

A.A. 2015/2016
Corso di Analisi Matematica 2

Stampato integrale delle lezioni

(Volume 1)

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 001. Introduzione al corso. Struttura euclidea, metrica e topologia nello spazio a n dimensioni. Funzioni di n variabili e loro grafico. Metodi per visualizzare un grafico in dimensione 2: linee di livello e restrizioni a rette.	7
Lezione 002. Definizioni di limite in un punto per funzioni di più variabili. Funzioni continue. Primi esempi di limite.	10
Lezione 003. Limiti all'infinito per funzioni di più variabili. Esempi di limiti per funzioni di più variabili: esistenza via stime+carabinieri o coordinate polari, non esistenza via restrizione a particolari curve.	14
Lezione 004. Ulteriori esempi di limiti per funzioni di più variabili.	18
Lezione 005. Derivate parziali e direzionali e loro significato geometrico. Differenziale per funzioni di più variabili. Esempi di funzioni che hanno tutte le derivate direzionali nulle ma non sono continue.	22
Lezione 006. Una funzione differenziabile è continua e ha tutte le derivate direzionali. Formula per le derivate direzionali. Gradiente e sua interpretazione geometrica. Matrice Jacobiana. Esempi di calcolo di derivate parziali.	27
Lezione 007. Teorema del differenziale totale: caso classico e caso con ipotesi più minimaliste. Prodotto di matrici e differenziale della funzione composta.	32
Lezione 008. Lipschitzianità delle funzioni lineari. Chain rule e funzioni composte in più variabili: esempi di applicazione.	36
Lezione 009. Derivate successive per funzioni di più variabili. Teorema di inversione dell'ordine di derivazione: enunciato, dimostrazione, controesempi.	40
Lezione 010. Formalismo dei multi-indici. Sviluppo di Taylor in più variabili e idea della dimostrazione nel caso con resto di Lagrange.	44
Lezione 011. Teorema di Lagrange direzionale per funzioni di più variabili. Le funzioni con gradiente nullo sono costanti sui connessi. Limitatezza del gradiente vs lipschitzianità per funzioni di più variabili.	48
Lezione 012. Dimostrazione della formula di Taylor in più variabili con resto alla Peano. Ricapitolazione sulle forme quadratiche ed i metodi per determinarne la segnatura.	52
Lezione 013. Fine ripasso sulle forme quadratiche. Stima dal basso per forme quadratiche definite positive. Matrice Hessiana. Segnatura della matrice Hessiana e comportamento nell'intorno di un punto stazionario.	57
Lezione 014. Dimostrazione del criterio che lega la segnatura dell'hessiana alla natura di un punto stazionario. Esempi di studio di punti stazionari.	61

Lezione 015. Compattezza e teorema di Weierstrass in più variabili. Ricerca dei punti di massimo/minimo. Nei punti di massimo/minimi interni il gradiente (se esiste) si annulla.	65
Lezione 016. Primi esempi di problemi di massimo/minimo su insiemi compatti: metodo delle linee di livello e metodo di parametrizzazione del bordo.	70
Lezione 017. Esercizi sul calcolo di gradiente e matrice hessiana in n variabili. Esercizi sulla chain rule: formula generale per le soluzioni dell'equazione delle onde in una variabile.	74
Lezione 018. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange (caso di un solo moltiplicatore): descrizione del metodo e primi esempi di applicazione.	79
Lezione 019. Giustificazione intuitiva del metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Utilizzo misto di moltiplicatori ed altre tecniche. Caratterizzazione di autovettori ed autovalori come punti stazionari del quoziente di Reyleigh e relativi moltiplicatori.	84
Lezione 020. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange (caso con più moltiplicatori): descrizione del metodo ed esempi di applicazione.	89
Lezione 021. Esercizi sui massimi/minimi per funzioni di più variabili su insiemi compatti. Metodo di sostituzione del vincolo. Massimi/minimi di funzioni con valori assoluti.	93
Lezione 022. Teorema di Weierstrass generalizzato su insiemi non compatti. Esempi di problemi di massimo/minimo su insiemi non compatti.	98
Lezione 023. Dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra (via Weierstrass generalizzato e studio locale). Ulteriori esempi di massimi/minimi su insiemi non compatti.	103
Lezione 024. Sottoinsiemi convessi e funzioni convesse in più variabili. Punti estremali di insiemi convessi e punti di massimo di funzioni convesse. La convessità come fatto unidimensionale.	107
Lezione 025. Equivalenza tra due definizioni di locale limitatezza. Le funzioni convesse sono localmente limitate nella parte interna dell'insieme di definizione. Convessità e derivate prime: monotonia del gradiente e grafico al di sopra del piano tangente.	112
Lezione 026. Convessità e continuità: le funzioni convesse sono continue e localmente lipschitziane nella parte interna dell'insieme di definizione. Convessità e segnatura della matrice Hessiana.	116
Lezione 027. Esempi di funzioni convesse in due variabili. Esempio non banale di utilizzo dei moltiplicatori di Lagrange.	121
Lezione 028. Introduzione agli integrali doppi: notazioni, significato geometrico, step functions, integrale inferiore e superiore, criterio di integrabilità.	126
Lezione 029. Descrizione della formula di riduzione per integrali doppi su rettangoli e su insiemi normali. Analogia con il double counting. Esempi di applicazione.	132
Lezione 030. Proprietà basilari dell'integrale (linearità, monotonia, integrale del prodotto e del valore assoluto, ...) analoghe a quelle valide in una variabile. Enunciato e dimostrazione della formula di riduzione in massima generalità. Esempi patologici.	137

Lezione 031. Formula di spezzamento in ipotesi di integrabilità. Insiemi misurabili e loro caratterizzazione. Misurabilità degli insiemi normali. Integrabilità delle funzioni continue su insiemi misurabili.	142
Lezione 032. Utilizzo delle coordinate polari per il calcolo di integrali doppi: descrizione della formula ed esempi di applicazione.	147
Lezione 033. Formula generale per il cambio di variabili negli integrali doppi ed esempi classici di applicazione. Classi particolari di trasformazioni: traslazioni, dilatazioni degli assi, affinità.	152
Lezione 034. Integrali tripli: notazioni, significato fisico, definizione. Formula di riduzione sui parallelepipedi e su insiemi normali (integrazione per colonne). Esempi di applicazione.	157
Lezione 035. Formula di riduzione per sezioni per gli integrali tripli. Utilizzo delle simmetrie per mostrare che certi integrali sono nulli, o comunque per semplificarne il calcolo. Esempi di applicazione.	162
Lezione 036. Coordinate cilindriche e sferiche nello spazio. Cambi di variabile negli integrali tripli. Esempi di applicazione.	167
Lezione 037. Solidi di rotazione: equazioni e formula per il volume. Calcolo del bari-centro di figure piane /solide mediante integrali doppi/tripli. Teorema di Guldino per il volume dei solidi di rotazione.	172
Lezione 038. Basi teoriche della formula di spezzamento per integrali multipli. Teorema della media integrale. Calcolo di momenti d'inerzia mediante integrali multipli. Principio di cavalieri.	177
Lezione 039. Integrali di funzioni con valori assoluti. Esercizi riassuntivi sugli integrali multipli.	182
Lezione 040. Dimostrazione della formula di cambio di variabili negli integrali multipli (parte prima): caso delle trasformazioni affini.	187
Lezione 041. Dimostrazione della formula di cambio di variabili negli integrali multipli (parte seconda): riduzione al caso dei cubi piccoli, stima di un diffeomorfismo in un cubo.	192
Lezione 042. Dimostrazione della formula di cambio di variabili negli integrali multipli (parte terza): enunciato e dimostrazione di una diseguaglianza nel caso dei cubi piccoli. Commento sulle coordinate polari.	197
Lezione 043. Introduzione agli integrali impropri in più variabili. Commenti sulla scelta di limitare la teoria agli integrali assolutamente convergenti. Studio del caso delle potenze della distanza dall'origine.	202
Lezione 044. Un integrale improprio non dipende da come viene invasa la zona di integrazione in sede di definizione. Calcolo dell'integrale gaussiano mediante integrali doppi. Esempi di studio della convergenza di integrali impropri.	206
Lezione 045. Esercizi sullo studio della convergenza di integrali multipli impropri. . .	211
Lezione 046. Volume della palla n-dimensionale: formule esplicite e ricorrenti. Integrali impropri in dimensione n: discussione degli esponenti critici per gli integrali di potenze della norma.	216

