cosa non ovvia è che M_1 ed M_2 non dipendono dal cubo in partenza, ma solo da Q .

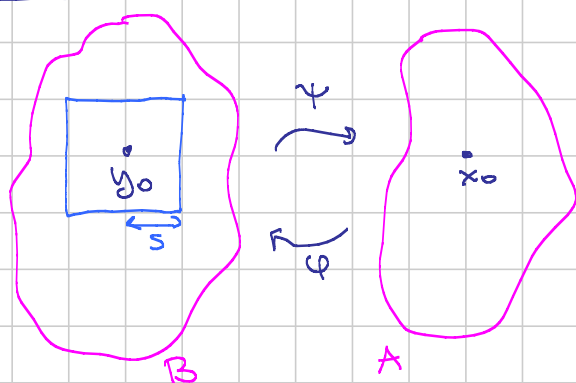
In particolare posso prendere

$$M_1 := \sup \{ \|J_Q(u)\| : u \in U \}$$

$$M_2 := \sup \{ \|J_{Q^{-1}}(v)\| : v \in V \}$$

Dato per buono il lemma, dimostriamo che la formula vale a meno di ε per i cubi piccoli.

Dim. Uso il lemma usando $Q(y) = J_\varphi(x_0)(\psi(y))$



↑
non sto formando quadrato,
ma quasi

$$J_Q(y) = J_\varphi(x_0) \cdot J_\psi(y)$$

Per $y = y_0$ è la matrice identica, quindi se s è abbastanza piccolo $J_Q(y)$ è vicina all'identità, quindi $\|J_Q(y)\|$ e $\|J_{Q^{-1}}(y)\|$ sono vicine a 1.

Prendiamo la piccolezza in modo che M_1 ed M_2 siano $\leq 1+\varepsilon$. Allora

$$R(C(y_0, s)) \subseteq C(R(y_0), (1+\varepsilon)s) \quad \text{quindi}$$

$$\text{meas}(R(C(y_0, s))) \leq \text{meas}(C(R(y_0), (1+\varepsilon)s)) \\ = 2^m \cdot (1+\varepsilon)^m s^m$$

$$\text{meas}(J_\varphi(x_0) \varphi(C(y_0, s)))$$

$$= |\text{Det } J_\varphi(x_0)| \cdot \text{meas}(\varphi(C(y_0, s)))$$

" ← ho usato come le trasformazioni lineari cambiano la misura

A questo punto

$$\begin{aligned} \int_A f_C(\varphi(x)) |\text{Det } J_\varphi(x)| dx &= \int_{\varphi(C)} |\text{Det } J_\varphi(x)| dx \\ &\stackrel{\square}{\sim} \int_{\varphi(C)} |\text{Det } J_\varphi(x_0)| dx \\ &= |\text{Det } J_\varphi(x_0)| \cdot \text{meas}(\varphi(C)) \\ &\leq (1+\varepsilon)^m \cdot 2^m \cdot s^m \\ &= (1+\varepsilon)^m \cdot \text{meas}(C) \\ &= (1+\varepsilon)^m \cdot \int_B f_C(y) dy \end{aligned}$$

Preciso il passaggio \sim . Voglio dire che $|\text{Det } J_\varphi(x)| \sim |\text{Det } J_\varphi(x_0)|$ se x è vicino a x_0 . Per disegolare il cubo iniziale abbastanza piccolo, avremo che

$$|\text{Det } J_\varphi(x)| \leq |\text{Det } J_\varphi(x_0)| \cdot (1+\varepsilon)$$

e questo sostituito porta alla formula

$$\int_A f_C(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx \leq (1+\varepsilon)^{m+1} \int_B f_C(y) dy$$

che è una delle 2 che volevo.

ANALISI 2

-

LEZIONE 042

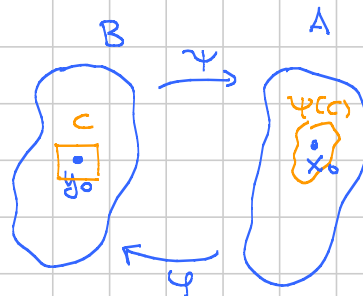
Titolo nota

11/11/2015

Back to cambio variabili

In modo standard si arriva al punto

"se vale la formula a meno di ε sui cubi piccoli, allora vale in generale"

Brutale: perché è vero sui cubi piccoli?

$$\int_A f_C(\psi(x)) |\text{Det } J_\psi(x)| dx =$$

$$= \int_{\psi(C)} |\text{Det } J_\psi(x)| dx$$

$$\sim \int_{\psi(C)} |\text{Det } J_\psi(x_0)| dx$$

$$= |\text{Det } J_\psi(x_0)| \underbrace{\text{meas}(\psi(C))}_S$$

$$= \text{meas}(J_\psi(x_0)(\psi(C)))$$

$$= \text{meas}(Q(C)) \quad \text{dove } Q = J_\psi(x_0) \circ \psi$$

$$\stackrel{(*)}{\sim} \text{meas}(C) = \int_B f_C(y) dy$$

$$J_Q(y) = J_\psi(x_0) \cdot J_\psi(y)$$

se $y = y_0$ allora $J_\psi(y) = \text{Id}$, ma allora
se C è piccolo $J_\psi(y) \sim \text{Id}$, quindi
 Q moralmente è una traslazione.

— o —

Notazioni $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

$$C(y_0, s) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - y_0\| \leq s\}$$

↑
cubo

Data una matrice M , si pone

$$\|M\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |M_{ij}| \quad \leftarrow \text{somma sulla riga } i\text{-esima}$$

LEMMA DEL CUBETTO ESTERNO

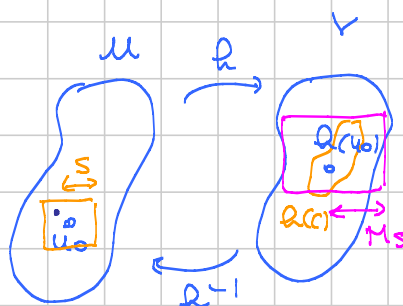
Dato un generico diffeomorfismo

$$R: U \rightarrow V$$

(U e V sono aperti in \mathbb{R}^n)e dato un cubo $C(u_0, s) \subseteq U$ vale la relazione

$$R(C(u_0, s)) \subseteq C(R(u_0), Ms)$$

dove $M = \max_{u \in C(u_0, s)} \|J_R(u)\|$.