Def. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^m$ e sia $r > 0$. Si dice **PALLA** con centro in x_0 e raggio r l'insieme

\uparrow
aperta

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^m : \text{dist}(x, x_0) < r\} \leftarrow \text{aperta}$$

$$\overline{B}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^m : \text{dist}(x, x_0) \leq r\} \leftarrow \text{chiusa}$$

Def. Sia $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^k$ una successione. Si dice che $x_n \rightarrow x_\infty \in \mathbb{R}^k$ se

dist(x_n, x_∞) $\rightarrow 0$

limite di numeri

Cioè $\forall r > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\underbrace{|x_n - x_\infty| < r}_{x_n \in B_r(x_\infty)}$ $\forall n \geq m_0$

Osservazione Una volta definite le $B_r(x_0)$ abbiano immediatamente le nozioni di

[dato $A \subseteq \mathbb{R}^m$]

- ① punto interno $\rightsquigarrow \text{Int}(A)$
- ② punto aderente $\rightsquigarrow \text{Clos}(A)$
- ③ punto di frontiera $\rightsquigarrow \partial A$
- ④ punto di accumulazione $\rightsquigarrow \text{D}(A)$
- ⑤ punto isolato $\rightsquigarrow \text{Isol}(A)$

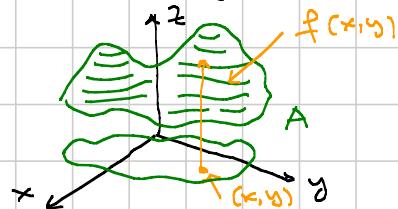
[Def di ①: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Si dice che x_0 è interno ad A se $\exists r > 0$ t.c. $B_r(x_0) \subseteq A$]

—○—○—

Funzioni $f(x, y)$, $f(x, y, z)$, $f(x_1, \dots, x_s)$, $f(x) \quad x \in \mathbb{R}^m$

Dato $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, il suo grafico è

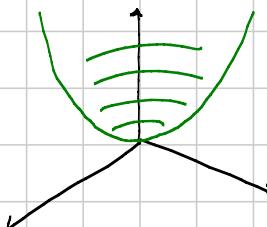
Grafico (f): $= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, z = f(x, y)\}$



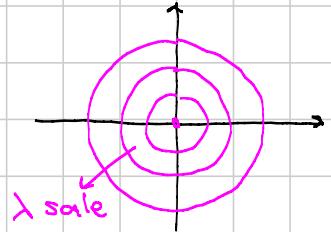
Due scorciatore per visualizzazione funzioni $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^2$

→ linee di livello $A_\lambda = \{(x, y) \in A : f(x, y) = \lambda\}$

Esempio $f(x, y) = x^2 + y^2$



$$x^2 + y^2 = \lambda$$



→ percorsi di uomini

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

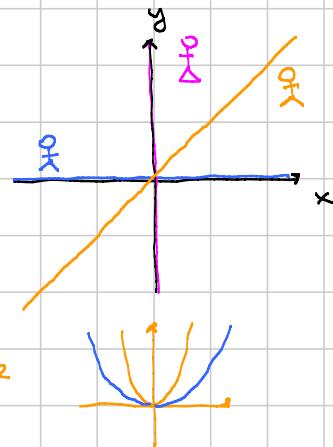
$$f(t, 0) = t^2$$

\uparrow al variare di t
descrive l'asse x

$$f(0, t) = t^2$$

\uparrow asse y

$$f(t, t) = t^2 + t^2 = 2t^2$$



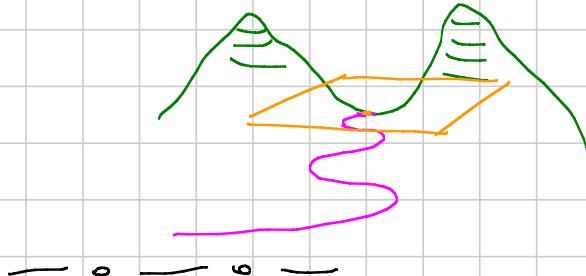
$$f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^2 = t^2$$

— o — o —

Punti stazionari: p.ti in cui piano tangente // piano base

Oltre ai max / min / flessi ci sono i

MOUNTAIN PASS



ANALISI 2

LEZIONE 002

Titolo nota

23/09/2015

Definizioni di limite per funzioni di più variabili

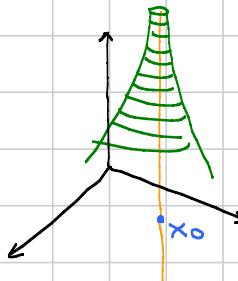
$$A \subseteq \mathbb{R}^m \quad f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathbb{R}^m \text{ punto di accumulazione di } A$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \text{vettori}}} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \textcircled{1} \\ +\infty & \textcircled{2} \\ -\infty & \textcircled{3} \\ \text{N.E.} & \textcircled{4} \end{cases} \quad \text{← Nessuno dei precedenti}$$

$$\textcircled{2} \quad \forall M \in \mathbb{R} \quad (\text{anche enorme})$$

$$\exists r > 0 \text{ t.c.}$$

$$f(x) \geq M \quad \forall x \in (B_r(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\}$$



$$\textcircled{3} \quad \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists r > 0 \text{ t.c.} \quad f(x) \leq M \quad \forall x \in \dots$$

$$\textcircled{4} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists r > 0 \text{ t.c.} \quad l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \in (B_r(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\}$$

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Achtung!: In \mathbb{R}^m non si fanno (almeno per ora \cup) limiti all'infinito.

Osservazione: $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ posso definire $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \text{vettori}}} f(x) = l \in \mathbb{R}^m$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r > 0 \text{ t.c.} \quad |f(x) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \in (B_r(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\}$$

\uparrow vettori \uparrow norma

Notazione: se siamo in \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 scriviamo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$$

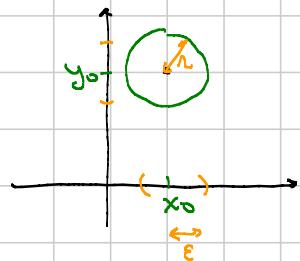
Esempio 1 Calcolare $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{y \log x + \arctan(xy)}{x^2 + y^2} = \frac{1}{5} \arctan 2$

Possò sostituire perché vale il solito meta-teorema di analisi 1.

L'unica cosa da dimostrare è la continuità delle "componenti"

$$f(x,y) = x \quad f(x,y) = y$$

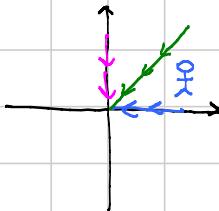
Questa è sostanzialmente ovvia: se (x,y) è vicino a (x_0, y_0) , allora x è vicino a x_0 e y è vicino a y_0



Strumenti per il calcolo di limiti in \mathbb{R}^n :

- teo. algebrici
- composizioni
- confronto e carabinieri
- De L'Hôpital NO
- Taylor lo vedremo.

Esempio 1 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = f(x,y)$



Esploriamo con 3 omaggi

$$\text{♀} : f(x,0) = 0$$

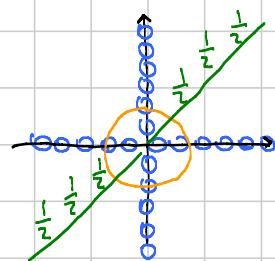
$$\text{♀} : f(0,y) = 0$$

$$\text{♀} : f(x,x) = \frac{1}{2}$$

Due omaggi con comportamento diverso \rightarrow il limite non esiste

Se il limite fosse reale, non potrei avere valori che distano $\frac{1}{2}$ in ogni $B_r(0)$.