Dim. Si tratta di far vedere che

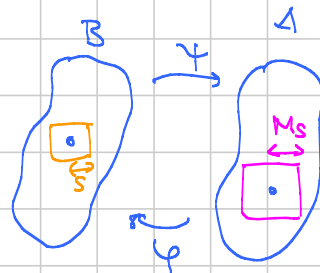
$$\|R(u) - R(u_0)\| \leq M \|u - u_0\| \text{ dove } M \text{ è definito come sopra} \\ \leq Ms$$

La disuguaglianza segue da Lagrange (ved. les. 41)

Conseguenza 1 Applico il lemma con $R = \psi: B \rightarrow A$

Posto $\hat{M} := \sup_{y \in B} \|J_\psi(y)\|$ che suppongo
finito

avremo che



$$\psi(C(y_0, s)) \subseteq C(\psi(y_0), Ms)$$

↑ indipendente dal cubo

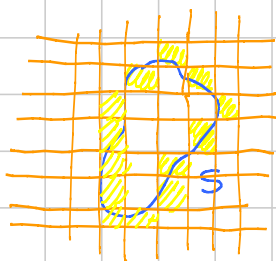
[Abbiamo detto meglio: "se C è piccolo, allora $\psi(C)$ è piccolo"]Conseguenza 2 Dalla conseguenza 1 segue che

$$\text{meas}^*(\psi(C(y_0, s))) \leq M^n \underbrace{\text{meas}(C(y_0, s))}_{(2s)^n}$$

Dim. banale da sopra

Conseguenza 3 Se $S \subseteq B$ è misurabile, allora $\varphi(S)$ è misurabile
 ↑ Esercizio

Dim. S è misurabile $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ posso ricoprire ∂S con cubetti di misura totale $< \varepsilon$, cioè



$$\partial S \subseteq \bigcup_{i=1}^k C_i$$

Ma allora $\partial \varphi(S) = \varphi(\partial S) \subseteq \bigcup_{i=1}^k \varphi(C_i)$
 ↑ φ è differenz. ↑ a sua volta contenuti in cubi di diametro un po' più grande

Allora $\partial \varphi(S)$ è contenuta in cubi di misura totale $< M^n \varepsilon$, e quindi $\varphi(S)$ è misurabile.

Oss. Grazie alla conseguenza 3 posso risparmiare un po' di integrali inferiori e superiori

Scelta della piccolezza dei cubi Scelgo $\delta > 0$ abbastanza piccolo in maniera tale che valgano 2 proprietà ($\varepsilon > 0$ è dato)

$$\rightarrow |\text{Det } J_{\varphi}(x_1)| \leq (1+\varepsilon) |\text{Det } J_{\varphi}(x_2)| \quad \forall x_1, x_2 \text{ in } A \text{ con } \|x_1 - x_2\| \leq \hat{M}\delta$$

$$\rightarrow \|J_{\varphi}(\varphi(y_1)) J_{\varphi}(y_2)\| \leq (1+\varepsilon) \quad \forall y_1 \in B \quad \forall y_2 \in B \text{ con } \|y_1 - y_2\| \leq \delta$$

se $y_1 = y_2$ la matrice è l'identità e $\|Id\| = 1$

Queste due sono possibili se J_{φ} e J_{φ} sono unif. continue

$$|\text{Det } J_{\varphi}(x_1)| \leq |\text{Det } J_{\varphi}(x_2)| + |\text{Det } J_{\varphi}(x_1) - \text{Det } J_{\varphi}(x_2)|$$

Divido per $|\text{Det } J_{\varphi}(x_2)|$ e ottengo

$$\frac{|\text{Det } J_{\varphi}(x_1)|}{|\text{Det } J_{\varphi}(x_2)|} \leq 1 + \frac{|\text{Det } J_{\varphi}(x_1) - \text{Det } J_{\varphi}(x_2)|}{|\text{Det } J_{\varphi}(x_2)|}$$

piccolo quanto voglio se x_1 e x_2 sono opp. vicini
 ← assunto che in A questo \geq costante positiva fissa

Esercizio Dimostrare altrettanto per bene (o meglio) che anche la seconda richiesta è possibile.

Gran finale: giustificazione del brutale iniziale per cubi $C(y_0, s)$ con $s \leq \delta$

$$\int_A^* f_C(\varphi(x)) |\text{Det } J_{\varphi}(x)| dx$$

$$= \int_{\varphi(C)}^* |\text{Det } J_{\varphi}(x)| dx$$

$$\leq (1+\varepsilon) \int_{\varphi(C)}^* |\text{Det } J_{\varphi}(x_0)| dx$$

$$= (1+\varepsilon) |\text{Det } J_{\varphi}(x_0)| \text{meas}^*(\varphi(C))$$

$$= (1+\varepsilon) \text{meas}(J_{\varphi}(x_0)(\varphi(C))) \quad \leftarrow \text{proprietà appl. lineari}$$

$$= (1+\varepsilon) \text{meas}(Q(C)) \quad \text{con } Q = J_{\varphi}(x_0) \circ \varphi$$

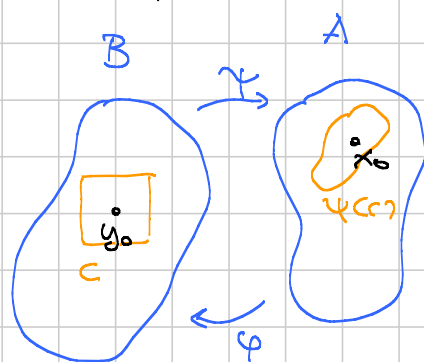
$$\leq (1+\varepsilon) \underbrace{(1+\varepsilon)^m}_{\mu^m} \text{meas}(C)$$

Ho usato che $J_{\varphi}(y) = J_{\varphi}(x_0) J_{\varphi}(y)$ più la seconda proprietà di δ

$$= (1+\varepsilon)^{m+1} \int_B^* f_C(y) dy$$

Mettendo insieme abbiamo ottenuto

$$\int_B^* f_C(y) dy \geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^{m+1}} \int_A^* f_C(\varphi(x)) |\text{Det } J_{\varphi}(x)| dx$$



Resterebbe da ottenere la disuguaglianza opposta.
Quella si fa allo stesso modo partendo da

LEMMA DEL CUBETTO INTERNO $R: U \rightarrow V$ diffeom.
 $C(u_0, s) \subseteq U$

Allora

$$R(C(u_0, s)) \supseteq C(R(u_0), \frac{s}{M})$$

con M opportuna

Dim. Esercizio (molto meno banale di quanto sembra).
Capire perché non posso fare R^{-1} a dx e sx, il che
banalizzerebbe la cosa. \square

Oss. Abbiamo dimostrato il teorema

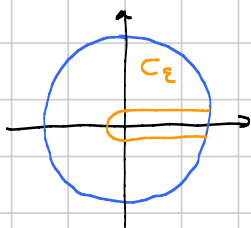
$$\int_B f(y) dy = \int_A f(\varphi(x)) \cdot |\det J_\varphi(x)| dx$$

con integrali inferiori e superiori assumendo

- $\varphi: A \rightarrow B$ e $\psi(B) \rightarrow A$ una l' inversa dell'altra
- J_φ e J_ψ esistono e sono univ. continue su A/B
- $|\det J_\varphi| \geq a_0 > 0$ su A e $|\det J_\psi| \geq b_0 > 0$ in B .

Quindi non vale per le polari 😞 : ① perché $J = \rho$ si può annullare
annullare
② $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$ si ricolano
rincollano

Come se ne esce?



C_ϵ = cerchio meno perfetto

Su C_ϵ posso usare la formula e poi
passo al limite per $\epsilon \rightarrow 0$

ANALISI 2

—

LEZIONE 043

Titolo nota

11/11/2015

INTEGRALI MULTIPLI IMPROPRI

Un integrale multiplo di d'ica IMPROPRIO se la zona di integrazione è non limitata e/o la funzione è non limitata.

Grossa differenza con Analisi 1

Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e data $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ a segno qualunque se

$$\int_A |f(x)| dx = +\infty$$

allora per definizione si pone l'integrale indeterminato senza avvertire oltre (non è completamente vero).

In generale si pone $f(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parte posit.}}}{f_+(x)} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parte neg.}}}{f_-(x)}$ e si definisce

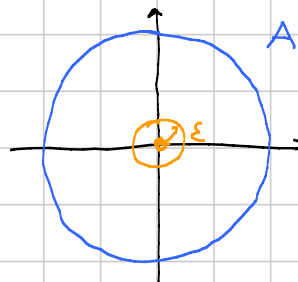
$$\int_A f(x) dx = \int_A f_+(x) dx - \int_A f_-(x) dx$$

e si sviluppa la teoria solo per integrande ≥ 0 in A .

Quindi d'ora in poi ci limitiamo al caso $f(x) \geq 0$ in A .

Esempio 1 $\iint_A \underbrace{\frac{|x|}{x^2+y^2}}_{f(x,y)} dx dy$ $A =$ cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio 1.

Per $(x,y) \rightarrow (0,0)$ la $f(x,y)$ ha liminf 0 e limsup $+\infty$, dunque non è limitata e l'integrale è improprio.



Definizione ovvia ma un po' troppo (problema in un solo p.to)

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{A_\varepsilon} f(x,y) dx dy$$

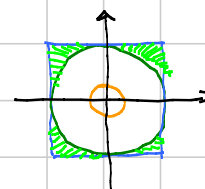
A_ε : cerchio di raggio ε .

Per ogni $\varepsilon > 0$ l'integrale su A_ε ha senso (è proprio).
Tutto sta ad indagare l'esistenza del limite.

$$\iint_{A_\varepsilon} \frac{|x|}{x^2+y^2} dx dy = \int_\varepsilon^1 dp \int_0^{2\pi} d\theta \frac{p |\cos \theta|}{p^2} \cdot p = 4 \int_\varepsilon^1 dp \rightarrow 4$$

Esempio 2 Stessa funzione su $Q = [-1,1] \times [-1,1]$

$Q_\varepsilon = Q \setminus \text{cerchio}$ e procediamo come prima



Osservazione comoda

$$\int_Q = \int_A + \int_{Q \setminus A}$$

\uparrow
cerchio di
prima

$\underbrace{\int_{Q \setminus A}}_{\text{integrale proprio, quindi un numero}}$

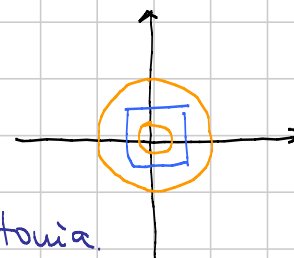
$$\Rightarrow \int_Q \text{ converge a } \int_A \dots + \int_{Q \setminus A} \dots$$

Oss. teorica

Se $f(x) \geq 0$ nella zona di integrazione, allora il limite fatto togliendo cerchi o quadrati o triangoli è lo stesso.

Idea: per ogni cerchio esiste un quadrato contenuto e viceversa.

Inoltre il $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+}$ esiste sempre per monotonia.



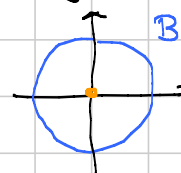
Esercizio: formalizzare il discorso.

Achtung! Se $f(x)$ ha segno variabile, posso ottenere risultati diversi togliendo figure diverse.

L'esempio si può fare.

Questo è il motivo per una teoria con integrando ≥ 0 .

Esempio classico $\iint_B \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dx dy$



Per quali α converge?

$$\begin{aligned} \iint_B \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dx dy &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{B_\varepsilon} \dots \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 dp \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{p^{2\alpha}} \cdot p \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dp}{p^{2\alpha-1}} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} = 2\pi \int_0^1 \frac{dp}{p^{2\alpha-1}} \end{aligned}$$

Analisi 1: questo converge $\Leftrightarrow 2\alpha-1 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 1$

Occhio che per $\alpha=1$ il denominatore è quadratico.

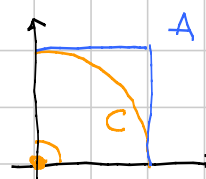
Stesso esempio in \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} \iiint_S \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^\alpha} dx dy dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 dp \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \frac{1}{p^\alpha} p^2 \cos \varphi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dp}{p^{\alpha-2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \cos \varphi}_{\text{Numero}} \\ &= \text{numero} \int_0^1 \frac{dp}{p^{\alpha-2}} \end{aligned}$$

e questo converge $\Leftrightarrow \alpha < 3$

Esempio $\iint_A \frac{1}{x+y} dx dy$ $A = [0,1] \times [0,1]$

Converge perché denum $\sim p$



$$\iint_A \text{converge} \Leftrightarrow \int_C \text{converge} =$$

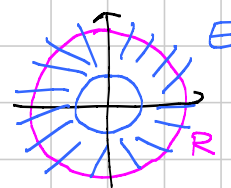
$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 dp \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{1}{p(\cos\theta + \sin\theta)} \cdot p = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} d\theta$$

Questo è un integrale proprio: infatti $\exists m > 0$ t.c.

$$\cos\theta + \sin\theta \geq m \quad \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

(Infatti il LHS ha minimo per θ in un arco $\theta_0 \in \frac{\pi}{2}$ e in θ_0 non si possono annullare insieme $\cos\theta_0$ e $\sin\theta_0$)

Esempio (n+1) $\iint_E \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha} dx dy$



$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{\text{Cotona}} \dots = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R dp \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{1}{p^\alpha} p$$

$$= 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{dp}{p^{\alpha-1}} \quad \text{e questo converge} \Leftrightarrow \alpha-1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$$

Esempio $\iint_Q \frac{\arctan x^3}{x^4+y^4} dx dy$ $Q := [0, +\infty) \times [0, +\infty)$

ha 2 problemi quindi va spezzato

Su B localmente $f(x,y) \sim \frac{1}{p}$ quindi l'integrale converge (esponente < dim.)