Similmente si escludono i limiti $\pm\infty$

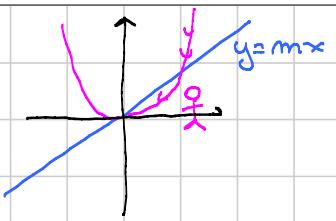


SLOGAN: ad Analisi 2 i limiti non hanno
NESSUNA VOGLIA di esistere

Come dimostro che un limite NON esiste? Trovo 2 omaggi con comp.
diverso

“ “ “ “ “ ESISTE ? Può essere complicato

Esempio 2 $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)}$?



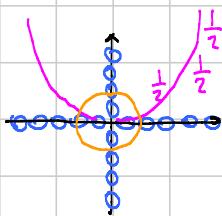
Asse x: $f(x,0) = 0$

Asse y: $f(0,y) = 0$

Bisettrice: $f(x,x) = \frac{x^3}{x^4+x^2} = \frac{x}{x^2+1} \rightarrow 0$

$\boxed{y=mx}$: $f(x,mx) = \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = \frac{mx}{x^2+m^2} \rightarrow 0$ per ogni $m \neq 0$
e anche per $m=0$

$\text{O} \quad f(x,x^2) = \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}$



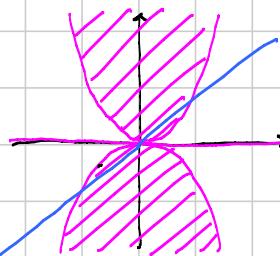
Esempio 3 $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^4+y^2}$

Dimostra che $|f(x,y)| \rightarrow 0$

$$0 \leq |f(x,y)| = |x| \frac{y^2}{x^4+y^2} \leq |x|$$

0 0 0

Esempio 2-bis

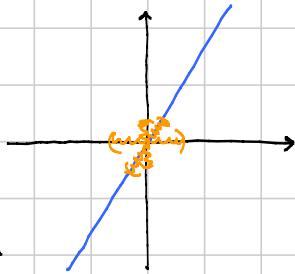


$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{zona colorata} \\ 1 & \text{fuori} \end{cases}$$

Il limite a $(0,0)$ non esiste, ma su tutte le rette passanti per l'origine il limite viene 0 (ogni retta vicina all'origine casca in zona 0)

Fissato $\varepsilon > 0$ in ogni direzione trovo un intorno in cui $|f(x,y)| \leq \varepsilon$.

Se mettendo insieme gli intorni avessi una palla di \mathbb{R}^2 dove l'esistenza del limite



Il problema è che il r sulle varie rette NON È UNIFORME, cioè non esiste un $r_0 > 0$ che va bene ovunque.

Esercizio (semi-hard) Trovare $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \quad \text{NON ESISTE}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(ax^k, bx^l) = 0 \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$$

\uparrow
tanti omni che
vanno in $(0,0)$

$k \geq 1, l \geq 1$ interi

ACHTUNG! Se anche infiniti omni concordano sul limite, questo più comunque non esiste.

ANALISI 2

- LEZIONE 003

Titolo nota

25/09/2015

Visto finora: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \in \mathbb{R}^m}} f(x) = f(x_0)$ $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ $D \subseteq \mathbb{R}^m$

→ continuità per funzioni di più variabili

Quattro facce della continuità:

① con i limiti: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

② (ε/δ) : $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \cap D$

③ per successioni: per ogni succ. $x_m \rightarrow x_0$ si ha $f(x_m) \rightarrow f(x_0)$
tutto in \mathbb{R}^m

④ con gli aperti: se $f(x_0) \in \text{Int}(B)$, allora $x_0 \in \text{Int } f^{-1}(B)$
relativo all'insieme D .

— o — o —

LIMITI ALL'INFINITO PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Data una succ. $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^k$, cosa vuol dire che " $x_n \rightarrow +\infty$ "?

Vuol dire che $\|x_n\| \rightarrow +\infty$, cioè

norma

$\forall R > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m_0 \quad x_n \notin B_R(0)$ origine

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^m$ un insieme non limitato ($\forall R > 0 \quad D \cap B_R(0) \neq \emptyset$)

$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \|x\| \rightarrow +\infty}} f(x) = \begin{cases} l & \text{se } \exists l \in \mathbb{R} \\ +\infty & \text{se } \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } f(x_n) > N \\ -\infty & \text{se } \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } f(x_n) < -N \end{cases}$

(nessuno dei precedenti)

② $\forall M \in \mathbb{R} \exists R > 0$ t.c. $\forall x \in D \quad \|x\| \geq R \Rightarrow f(x) \geq M$

③ $\forall M \in \mathbb{R} \exists R > 0$ t.c. $\forall x \in D \quad \|x\| \geq R \Rightarrow f(x) \leq M$

④ $\forall \varepsilon > 0 \exists R > 0$ t.c. $\forall x \in D \quad \|x\| \geq R \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$

Oss. Ovviamente \liminf e \limsup esistono sempre

Esempio 1 $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ $\liminf / \limsup (x,y) \rightarrow (0,0)$

Asse x : $\lim_{t \rightarrow 0} f(t,0) = 0$ Bisettrice: $\lim_{t \rightarrow 0} f(t,t) = \frac{1}{2}$

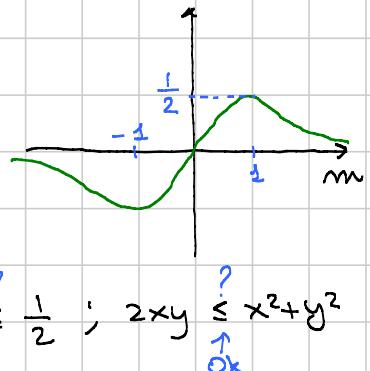
Chi sono \liminf / \limsup ? Provo intanto la retta generica $y = mx$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t,mt) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{mt^2}{t^2+m^2t^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Al variare di m troviamo vari valori del limite.

Da questo ci dicono sappiamo che

$$\liminf f(x,y) \leq -\frac{1}{2} \quad \limsup f(x,y) \geq \frac{1}{2}$$



Provo a vedere se per caso $f(x,y) \leq \frac{1}{2}$; $\frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$; $2xy \leq x^2+y^2$ ↑ Ok

La diseguaglianza è vera, quindi $\limsup f(x,y) = \frac{1}{2}$. Idem per \liminf .

Esempio 2 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$

Si può fare con delle stime $\left| \frac{x^3}{x^2+y^2} \right| = |x| \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq |x|$

Più velocemente si fa in COORDINATE POLARI $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$

$$f(x,y) = \frac{\rho^3 \cos^3 \theta + \rho^3 \sin^3 \theta}{\rho^2} = \rho (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)$$

Devo fare il limite per $\rho \rightarrow 0$, ma solo dopo essermi liberato di θ .

$$\underbrace{0}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \leq \underbrace{|\rho (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)|}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \leq \underbrace{2\rho}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$

Esempio 3 $f(x,y) = \frac{x^5 + 3y^5}{x^4 + y^4}$ $(x,y) \rightarrow (0,0)$

Passo in polari: $f(x,y) = \frac{p^5(\cos^5 \theta + 3\sin^5 \theta)}{p^4(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)}$

$$= p \frac{\cos^5 \theta + 3\sin^5 \theta}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}$$

come posso stimarlo
indipendentemente da θ ?

$| \text{Numeratore} | \leq 4$.

Denominatore = $d(\theta)$ è una funzione continua che in $[0, 2\pi]$ ha un minimo m per θ , che non è nullo perché $\cos \theta$ e $\sin \theta$ non si annullano contemporaneamente.

Quindi

$$0 \leq p \left| \frac{\dots}{\dots} \right| \leq p \frac{4}{m}$$

Esempio 4 $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$

Passiamo in polari: $\frac{p^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{p^4 \cos^4 \theta + p^2 \sin^2 \theta} = p \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{p^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta}$

① Se fisso θ e faccio il limite in $p \rightarrow 0$ ottengo 0, almeno per $\sin \theta \neq 0$

② Quando $\sin \theta = 0$, la frazione vale 0, quindi tende comunque a 0
NO!!! Queste cose non si fanno!!!