Su E localmente $f(x,y) \sim \frac{1}{p^4}$ quindi converge



↑
rigoroso: $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x,y) \leq \frac{M}{(x^2+y^2)^2} \quad \forall (x,y) \in E$

ANALISI 2

-

LEZIONE 044

Titolo nota

13/11/2015

INTEGRALI IMPROPRI

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua (ma basta meno)
tale che $f(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^n$.

È ragionevole porre

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{B_R} f(x,y) dx dy$$

esiste $\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

dove $B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

Prop. Sia $\{A_k\}$ una successione di sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 tali che

(i) A_k è limitato e misurabile per ogni $k \in \mathbb{N}$

(ii) A_k "invade \mathbb{R}^2 " nel senso che

$$\forall R > 0 \quad A_k \supseteq B_R \text{ definitivamente}$$

Allora

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \iint_{A_k} f(x,y) dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{B_R} f(x,y) dx dy$$

Brutalmente : $\iint_{\mathbb{R}^2}$ non dipende da come si invade \mathbb{R}^2 .

Dim. Ci sono due casi a seconda che il limite al RHS sia $\in \mathbb{R}$ oppure $+\infty$. Faccio solo il caso in cui è $L \in \mathbb{R}$ (l'altro è più semplice).
Fisso $\varepsilon > 0$ e dimostro che

$$L - \varepsilon \leq \iint_{A_k} \dots \leq L \quad \text{definitivamente}$$

La disug. di destra vale per ogni $k \in \mathbb{N}$. Infatti ogni A_k per l'ipotesi (i) è contenuto in una certa B_{R_k} con R_k opportuno quindi

$$\iint_{A_k} \dots \leq \iint_{B_{R_k}} \dots \leq L$$

↑ perché il limite a RHS è il sup

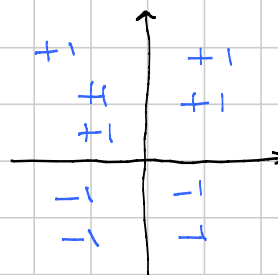
Per la disug. di sx so che esiste $R_\varepsilon > 0$ t.c.

$$\iint_{B_R} f(x,y) dx dy \geq L - \varepsilon \quad \forall R \geq R_\varepsilon$$

Ma definitivamente $A_k \supseteq B_{R_\varepsilon}$ e quindi $\iint_{A_k} \dots \geq \iint_{B_{R_\varepsilon}} \geq L - \varepsilon$.

Achtung! Il discorso non vale se $f(x,y)$ ha segno variabile, anche se è limitata.

Esempio $f(x,y) = \begin{cases} +1 & \text{nel 1° e 2° quadrante} \\ -1 & \text{nel 3° e 4°} \end{cases}$



$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{B_R} f(x,y) dx dy = 0$$

$$A_k = [-k, k] \times [-k, k+1]$$

$\lim_{k \rightarrow +\infty} \iint_{A_k} \dots = +\infty$ Posso fare in modo che il limite sia un qualunque $L \in \mathbb{R}$ oppure anche che non esiste.

Domanda C'è un esempio in cui il limite su B_R oppure su $[-k, k] \times [-k, k]$ è diverso?

Oss. Il discorso è lo stesso per qualunque integrale improprio in più variabili.

Esercizio Calcolare l'integrale su \mathbb{R}^2 di $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{B_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R dp \int_0^{2\pi} d\theta e^{-p^2} p = 2\pi \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R p e^{-p^2} dp \\ &= \pi \lim_{R \rightarrow +\infty} [-e^{-p^2}]_0^R = \pi \lim_{R \rightarrow +\infty} [-e^{-R^2} + 1] = \pi \end{aligned}$$

Lo stesso limite lo posso calcolare con $A_k = [-k, k] \times [-k, k]$

$$\begin{aligned} \iint_{A_k} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_{-k}^k dx \int_{-k}^k dy e^{-x^2-y^2} \\ &= \underbrace{\int_{-k}^k e^{-x^2} dx}_{I_k} \underbrace{\int_{-k}^k e^{-y^2} dy}_{I_k} = I_k^2 \end{aligned}$$

Confrontando con il precedente $\lim_{k \rightarrow +\infty} I_k^2 = \pi$, quindi ($I_k > 0$)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} I_k = \sqrt{\pi} \quad \text{MA} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Questo dimostra l'integrale gaussiano

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}}$$

Esercizio 1 $\iint_B \frac{1}{x^2+y^4} dx dy$



Caso fortunato

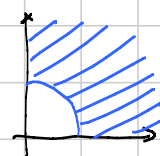
$$\frac{1}{x^2+y^4} \geq \frac{1}{x^2+y^2} \quad \text{appena } y \leq 1$$

quindi

$$\iint_B \frac{1}{x^2+y^4} dx dy \geq \iint_B \frac{1}{x^2+y^2} dx dy = +\infty \quad \uparrow \frac{1}{\rho^2}$$

Vale anche se il raggio è ≥ 1 : basta spezzare in 2.

Esercizio 2 $\iint_E \frac{1}{x^2+y^4} dx dy$



Ora la disug. non ci aiuta

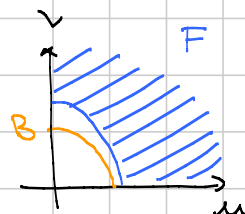
Slogan: cambiare variabile per PAREGGIARE GLI ESPONENTI

Pongo $x = u^2$, $y = v$. Devo calcolare J

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leadsto 2u = J$$

Allora $\iint_E \frac{1}{x^2+y^4} dx dy = \iint_F \frac{1}{u^4+v^4} \cdot 2u du dv$

Chi è F ? $E = x^2+y^2 \geq 1 \quad F = u^4+v^2 \geq 1$
 $v \geq \sqrt{1-u^4}$



$$\iint_F \frac{2u}{u^4+v^4} du dv \text{ converge} \Leftrightarrow \iint_B \frac{2u}{u^4+v^4} du dv \text{ converge}$$

e converge perché è del tipo $\frac{1}{\rho^3}$

Detto rigorosamente: $\iint_B \frac{u}{u^4+v^4} du dv = \int_1^{+\infty} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\rho \cos \theta \cdot \rho}{\rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)}$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^2} d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta} d\theta$$

converge

numero perché è un integrale proprio perché

$$\cos^4 \theta + \sin^4 \theta \geq m_0 > 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

(funzione continua, ammette minimo, bla bla bla)

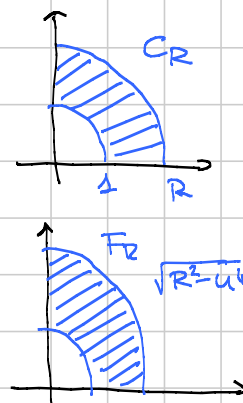
Oss. Ho fatto il cambio di variabili direttamente sull'integrale improprio. Il tutto avrebbe giustificato.
 Il modo di farlo è standard

$$\iint_E \frac{1}{x^2+y^4} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{C_R} \frac{1}{x^2+y^4} dx dy$$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{F_R} \frac{2u}{u^4+v^4} du dv$$

$$= \iint_F \frac{2u}{u^4+v^4} du dv$$

(Ho usato l'indipendenza dal "modus operandi").