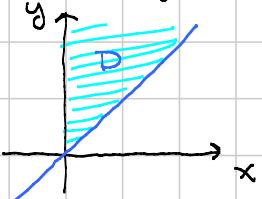
Fissare θ è equivalente a fare il limite sulle rette!!!

Achtung! Si può fare il limite in p solo dopo aver ottenuto stime UNIFORMI in θ . (N.B.: il limite non esisteva)

Esempio 5 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y\}$

Ora esiste e fa 0. Infatti in D

$$0 \leq f(x,y) \leq \frac{x^2y}{x^4 + x^2} = \frac{y}{1 + x^2} \leq y$$



In alternativa

$$0 \leq f(x,y) \leq \frac{y^3}{x^4+y^2} \leq \frac{y^3}{y^2} = y$$

Esempio 6 $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ $|f(x,y)| \rightarrow +\infty$ $x^2+y^2 \rightarrow +\infty$

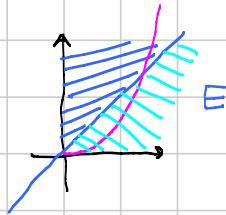
Asse x : $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0) = 0$

Bisettrice: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,t) = \frac{t^3}{t^4+t^2} = 0$

Parabole: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,t^2) = \frac{1}{2}$ come sempre.

Se mi restringo al D dell'esempio 5

Continua a non esistere perché posso usare
bisettrice + parabole.



Esercizio Mostrare che il limite esiste se mi restringo ad E .

. — o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 004

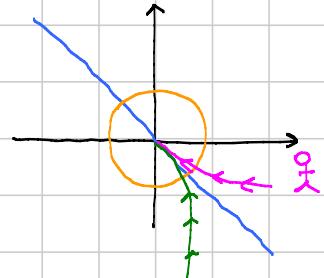
Titolo nota

25/09/2015

Esempio 1 $f(x,y) = \frac{x^4 + y^5}{x^3 + y^3}$ $(x,y) \rightarrow (0,0)$

Non esiste! f è definita in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x\}$

Idea: in ogni $B_r(0)$ esistono p.ti della retta diversi dall'origine. Vicus a quei p.ti $f(x,y)$ assume valori enormi o enormi negativi.



Formalmente: $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, -t + t^2) =$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^4 + (-t + t^2)^5}{t^3 + (-t + t^2)^3} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^4 + o(t^4)}{t^3 - t^3 + 3t^4 + o(t^4)}$$

$$= \frac{1}{3}$$

Se invece vado lungo l'asse x : $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = \frac{t^4}{t^3} = \infty$

Quindi il limite non esiste. Analogamente

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, -t + t^4) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^4 + o(t^4)}{t^3 - t^3 + 3t^6 + o(t^4)} = +\infty$$

Quindi $\limsup_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = +\infty$

♂

Per vedere che $\liminf_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = -\infty$ uso $f(t, -t - t^4)$

Esempio 2 Stessa $f(x,y) = \frac{x^4 + y^5}{x^3 + y^3}$ all'infinito

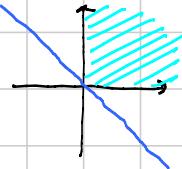
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t = +\infty \Rightarrow \limsup = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} t = -\infty \Rightarrow \liminf = -\infty$$

Esempio 3 Stessa $f(x,y) = \frac{x^4+y^5}{x^3+y^3}$, $(x,y) \rightarrow (0,0)$
rispetto a $D = 3^{\circ}$ quadrante

Qui il limite è 0 e lo dim. con le
coord. polari

$$f(x,y) = \frac{\rho^4 \cos^4 \theta + \rho^5 \sin^5 \theta}{\rho^3 (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)} = \rho \frac{\cos^4 \theta + \rho \sin^5 \theta}{\dots}$$



Per $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ la funzione $\cos^3 \theta + \sin^3 \theta$ ha un minimo $m > 0$
(cos e sin sono solo ≥ 0 in $[0, \frac{\pi}{2}]$ e non si annullano insieme)

$$0 \leq \left| \frac{\cos^4 \theta + \rho \sin^5 \theta}{\rho^3 (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)} \right| \leq \rho \cdot \frac{1}{m} + \rho^2 \frac{1}{m} \text{ e da qui si chiude.}$$

— o — o —

Esempio 4 $(x,y) \rightarrow (0,0)$ $f(x,y) = \frac{x^2|y|^\alpha}{x^{16} + y^{16}}$

Studio al variare di α . Il limite esiste ed è uguale a 0
se e solo se $\alpha > 16$. Infatti in polari

$$\frac{\rho^{2+\alpha} (\cos^2 \theta |\sin \theta|^\alpha)}{\rho^{16} (\cos^{16} \theta + \sin^{16} \theta)} \geq m > 0$$

e quindi fine come sempre

Esempio 5 $(x,y) \rightarrow (0,0)$ $f(x,y) = \frac{x^2|y|^\alpha}{x^{10} + y^{16}}$

Idea: PAREGGIARE GLI ESPONENTI!

Ad esempio uso la curva (t^8, t^5)

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t^8, t^5) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^{16} |t^{5\alpha}|}{2 t^{80}}$$

Quindi le cose cambiano quando $5\alpha + 16 = 80$; $5\alpha = 64$, $\alpha = \frac{64}{5}$

Cosa ho dimostrato? Che per $\alpha \leq \frac{64}{5}$ il limite non esiste
(sull'asse $x = 0$ fa 0, e sulla curva strana no)

Resta da dim che per $\alpha > \frac{64}{5}$ esiste e fa 0.

Faccio un cambio di variabili

$$x = z^8$$

$$y = w^5$$

Se posso fare il cambio il limite diventa

$$\lim_{(z,w) \rightarrow (0,0)} \frac{z^{16} |w|^{52}}{z^{80} + w^{80}}$$

e questo si fa bene con le polari

Fatto che ci sta sotto: $(x,y) \rightarrow (0,0)$ se e solo se $(z,w) \rightarrow (0,0)$.

Cioè se $x^2 + y^2 \leq R$ allora $z^2 + w^2 \leq R$, e viceversa.

Osservazione Nel momento in cui pongo $x = z^8$ perdo informazione, cioè sto facendo il limite solo per $x > 0$.

Dovrei poi fare la stessa cosa ponendo $x = -z^8$ e questo fa il limite per $x < 0$.

— o — o —

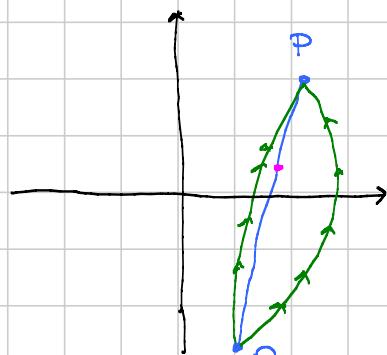
Esempio 6 Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua t.c.

$$\limsup_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} f(x,y) = +\infty$$

$$\liminf_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} f(x,y) = -\infty$$

Tesi: allora $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x,y) = \lambda$ ha ∞ soluz.

Idea: esiste un pto P in cui $f(P) > \lambda$
 " " " Q in cui $f(Q) < \lambda$



Nel segmento congiungente c'è almeno un pto in cui vale esatt. λ

$$\varphi(t) = f(Q + t(P-Q))$$

φ è continua e $\varphi(0) < \lambda$ e $\varphi(1) > \lambda$

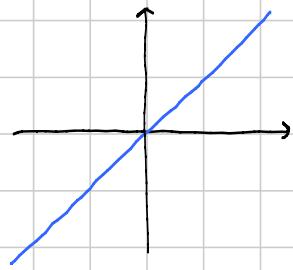
Lo stesso ragionamento vale per ogni percorso che congiunge P e Q.

Esempio 7 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2 x - \sin^2 y}{x-y}$ $D = \{ \dots : x \neq y \}$

In questo caso $f(x,y) \rightarrow 0$.

Uso Lagrange con $g(x) = \sin^2 x$

$$\sin^2 x - \sin^2 y = (x-y) g'(c) = (x-y) 2 \sin c \cdot \cos c$$



Per $x \neq y$ posso semplificare ottenendo $f(x,y) = 2 \sin c \cdot \cos c$

Quando $(x,y) \rightarrow (0,0)$ di siamo $c \rightarrow 0$, quindi

$$f(x,y) \rightarrow 0.$$

\uparrow
 \uparrow
 dipende da
 $x = y$, ma
 è compreso tra
 x e y

Esempio 8 $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{xy}$ $D = \text{fuori dagli assi}$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 1$ e si fa con il cambio di variabili $t = xy$

diventa $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 005

Titolo nota

29/09/2015

"Derivate" per funzioni di più variabili

Derivata

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Differenziale

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h)$$

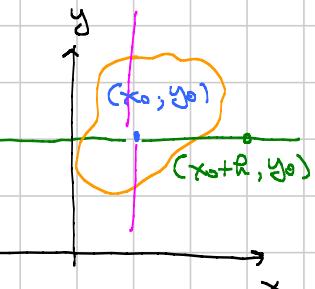
$$f''(x_0)$$

In una variabile le 2 nozioni sono equivalenti

 $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in D$ p.t.o INTERNO

o $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

↑
se esiste ed è reale

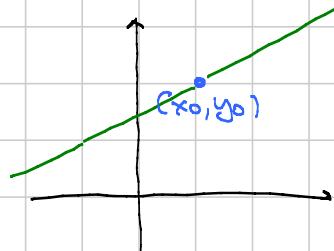
Se esiste, si chiama DERIVATA PARZIALE di $f(x, y)$
rispetto alla variabile x nel p.t.o (x_0, y_0)

o $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

↑
se esiste ed è reale

... rispetto a y ...

DERIVATA DIREZIONALE: andare lungo una qualunque retta

Fissato un qualunque vettore $\vec{v} = (v_1, v_2)$
non nullo, cioè $v_1^2 + v_2^2 \neq 0$, posso
provare a calcolare

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + v_1 h, y_0 + v_2 h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$$

↑
se esiste ed è reale

Si chiama DERIVATA di f lungo la direzione v nel p.t. (x_0, y_0)

Oss. La derivata direzionale si può definire

→ rispetto a tutti i $v \neq 0$

→ rispetto ai soli versori ($|v|=1$)

Bastano quelle definite nel secondo modo per "catturare" tutte le possibili rette per (x_0, y_0) .

— o — o —

Def. formali in \mathbb{R}^n

$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Int}(D)$.

Dato $v \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \rho v) - f(x_0)}{\rho}$$

↑
se esiste $\rho \in \mathbb{R}$

Le derivate parziali sono derivate direzionali con $v = \text{uno dei vettori della base canonica}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \rho e_i) - f(x_0)}{\rho}$$

↑
se esiste $\rho \in \mathbb{R}$

i-esima

$$e_i = (0, \dots, 0, \underset{\downarrow}{1}, 0, \dots, 0)$$

— o — o —

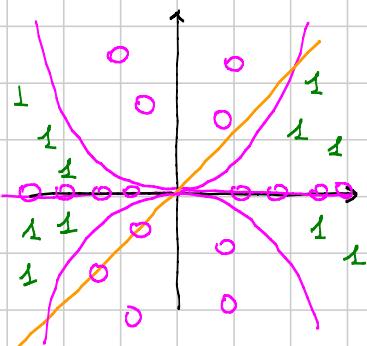
Sorpresa : con più variabili possono esistere tutte le derivate direzionali in x_0 senza che f sia continua in x_0

Esempio 1 $D = \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$

Chiaramente $f(x, y)$ non è continua in $(0, 0)$.

Tuttavia, tutte le derivate direzionali esistono e sono nulle in $(0, 0)$.

Su ogni retta infatti la $f(x, y)$ è identicamente nulla vicino all'origine.



Esempio 2

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2y}{x^4+y^2} \right)^2 & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Il limite in $(0,0)$ non esiste (basta andare sulle parabole).

Tutte le derivate direzionali esistono e sono nulle.

Preso $v = (a,b)$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(aR, bR) - f(0,0)}{R} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R} \left(\frac{a^2 R^2 b R}{a^4 R^4 + b^2 R^2} \right)^2$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{R} \frac{a^4 b^2 R^6}{R^4 (a^4 R^2 + b^2)^2} = 0 \quad \text{se } b \neq 0$$

Se $b = 0$ vuol dire che sto facendo $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e questa è nulla perché la frazione è sempre nulla in quel caso

Oss. geometrica fare $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ è equivalente a fare la derivata

in $t=0$ della funzione $\varphi(t) = f(x_0 + tv)$, cioè la restrizione di f alla retta $x_0 + tv$

—o—

Notazioni Le derivate parziali / direzionali si indicano
cambiando il segno come

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$$

$$f_x(x_0)$$

$$D_x f(x_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$$

$$f_v(x_0)$$

—o—o—

Le derivate parziali / direzionali si comportano male perché sono equivalenti a muoversi lungo le sole rette.

DIFFERENZIALE IN PIÙ VARIABILI

$D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \text{Int}(D)$.

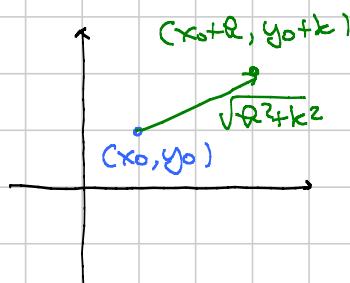
$$f(x_0+r, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \underbrace{\alpha r + \beta k}_{(\alpha, \beta) \cdot (r, k)} + \underbrace{o(\sqrt{r^2+k^2})}_{r(r, k)}$$

Dico che f è differenziabile in (x_0, y_0) se esistono due numeri α e β tali che vale la formula di sopra.

L'0 piccolo vuol dire che

$$\lim_{(r, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{r(r, k)}{\sqrt{r^2+k^2}} = 0$$

limite di una funzione di due variabili



Def. formale in n variabili

$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Int}(D)$

Dico che f è diff. in x_0 se esiste un vettore α t.c.

$$f(x_0+r) = f(x_0) + \underbrace{\alpha \cdot r}_{\substack{\text{prodotto scalare} \\ \text{di vettori}}} + \underbrace{o(|r|)}_{\substack{\text{norma del} \\ \text{vettore } r}}$$

$$o(|r|) = r(r) \text{ con } \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r(r)}{|r|} = 0$$

limite in n variabili

Osservazione L'applicazione $r \rightarrow \alpha \cdot r = \langle \alpha, r \rangle$ è
una applicazione lineare da $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Def ancora più generale $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \text{Int}(D)$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$

Si dice che f è diff. in x_0 se esiste un'applicazione lineare

$$L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

tal che

$$f(x_0 + r) = f(x_0) + \underbrace{Lr}_{\in \mathbb{R}^m} + \underbrace{o(|r|)}_{r(r) \in \mathbb{R}^m}$$

$M_{m,m}$ \mathbb{R}^m
 \uparrow \downarrow
 $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

so che ora

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|r(r)|}{|r|} = 0$$

$\xrightarrow{\quad}$ $\xrightarrow{\quad}$
 $\xrightarrow{\quad}$ $\xrightarrow{\quad}$
 $\xrightarrow{\quad}$ $\xrightarrow{\quad}$

norma in \mathbb{R}^m
 $|r(r)|$
 $|r|$
norma in \mathbb{R}^m

ANALISI 2

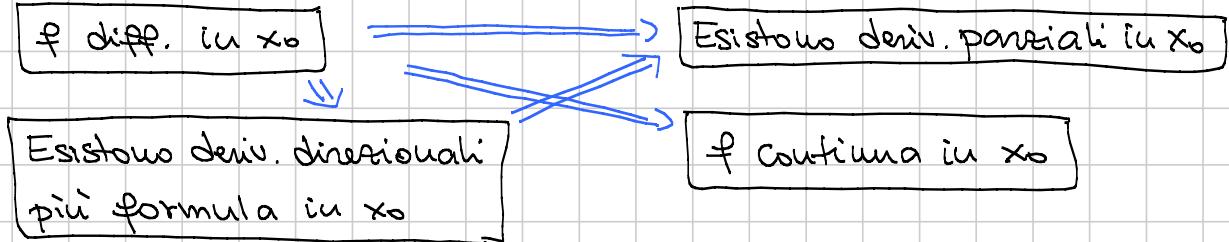
-

LEZIONE 006

Titolo nota

29/09/2015

Quadro dei risultati $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Int}(D)$



Ogni altra implicazione è in generale FALSA.