Esempio 3 $\iint_E \frac{x^a}{x^2+y^4} dx dy$ per quali a converge

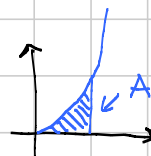


Paraggio gli esponenti $x=u^2, y=v \leadsto J=2u$

Diventa $\iint_F \frac{u^{2a}}{u^4+v^4} \cdot 2u du dv \leadsto$ come prima $\frac{\rho^{4+2a}}{\rho^4} = \frac{1}{\rho^{3-2a}}$

Converge $\Leftrightarrow 3-2a > 2 \Leftrightarrow 2a < 1 \Leftrightarrow a < \frac{1}{2}$

Esempio 4 $\iint_A \frac{1}{x^2+y^4} dx dy$



dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$

$$\leq \frac{1}{x^2+y^4} \leq \frac{1}{x^2}$$

↑
😊

Lo riposto in cartesiane

$$\iint_A \frac{1}{x^2+y^4} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \frac{1}{x^2+y^4} \leq \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \left(\frac{1}{x^2} \right)$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx \underbrace{\int_0^{x^2} dy}_{x^2} = \int_0^1 \frac{1}{x^2} \cdot x^2 dx = 1$$

ANALISI 2

LEZIONE 045

Titolo nota

13/11/2015

Qss. Proviamo a fare $\iint_E \frac{1}{x^2 y^4} dx dy$ direttamente in polari

$$= \int_1^{+\infty} dp \int_0^{2\pi} d\theta \frac{p}{p^2 \cos^2 \theta + p^4 \sin^4 \theta} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{p} dp \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 \theta + p^2 \sin^4 \theta} d\theta$$

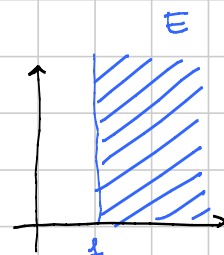
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{+\infty} dp \frac{1}{p \cos^2 \theta + p^3 \sin^4 \theta}$$

converge per quasi ogni valore di θ , meglio per $\theta \neq 0, \pi, 2\pi$, ma il valore dipende da θ in modo misterioso

per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$ converge, ma ad un valore dipendente da p in modo misterioso

Altra via (perversa?)

$$\begin{aligned} \iint_E \frac{1}{x^2 y^4} dx dy &= \int_1^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy \frac{1}{x^2 y^4} \\ &= \int_1^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy \frac{1}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{y^4}{x^2}} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{y^4}{x^2}} dy \end{aligned}$$

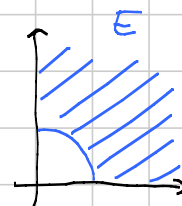


Pongo $\frac{y^2}{x} = z$, quindi $y^2 = xz$, quindi $y = \sqrt{x} \sqrt{z} \Rightarrow dy = \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{y^4}{x^2}} dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + z^2} \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz = \frac{1}{2} \sqrt{x} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{z} (1 + z^2)} dz$$

$$(\star) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \frac{1}{2} \sqrt{x} \cdot \text{numero} = \frac{\text{numero}}{2} \cdot \int_1^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{x}} dx < +\infty$$

$$\iint_E \frac{1}{\underbrace{x^2 + y^2 + x^2 y^2}_{f(x,y)}} dx dy$$



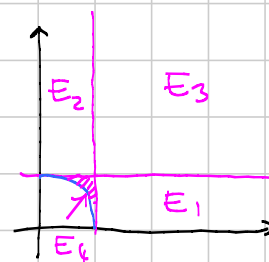
$f(x,y) \leq \frac{1}{p^2}$, ma questo non aiuta ...

Brutale: x^2y^2 mi può dare una mano, essendo un p^4 ,
una sola lontano dagli assi.

Idea: separo le zone (DIVIDE ET IMPERA)

zona E_4 : no problem

le zone E_1 ed E_2 sono simmetriche, quindi
posso studiare solo E_1



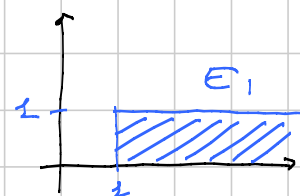
$$\begin{aligned} \iint_{E_1} f(x,y) dx dy &= \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{x^2+y^2+x^2y^2} \\ &\leq \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{x^2} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty \end{aligned}$$

Resta la zona E_3

$$\begin{aligned} \iint_{E_3} f(x,y) dx dy &= \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} dy f(x,y) \leq \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} dy \frac{1}{x^2y^2} \\ &= \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx}_I \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy}_I < +\infty \end{aligned}$$

Esempio E_1 di prima

$\iint_{E_1} \frac{1}{(x^2+y^2)^a} dx dy$ Per quali a converge



$$= \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{(x^2+y^2)^a} \leq \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{x^{2a}} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2a}} dx$$

converge se $a > \frac{1}{2}$. Ho dimostrato che l'integrale iniziale
converge per $a > \frac{1}{2}$.

Per gli altri $a \leq \frac{1}{2}$ non posso dire nulla.

Per studiare i valori $a \leq \frac{1}{2}$ serve disug. dall'altra parte

$$\int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{(x^2+y^2)^a} \geq \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{(x^2+1)^a} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^a}$$

e questo diverge per $a \leq \frac{1}{2}$ completando la risposta.

Esempio $\iint_B \frac{\log(1+x) \sin^2 y}{(x^2+y^2)^a} dx dy$



per quali a converge?

Brutale: $f(x,y) \sim \frac{xy}{(x^2+y^2)^a} \sim \frac{\rho^2}{\rho^{2a}} = \frac{1}{\rho^{2a-2}}$ quindi converge
 $\Leftrightarrow 2a-2 < 2$
 $\Leftrightarrow a < 2$

Disuguaglianza dall'alto

Esistono 2 costanti M_1 ed M_2 tali che

$$\begin{aligned} \log(1+x) &\leq M_1 x & \forall x \in [0,1] \\ \sin^2 y &\leq M_2 y & \forall y \in [0,1] \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Banale Analisi 1 dopo} \\ \text{aver diviso e fatto il} \\ \text{limite} \end{array} \right\}$$

quindi $f(x,y) \leq M_1 M_2 \frac{xy}{(x^2+y^2)^a}$

Questo faccio in polari e vedo che converge per $a < 2$.