Def. Si dice GRADIENTE di f nel p.t. x_0 il vettore che ha come componenti le derivate parziali di f .

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

↑
NABLA

Teorema Siano D , f , x_0 come sopra.

Supponiamo che f sia differentiabile in x_0

Allora

(i) f è continua in x_0

(ii) esistono le derivate parziali in x_0 e l'è della definizione di diff. è proprio $\nabla f(x_0)$, quindi

$$f(x_0 + \mathbf{R}) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), \mathbf{R} \rangle + o(\|\mathbf{R}\|)$$

(iii) esistono tutte le derivate direzionali in x_0 e sono date dalla formula

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), \mathbf{v} \rangle$$

formula per le derivate direzionali date dalle derivate parziali

Dim. (i) Dico dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
 Pongo $R = x - x_0$
 e diventa $\lim_{R \rightarrow 0} f(x_0 + R) = f(x_0)$

D'altra parte per definizione di differenziabile

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \underbrace{\langle \alpha, R \rangle}_{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ per } R \rightarrow 0}} + \underbrace{o(|R|)}_{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ per } |R| \rightarrow 0}}$$

(ii) + (iii) Uso la def. di derivata direzionale

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t v) - f(x_0)}{t}$$

numeri

D'altra parte se uso la def. di diff. con $R = tv$ ottengo

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} &= \frac{f(x_0) + \underbrace{\langle \alpha, tv \rangle}_{\substack{\uparrow \\ t}} + r(tv) - f(x_0)}{t} \\ &= \frac{t \langle \alpha, v \rangle}{t} + \frac{r(tv)}{t} \\ &= \langle \alpha, v \rangle + \boxed{\frac{r(tv)}{t|v|}} |v|^{-1} \xrightarrow{\substack{r(R) \\ |R| \rightarrow 0}} \langle \alpha, v \rangle \end{aligned}$$

Back to (iii): se uso $v = e_i$ ottengo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \langle \alpha, e_i \rangle = \alpha_i = i\text{-esima componente di } \alpha$$

Quindi le componenti di α sono le derivate parziali, quindi $\alpha = \nabla f(x_0)$.

— o — o —

Reticamente:

- ① Come calcolo le derivate parziali?
- ② " " " " direzionali?
- ③ Come dimostrare la differentiabilità?

① O uso la definizione, oppure quando posso usare le classiche regole di derivazione stile analisi 1.

Esempi $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + 4xy$ $f_x = 2x + 4y$
 $f_y = 6y + 4x$

$$f(x,y) = y \sin(x^2y)$$

$$f_x = y \cos(x^2y) \cdot 2xy$$

$$f_y = 1 \cdot \sin(x^2y) + y \cos(x^2y) \cdot x^2$$

$$f(x,y) = x^y$$

$$f_x = y x^{y-1}$$

$$f_y = x^y \log x$$

Mi raccomando, fare esercizi (sono derivate in 1 variabile)

② O uso la definizione, oppure se ho una risposta affermativa a ③ uso la formula $\frac{\partial f}{\partial \nu} = \langle \nabla f(x_0), \nu \rangle$

— o — o —

Significato geometrico del gradiente.

Domanda: per quali versori ν la derivate direzionale risulta max/min?

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), \nu \rangle = |\nabla f(x_0)| \cdot |\nu| \cdot \cos \theta$$

angolo compreso

Max per $\cos \theta = 1$, cioè $\theta = 0$

Min per $\cos \theta = -1$, cioè $\theta = \pi$

Quindi: il gradiente è la direzione di massima salita per $f(x,y)$

Brutalmente: guardando la piantina, è la direzione in cui andare per salire

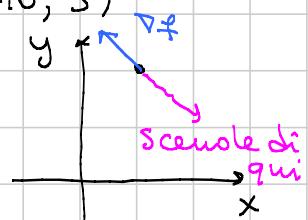
Esempio $f(x,y) = x^2 + y^3 - 3x^2y$.

Metiamo una pallina nel punto del grafico che corrisponde a $(1,2)$. In che direzione va la pallina.

$$\nabla f = (2x - 6xy, 3y^2 - 3x^2) \quad \nabla f (1,2) = (-10, 9)$$

La pallina va nella direzione opposta

— o — o —



③ O uso la definizione, o uso il seguente

Teorema (del DIFFERENZIALE TOTALE) $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$,
 $(x_0, y_0) \in \text{Int}(D)$

Supponiamo che

- (i) le derivate parziali esistono in tutto D (intorno di (x_0, y_0))
- (ii) le derivate parziali sono continue in (x_0, y_0) .

Allora f è differenziabile in (x_0, y_0)

— o — o —

Osservazione Il teorema precedente permette di stabilire la differenziabilità "tutte le volte che non ci sono problemi", ad esempio

$f(x,y) = x^3 \log y + \arctan(xy)$ è differenziabile su tutto il suo insieme di definizione

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

Basta osservare che le derivate parziali non hanno problemi.

Oss. Le derivate parziali si possono scrivere in termini di \circ piccolo

$$f(x_0 + R e_i) = f(x_0) + \underbrace{f_{x_i}(x_0) R}_{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)} + \circ(R)$$

$$f(x_0 + R v) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) R + \circ(R)$$

La differenza rispetto al differenziale è che qui R è un numero, quindi $\circ(R)$ contiene un limite in dim. 1, mentre nel differenziale $R \rightarrow 0$ come vettore.

—o—o—

Notazione Nel caso di $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, chi è la matrice che rappresenta l'applicazione lineare?

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + M R + \circ(|R|)$$

Le righe di M sono i gradienti delle componenti di f , cioè

$$M_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad \begin{array}{l} f_i = \text{componente } i\text{-esima} \\ \text{di } f \end{array}$$

↑
riga i
colonna j

M si dice MATRICE JACOBIANA di f

—o—o—

ANALISI 2

-

LEZIONE 007

Titolo nota

30/09/2015

Diff. su più variabili

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + L R + O(|R|)$$

appl. lineare

per $R \rightarrow 0$ limite su n variabiliTeorema del differenziale totale

Brutalmente: se le derivate parziali esistono e sono continue, allora f è differenziabile

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sia $\delta > 0$ e sia f definita in un intorno di x_0 e raggio δ ($B_\delta(x_0)$) a valori in \mathbb{R} .

Supponiamo che

(i) le derivate parziali esistono in $B_\delta(x_0)$

(ii) " " " sono continue in x_0 .

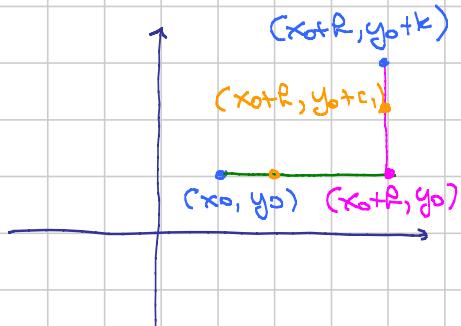
Allora f è diff. in x_0 .