Disuguaglianza dal basso Esistono M_3 ed M_4 strett. positive tali che

$$\begin{aligned} \log(1+x) &\geq M_3 x & \forall x \in [0,1] \\ \sin^2 y &\geq M_4 y & \forall y \in [0,1] \end{aligned}$$

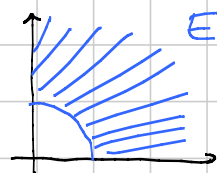
$f(x,y) \geq M_3 M_4 \frac{xy}{(x^2+y^2)^a}$ in polari

$$\int_0^1 dp \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\cos\theta \sin\theta \rho^2}{\rho^{2a}} \cdot \rho = \int_0^1 \frac{1}{\rho^{2a-3}} dp \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta$$

$\neq 0$

Esempio $\iint_E \frac{xy}{(x^2+y^4)^a} dx dy$

$$x = u^2, y = v \rightsquigarrow J = 2u$$



$$\iint_E \dots = \iint_F \frac{u^2 \cdot v}{(u^4 + v^4)^a} \cdot 2u du dv \quad \sim \frac{\rho^4}{\rho^{4a}} = \frac{1}{\rho^{4a-4}}$$

\uparrow
zona simile

quindi l'idea è che converge
 $\Leftrightarrow 4a-4 > 2 \Leftrightarrow a > \frac{3}{2}$

Occhio a fare bene la parte dal basso
 — 0 — 0 —

Esempio $\iiint_E \frac{xy^a z}{x^2 + y^4 + z^6} dx dy dz$ $E: x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$
 $x^2 y^2 + z^2 \geq 1$

Pareggio gli esponenti ponendo: $x = u^6, y = v^3, z = w^2$

$$\begin{pmatrix} 6u^5 & 0 & 0 \\ 0 & 3v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2w \end{pmatrix} \rightsquigarrow J = 36 u^5 v^2 w$$

$$\iiint_E f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_F \frac{u^6 v^{3a} w^2}{u^{12} + v^{12} + w^{12}} u^5 v^2 w du dv dw$$

\uparrow
dello stesso tipo
 di $E: u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0, u^{12} + v^{12} + w^{12} \geq 1$

Brutale: funzione $\sim \frac{\rho^{16+3a}}{\rho^{12}} = \frac{1}{\rho^{-4-3a}}$

e questo converge $\Leftrightarrow -4-3a > 3$
 $3a < -7 \quad a < -\frac{7}{3}$

Nella dimostrazione

→ la disug. dall'alto è facile

→ quella dal basso un po' più delicata e bisogna passare in sferiche

Domanda: come posso controllare il termine $u^{12} + v^{12} + w^{12}$.

Uscita rapida: esistono 2 costanti POSITIVE k_1 e k_2 t.c.

$$k_2(u^2+v^2+w^2)^6 \leq u^{12} + v^{12} + w^{12} \leq k_1(u^2+v^2+w^2)^6$$

per ogni $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$. Tutto si riduce a

$$k_2 \leq \frac{u^{12} + v^{12} + w^{12}}{(u^2 + v^2 + w^2)^6} \leq k_1$$

per ogni (u, v, w) t. sfera $(u^2 + v^2 + w^2) = 1$

e sulla sfera max e min esistono per w .

Achtung! Se pareggio gli esponenti per fare un limite, NON devo mettere j . Per gli integrali si.

ANALISI 2

-

LEZIONE 046

Titolo nota

17/11/2015

VOLUME PALLA n -DIMENSIONALE

Dato $R > 0$, consideriamo $B_R := \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2\}$
 Voglio calcolare

$$\text{meas}_n(B_R)$$

Ci aspettiamo che sia del tipo $\omega_n R^n$, con ω_n succ. opportuna

1° approccio Sezioni rispetto ad una variabile, ad esempio x_n

$$\text{meas}_n(B_R) = \int_{-R}^R dx_n \int_{S_{x_n}} 1 \, dx_1 \dots dx_{n-1}$$

la sezione è una palla in
dimensione $n-1$ di raggio
 $\sqrt{R^2 - x_n^2}$

$$x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq R^2 - x_n^2 \leftarrow \text{descrive la sezione } S_{x_n}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-R}^R dx_n \, \text{meas}_{n-1}(B_{\sqrt{R^2 - x_n^2}}) \\ \text{ipotesi indut.} \rightarrow &= \int_{-R}^R dx_n \, \omega_{n-1} (R^2 - x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} \\ &= \omega_{n-1} \int_{-R}^R R^{n-1} \left(1 - \left(\frac{x_n}{R}\right)^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dx_n \\ &= \omega_{n-1} R^n \int_{-1}^1 (1 - z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz \\ &= \omega_{n-1} R^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt \end{aligned}$$

$x_n = Rz$
 $dx_n = R dz$
 $z = \sin t$
 $dz = \cos t \, dt$

Abbiamo ottenuto

$$\omega_n = \omega_{n-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$$

c'è una formula
ricorrente che lega
 n ad $n-2$

2° approccio Provare a scegliere di due con la dimensione

$$\begin{aligned}
 \text{meas}_m(B_R) &= \iint_{\substack{\uparrow \\ x_1^2 + x_2^2 \leq R^2}} dx_1 dx_2 \underbrace{\int \dots \int}_{\substack{\uparrow \\ x_3^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2 - x_1^2 - x_2^2}} dx_3 \dots dx_n \\
 &= \iint_{x_1^2 + x_2^2 \leq R^2} dx_1 dx_2 \underbrace{\text{meas}_{m-2}(B_{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}})}_{\text{ipotesi induttiva}} \\
 &= \omega_{m-2} \iint_{x_1^2 + x_2^2 \leq R^2} (R^2 - x_1^2 - x_2^2)^{\frac{m-2}{2}} dx_1 dx_2 \\
 &= \omega_{m-2} \int_0^R dp \int_0^{2\pi} d\sigma (R^2 - p^2)^{\frac{m}{2}-1} \cdot p \\
 &= \pi \omega_{m-2} \int_0^R 2p (R^2 - p^2)^{\frac{m}{2}-1} \\
 &= \pi \omega_{m-2} \left[- (R^2 - p^2)^{\frac{m}{2}} \frac{2}{m} \right]_{p=0}^{p=R} \\
 &= \frac{2\pi}{m} \omega_{m-2} R^m
 \end{aligned}$$