Diff. in 2 variabili $x_0 \rightsquigarrow (x_0, y_0)$

$$f(x_0 + R, y_0 + k) - f(x_0, y_0) =$$

$$= f(x_0 + R, y_0 + k) - f(x_0 + R, y_0) +$$

$$+ f(x_0 + R, y_0) - f(x_0, y_0)$$



Applico Lagrange uno - dimensionale alla prima e alla seconda riga

$$= k f_y(x_0 + R, y_0 + c_1) + R f_x(x_0 + c_2, y_0)$$

Lagrange su $\varphi(t) = f(x_0 + R, t)$

$$\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0) = k \varphi'(c)$$

$$= k f_y(x_0, y_0) + R f_x(x_0, y_0) + k [f_y(x_0 + R, y_0 + c_1) - f_y(x_0, y_0)] + R [f_x(x_0 + c_2, y_0) - f_x(x_0, y_0)]$$

$\langle (k, R), \nabla f(x_0, y_0) \rangle$

spesso che sia $O(\sqrt{R^2 + k^2})$

Dico che ciascuno dei due termini è $O(\sqrt{R^2+k^2})$. Guardo il 1°

$$\frac{|k| |f_y(x_0+R, y_0+k) - f_y(x_0, y_0)|}{\sqrt{R^2+k^2}} \leq \frac{|f_y(x_0+R, y_0+k) - f_y(x_0, y_0)|}{\sqrt{R^2+k^2}} \xrightarrow[0]{} 0$$

perché ho assunto che f_y fosse continua in (x_0, y_0) e $(x_0+R, y_0+k) \rightarrow (x_0, y_0)$ per $(R, k) \rightarrow (0, 0)$

Il secondo termine si tratta allo stesso modo.

— o — o —

- Osservazioni
- Nel caso generale (n variabili) la dim. è la stessa, solo bisogna togliere n termini.
 - Più elegante: evoluzione su n (esercizio di formalizzazione)
 - Ho usato per Lagrange l'esistenza di f_x e f_y in tutto un intorno.

— o — o —

Teorema (in ipotesi più risparmiose) Si possono risparmiare le ipotesi su f_x

$$\dots f(x_0+R, y_0) - f(x_0, y_0)$$

So che $f_x(x_0, y_0)$ esiste, quindi per analisi 1 posso scrivere

$$f(x_0+R, y_0) - f(x_0, y_0) = \underbrace{f_x(x_0, y_0) R}_{\text{termine che volendo}} + \underbrace{R w(R)}_{\text{banalmente } O(\sqrt{R^2+k^2})}$$

$$\lim_{(R, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{|R w(R)|}{\sqrt{R^2+k^2}} \leq \lim_{(R, k) \rightarrow (0, 0)} |w(R)| = 0$$

Quindi ho dimostrato il teorema in 2 variabili assumendo:

- f_y esiste nell'intorno ed è continua in (x_0, y_0)
- f_x esiste solo in (x_0, y_0) .

In n variabili posso assumere

- (i) $m-1$ derivate esistono nell' intorno e continue nel p.t.
 - (ii) l'altra derivata esiste solo nel p.t.

— 0 — 0 —

Teorema (Derivata della funzione composta)

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^m$, sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}^k$

Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$, si $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ $\mathbb{R}^m \xrightarrow{+t} \mathbb{R}^k \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m$

Supponiamo D ed Ω aperti e supponiamo che
Così posso definire $R = g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Sia $x_0 \in D$ e sia $y_0 = f(x_0) \in \Omega$.

Supponiamo f differentiabile in x_0 con matrice jacobiana A

" 9 " " 500 " " " 1 BA.

Allora \mathbf{R} è differentiabile in \mathbf{x}_0 con matrice jacobiana $\mathbf{B}\mathbf{A}$

Dici.) Scriviamo le ipotesi

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + A R + r_f(R)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{|R_F(R)|}{|R|} = 0$$

$$g(y_0 + k) = g(y_0) + Bk + Rg(k)$$

$$\text{con} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{|\log(k)|}{|k|} = 0$$

lavoro con $R = g \circ f$

$$g(f(x_0 + \Delta)) = g(\underbrace{f(x_0)}_{y_0} + \underbrace{\Delta f + r_f(\Delta)}_k)$$

$$= g(y_0) + B (AR + r_p(R)) + \lambda g (AR + r_p(R))$$

$$= \underbrace{g(y_0)}_{g(f(x_0))} + \underbrace{B\bar{R}}_{\substack{\uparrow \\ \text{termine} \\ \text{lineare der volano}}} + B\gamma_F(\bar{R}) + \gamma_F(B\bar{R} + \gamma_F(\bar{R}))$$

Mi serve che gli altri 2 termini siano $O(121)$

$$\underline{1^{\circ} \text{ termine}} \quad \lim_{R \rightarrow 0} \frac{|B_{1F}(R)|}{|R|}$$

Un lemma misterioso dice che: data una matrice M esiste una costante C tale che $|Mx| \leq C|x|$ per ogni $x \in$ spazio di partenza

Dato il lemma misterioso

$$\frac{|B_{1F}(R)|}{|R|} \leq \frac{C \frac{|r_F(R)|}{|R|}}{|R|} \xrightarrow[per \ r_F \ su \ r_F]{} 0$$

2^o termine: cosa vorrei fare

$$\frac{|r_g(AR + r_F(R))|}{|R|} = \frac{|r_g(AR + r_F(R))|}{|AR + r_F(R)|} \cdot \frac{|AR + r_F(R)|}{|R|}$$

\downarrow per l'ipotesi
 \circ su r_g

Limitato

$$\leq \frac{C|R| + |r_F(R)|}{|R|}$$

L'unico problema è che potrei aver diviso per 0.

→ uscita 1: considerare la funzione $\frac{|r_g(k)|}{|k|}$ estesa per $k=0$ = la 0 (o anche 15) per $k=0$

→ uscita 2: lemma della sotto-sotto. Basta dimostrare che ogni successione $R_m \rightarrow 0$ ha una s.succ. in cui il limite fa 0. (il limite del 2^o termine)

D'altra parte, ogni succ. $R_m \rightarrow 0$ ha una sottosucc. in cui

- 0 $AR_m + r_F(R_m) \neq 0$, e allora farà lo stesso che ho fatto
- 0 $AR_m + r_F(R_m) = 0$, ma se $k=0$, allora il termine non c'è nemmeno.

Osservazione: sono le stesse uscite che c'erano ad Analisi 1.

— o — o —

ANALISI 2

- LEZIONE 008

Titolo nota

30/09/2015

Lemma Sia M una matrice $m \times n$. Allora esiste una costante C tale che

$$\frac{|Mx|}{\mathbb{R}^m} \leq C \frac{|x|}{\uparrow \text{in } \mathbb{R}^n} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

stessa per tutti gli x

(altro modo di dire la stessa cosa: le applicazioni lineari sono lipschitziane, infatti

$$|Mx - My| = |M(x-y)| \leq C |x-y|$$

Dim Caso semplice in cui $m = 1$, per cui M è un vettore riga e Mx vuol dire prodotto scalare tra M e x

$$|Mx|^2 = |\langle M, x \rangle|^2 \leq |M|^2 \cdot |x|^2$$

\uparrow
somma dei quadrati di tutti i termini

Nel caso generale le componenti di Mx sono i prodotti scalari tra le righe di M e x , quindi

$$|Mx|^2 = \langle R_1, x \rangle^2 + \dots + \langle R_m, x \rangle^2$$

\uparrow \uparrow
righe di M

$$\leq |R_1|^2 \cdot |x|^2 + \dots + |R_m|^2 \cdot |x|^2$$

$$= |x|^2 \frac{(|R_1|^2 + \dots + |R_m|^2)}{c^2}$$

= somma dei \square di tutti i termini della matrice
= "norma" della matrice.

— o — o — o —

Osservazione sulla composizione

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$$

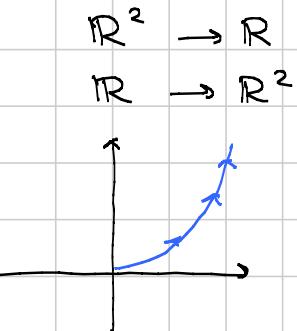
$$R = g \circ f$$

$$\frac{\partial R_j}{\partial x_i} = \frac{\partial g_j}{\partial y_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial g_j}{\partial y_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial g_j}{\partial y_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

termine di posto riga j , colonna i nella matrice BA e quel termine è il prodotto scalare tra la riga j -esima di B e la colonna i -esima di A , che è proprio il RHS.