Da qui ricaviamo

$$\omega_m = \frac{2\pi}{m} \omega_{m-2}$$

Visto che $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = \pi$, da qui si ricavano ricorsivamente tutti gli ω_m . Si ottiene

$$\omega_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}$$

$$\omega_{2k+2} = \frac{2\pi}{2k+2} \omega_{2k} = \frac{\pi}{k+1} \frac{\pi^k}{k!} = \frac{\pi^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$\omega_{2k+1} = 2 \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{2\pi}{5} \cdot \frac{2\pi}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2\pi}{2k+1} = \frac{2(2\pi)^k}{(2k+1)!!} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k}$$

$$\omega_{2k+1} = \frac{2(4\pi)^k \cdot k!}{(2k+1)!}$$

↑
fatto solo sui
dispari

Oss. C'è una formula che la contiene entrambe ed è

$$\omega_m = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2} + 1)}$$

dove Γ è la funzione
Gamma di Eulero

Per verificare l'uguaglianza basta ricordare che

- $\Gamma(k) = (k-1)!$ per k intero ≥ 1
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (integrale gaussiano)
- $\Gamma(x) = x \Gamma(x-1)$ per ogni $x > 0$
— 0 — 0 —

INTEGRALI IMPROPRI IN DIM n

Caso con pbm. in 0

$$\int_{B_R} \frac{1}{|x|^\alpha} dx \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \alpha < n \\ \searrow \text{diverge} & \alpha \geq n \end{cases}$$

Caso con pbm. all' ∞

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} \frac{1}{|x|^\alpha} dx \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \alpha > n \\ \searrow \text{diverge} & \alpha \leq n \end{cases}$$

Per dimostrarlo ci sono 2 modi

② Introdurre coordinate "sferiche" in \mathbb{R}^n : ad esempio in \mathbb{R}^4 userei 2 latitudini φ_1 e φ_2 .

Indicate le cartesiane con x, y, z, w si può porre

$$\begin{aligned} w &= \rho \sin \varphi_2 & x &= \rho \cos \varphi_2 \\ y &= \rho \cos \varphi_2 & z &= \rho \sin \varphi_2 \end{aligned} \cdot \left[\begin{array}{l} \text{coordinate sferiche} \\ \text{classiche in } \mathbb{R}^3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \cos \varphi_1, \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1, \sin \varphi_1 \end{array}$$

Si tratta ora di dim. per induz. che $J = \rho^{n-1}$ moltiplicando per le trigonometriche.

② Procedere direttamente per involuzione. Facciamo il pbm. in 0
Integro sul cubo

$$C_n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 1 \text{ per ogni } i=1, \dots, n\}$$

$$\begin{aligned} \int_{C_n} \frac{1}{|x|^d} dx &= \int_{C_{n-1}} dx_1 \dots dx_{n-1} \int_{-1}^1 dx_n \frac{1}{(\underbrace{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}_{b^2} + x_n^2)^{d/2}} \\ &= \int_{C_{n-1}} dx_1 \dots dx_{n-1} \int_{-1}^1 \frac{1}{(b^2 + x_n^2)^{d/2}} dx_n \end{aligned}$$

cartesiano

Parentesi di analisi 1

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{(b^2 + t^2)^{d/2}} dt &\stackrel{t=bz}{=} \int_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}} \frac{b}{(b^2 + b^2 z^2)^{d/2}} dz \\ &= \frac{b}{b^d} \int_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}} \frac{dz}{(1+z^2)^{d/2}} = \frac{1}{b^{d-1}} \int_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}} \frac{dz}{(1+z^2)^{d/2}} \end{aligned}$$

$dt = b dz$

Due casi

• se $1 < d < n$, allora $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^{d/2}} < +\infty$, quindi

$$\text{int. iniziale} \leq \underbrace{\int_{C_{n-1}} dx_1 \dots dx_{n-1} \frac{1}{b^{d-1}}}_{\text{converge per hp involutiva}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^{d/2}}}_{\text{numero}}$$

• se $d \geq n$, allora $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^{d/2}} < +\infty$, ma non ci serve perché

$$\text{int. iniziale} \geq \underbrace{\int_{C_{n-1}} dx_1 \dots dx_{n-1} \frac{1}{b^{d-1}}}_{\text{Diverge per hp involutiva}} \underbrace{\int_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}} \frac{dz}{(1+z^2)^{d/2}}}_{\text{numero} > 0}$$

• se $d \leq 1$ ho ancora convergenza perché

$$\frac{1}{|x|^d} \leq \frac{1}{|x|^\beta} \quad \text{per ogni } |x| \leq 1 \text{ e ogni } d < \beta \text{ e basta scegliere } \beta \in (1, n)$$

ANALISI 2

-

LEZIONE 047

Titolo nota

17/11/2015

Esercizio 1 $\iint_B \frac{\arctan(xy)}{(x^2+y^2)^a} dx dy$ Per quali a converge



Brutale: $\frac{\arctan(xy)}{(x^2+y^2)^a} \sim \frac{xy}{(x^2+y^2)^a} \sim \frac{\rho^2}{\rho^{2a}} = \frac{1}{\rho^{2a-2}}$

quindi converge $\Leftrightarrow 2a-2 < 2 \Leftrightarrow a < 2$

Dim. che per $a < 2$ converge usando la disug. $\arctan t \leq t$ per $t \geq 0$

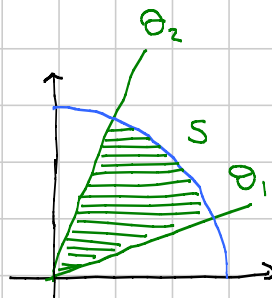
$f(x,y) \leq \frac{xy}{(x^2+y^2)^a}$, quindi

$\iint_B f(x,y) dx dy \leq \iint_B \frac{xy}{(x^2+y^2)^a} dx dy$ e questo si calcola con le polari

Per dimostrare che diverge per $a \geq 2$ posso usare la disug. opposta

$\arctan t \geq \frac{t}{2t}$ che vale per $t \in [0, t_0]$ per $t_0 > 0$ opportuno

In alternativa posso restringermi ad un settore circolare abbastanza stretto



$$\begin{aligned} \iint_B f(x,y) dx dy &\geq \iint_S f(x,y) dx dy \\ &= \int_0^{t_0} \rho d\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{\arctan(\rho^2 \sin\theta \cos\theta)}{\rho^{2a}} \cdot \rho \\ &\geq \int_0^{t_0} \rho d\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{\arctan(m_0 \rho^2)}{\rho^{2a}} \rho \end{aligned}$$

$\geq m_0 > 0$ se $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

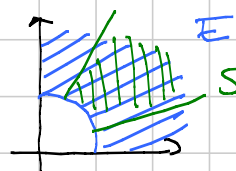
$$= (\theta_2 - \theta_1) \int_0^1 \frac{\arctan(m_0 \rho^2)}{\rho^{2a-1}} d\rho.$$

e questo si fa per confronto asintotico di analisi 1.
Quindi converge $\Leftrightarrow a < 2$.

Esercizio 1 bis Stessa cosa su tutto il cerchio.

- Per $a < 2$ converge e converge a 0
- Per $a \geq 2$ è indeterminato $\iint f_+ = +\infty = \iint f_-$
(buchi diversi producono limiti diversi)

Esercizio 2 $\iint_E \frac{\arctan(xy)}{(x^2+y^2)^a} dx dy$



Facile: convergenza per $a > 1$

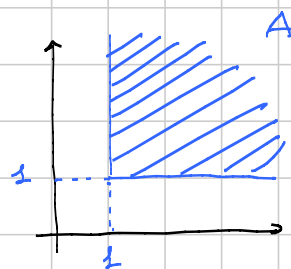
$$f(x,y) \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\rho^{2a}} \quad \text{converge per } 2a > 2, \text{ cioè } a > 1$$

Voglio dim. che diverge per $a \leq 1$. Stimo con il settore come prima

$$\begin{aligned} \iint_E f(x,y) dx dy &\geq \iint_S f(x,y) dx dy \\ &= \int_1^{+\infty} d\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\arctan(\overbrace{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}^{\geq 0})}{\rho^{2a}} \cdot \rho d\theta \end{aligned}$$

e concludo come prima

Esercizio 3 $\iint_A \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^a} dx dy$



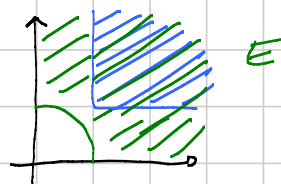
Brutale: $f(x,y) = \frac{\rho^3}{\rho^{2a}} = \frac{1}{\rho^{2a-3}}$

quindi converge $\Leftrightarrow 2a-3 > 2 \Leftrightarrow a > \frac{5}{2}$

- Dimostro che converge per $a > \frac{5}{2}$

$$\iint_A f(x,y) dx dy \leq \iint_E f(x,y) dx dy$$

↑
si fa in polari e converge se $a > \frac{5}{2}$



- Dimostro che diverge per $a \leq \frac{5}{2}$

Scelgo un settore $0 < \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ e $R \geq R_0$

Se R_0 è abbastanza grande, allora $S \subset A$

$$\iint_A f(x,y) dx dy \geq \iint_S f(x,y) dx dy$$

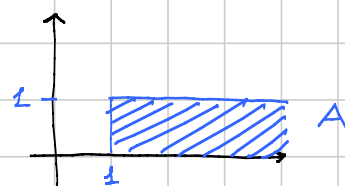
↑
si fa in polari e diverge per $a \leq \frac{5}{2}$

$$\int_{R_0}^{\infty} dp \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{p^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{p^{2a}} \cdot p$$

Senza che $\cos^2 \theta \sin \theta \geq m_0 > 0$ per
— o — o —
 $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

Esempio 4 $\iint_A \frac{x^a y}{x^6 + y^8} dx dy$

$$= \int_1^{\infty} dx \int_0^1 dy \frac{x^a y}{x^6 + y^8} = (*)$$



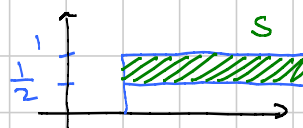
Vediamo quando converge

$$(*) \leq \int_1^{\infty} dx \int_0^1 dy \frac{x^a}{x^6} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{6-a}} \quad \text{che converge per } a < 5$$

Vediamo se diverge per $a \geq 5$

$$(*) \geq \int_1^{\infty} dx \int_0^1 dy \frac{0}{x^6 + 1} \quad \text{☹️}$$

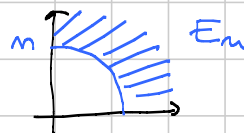
$$(\star) \geq \int_1^{+\infty} dx \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \frac{\frac{1}{2} x^a}{x^b + 1} \quad (\text{😊})$$



Oss. Anche senza restringere d'insieme, potremo lasciare la y sopra e fare l'integrale in dy

— o — o —

Esempio 5 Consideriamo $I_n = \int_{E_n} \frac{1}{x^4 + y^2} dx dy$



dove $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \geq n^2\}$

Dimostrare che I_n è ben definito, $I_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, e se riesce calcolare ordine di infinitesimo e parte principale.

Basta dim. che converge. Pareggio gli esponenti $x = u, y = v^2$

Calcolo J

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{pmatrix} \rightsquigarrow J = 2v$$

e mi riduco a $\iint_{F_n} \frac{1}{u^4 + v^4} \cdot 2v du dv$ e questo $\sim \frac{1}{p_3}$, quindi formale

↑
insieme diverso, ma
"fatto allo stesso modo"

Perché $I_n \rightarrow 0$? Per un fatto generale!

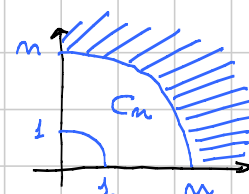
Se $\iint_E f(x, y) dx dy < +\infty$

con $E =$

allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{E_n} f(x, y) dx dy = 0$ per ogni successione E_n che invade E

Sostanzialmente si usa che

$$\iint_E = \iint_{E_n} + \iint_{C_n} \rightarrow \iint_{C_n} \text{ per definizione}$$



quindi

$$\iint_{E_m} = \iint_E - \iint_{C_m}$$

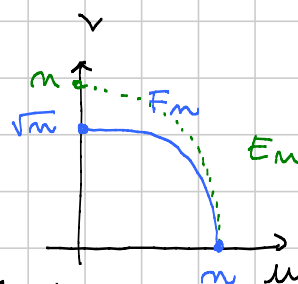
\downarrow
 \iint_E

Come possiamo stimare l'integrale I_m ?

Prima idea: che cada come $\int_m^{+\infty} \frac{1}{p^3} \cdot p \, dp \sim \frac{1}{m}$

Ma F_m non esattamente E_m , detto meglio

$$F_m = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \begin{aligned} &u^2 + v^4 \geq m^2 \\ &v \geq \sqrt[4]{m^2 - u^2} \end{aligned} \right\}$$



Per ora possiamo dire solo che $F_m \supseteq E_m$ per $u \geq 1$,
quindi posso dire solo che

$$\iint_{F_m} \frac{2v}{u^4 + v^4} \, du \, dv \geq \iint_{E_m} \frac{2v}{u^4 + v^4} \, du \, dv \sim \frac{1}{m}$$

Per avere una stima dall'altra parte per il momento ho solo

$$\iint_{F_m} \leq \iint_{E_m} \quad \text{che però va come } \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Provare a vedere se si trova l'asintotico giusto!

— o — o —