Esempio 1 $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^4$
 $t \rightarrow (t, t^2)$
 $x \rightarrow x(t)$ $y \rightarrow y(t)$

$$\varphi(t) = f(x(t), y(t)) \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

↑
CHAIN RULE

$$f_x = 2x + 3y$$

$$f_y = 3x + 4y^3$$

$$= (2x(t) + 3y(t)) x'(t) + (3x(t) + 4y(t)^3) y'(t)$$

$$= (2t + 3t^2) \cdot 1 + (3t + 4t^6) \cdot 2t$$

Per riprova, fare il conto nell'altro modo:

$$\varphi(t) = f(x(t), y(t)) = t^2 + 3t^3 + t^8 \quad \text{e quindi}$$

$$\varphi'(t) = 2t + 9t^2 + 8t^7 \quad \text{viene lo stesso nell'altro modo.}$$

— o — o —

Esempio 2 Coordinate polari.

Scrivo una funzione in coordinate polari

$$f(p, \theta) = p^2 \cos \theta$$

Domanda: calcolare le derivate parziali rispetto a x e y

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

↓ ↓
Dalla espressione

$$\frac{\partial p}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

si calcolano dalle formule
per le coordinate polari

Esempio 3 Data $f(x, y)$, trovare $\frac{\partial f}{\partial p}$ e $\frac{\partial f}{\partial \theta}$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial p} = f_x \cdot \cos \theta + f_y \sin \theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = f_x p(-\sin \theta) + f_y p \cos \theta$$

$$f_p^2 = f_x^2 \cos^2 \theta + f_y^2 \sin^2 \theta + 2 f_x f_y \cos \theta \sin \theta$$

$$f_\theta^2 = p^2 f_x^2 \sin^2 \theta + p^2 f_y^2 \cos^2 \theta - 2 p^2 f_x f_y \cos \theta \sin \theta$$

$$f_x^2 + f_y^2 = f_p^2 + \frac{1}{p^2} f_\theta^2$$

norma² del gradiente
in coordinate
cartesiane / polari

Verifica $f(x, y) = y + x^2 = p \sin \theta + p^2 \cos^2 \theta$

$$|\nabla f|^2 = f_x^2 + f_y^2 = (2x)^2 + 1 = 4x^2 + 1 = 4p^2 \cos^2 \theta + 1$$

$$|\nabla f|^2 = f_p^2 + \frac{1}{p^2} f_\theta^2 = (\sin \theta + 2p \cos \theta)^2 + \frac{1}{p^2} (p \cos \theta - p^2 \cos \theta \sin \theta)^2$$

= sviluppando dovrebbe venire uguale.

— o — o —

Esercizio Come sono fatte tutte le funzioni $f(x,y)$ tali che

$$f_x(x,y) = f_y(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Esempi: $f(x,y) = \text{costante}$

$$f(x,y) = ax + ay$$

$$f(x,y) = x^2y + xy^2 \quad f_x = 2xy + y^2 \quad f_y = x^2 + 2xy$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$f(x,y) = g(x+y) \quad f_x = g'(x+y) \quad f_y = g'(x+y)$$

$$g(2x+3y) \quad f_x = g'(2x+3y) \cdot 2$$

$$f_y = g'(2x+3y) \cdot 3$$

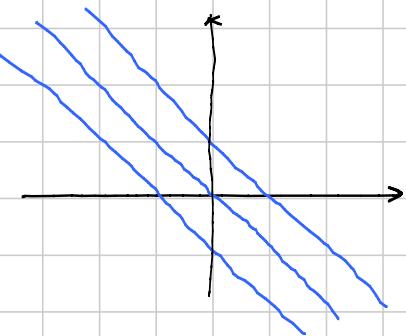
Congettura: sono tutte e sole le funzioni del tipo $g(x+y)$ con $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile.

Si tratta di dimostrare che sono costanti su tutte le rette // alla $y = -x$. A quel p.t. pongo

$$g(x) = f(x,0) \text{ e ho che}$$

$$f(x,y) = f(x+y,0) = g(x+y)$$

f è costante
sulle rette //



Come sono fatte le rette? Sono del tipo $(t, k-t)$

Dico dim. che $\varphi(t) = f(t, k-t)$ è costante

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= f_x(t, k-t) \cdot 1 + f_y(t, k-t) \cdot (-1) \\ &= 0 \text{ per ipotesi, quindi } \varphi(t) = \text{costante.} \end{aligned}$$

— o — o —

ANALISI

2

LEZIONE 009

Titolo nota

02/10/2015

Derivate successive per funzioni di più variabiliEsempio $f(x, y) = x^2 + 7x \sin y$

$$f_x(x, y) = 2x + 7 \sin y$$

$$f_{xx}(x, y) = 2$$

$$f_{yx}(x, y) = 7 \cos y$$

$$f_{xxx}(x, y) = 0$$

$$f_{yxx}(x, y) = 0$$

$$f_{xyx}(x, y) = 0$$

$$f_{yyy}(x, y) = -7 \sin y$$

$$f_y(x, y) = 7x \cos y$$

$$f_{xy}(x, y) = 7 \cos y$$

$$f_{yy}(x, y) = -7x \sin y$$

Oss. Per una funzione di 2 variabili, le possibilità per le derivate parziali k-esime sono 2^k . Per una funzione di n variabili sono n^k .

Notazione

$$f_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\partial_{xx} f$$

$$D_{xx} f$$

$$f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\partial_{xy} f$$

$$D_{xy} f$$

dopo

prima

Fatto generale : \rightarrow ci sono esempi in cui $f_{xy} \neq f_{yx}$ \rightarrow sotto ipotesi del tutto ragionevoli vale $f_{xy} = f_{yx}$ Corollario Sotto ipotesi ragionevoli, una qualunque derivata k-esima per una funzione di n variabili dipende solo da quante volte ho derivato rispetto ad ogni variabile, e non dall'ordine di esecuzione delle operazioni!

$$f_{xxyx} = f_{yxxx} = f_{xxxx}$$

$$f_{xxxz} = f_{yxxz} = f_{xzxy} = \dots$$

Conseguenza Sotto le ipotesi ragionevoli, le derivate k -esime di una funzione di 2 variabili sono $(k+1)$. Ad esempio quelle terze sono

$$f_{xxx} \quad f_{xxy} \quad f_{xyy} \quad f_{yyy}$$

Esercizio Quante sono le k -esime di una funzione di m variabili

Osservazione Basta dimostrare che $f_{xy} = f_{yx}$ per funzioni di 2 variabili per avere il risultato in generale (le altre le posso pensare fissate).

Teorema (Inversione dell'ordine di derivazione - Schwarz)

Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, sia $\delta > 0$, sia $f: \underbrace{(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)}_{R_\delta} \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ esistono in tutto R_δ

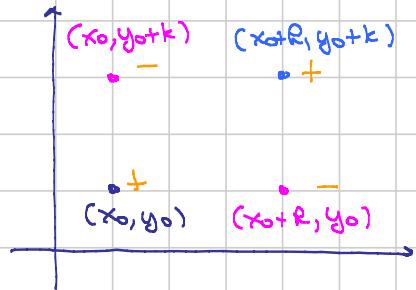
(ii) " " sono continue in (x_0, y_0)

Allora

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

Dim. Considero la funzione

$$g(R, k) = f(x_0 + R, y_0 + k) + f(x_0, y_0) - f(x_0 + R, y_0) - f(x_0, y_0 + k)$$



Considero anche

$$\varphi(t) := f(x_0 + R, t) - f(x_0, t)$$

$$\psi(t) := f(t, y_0 + k) - f(t, y_0)$$

Allora

$$\begin{aligned} g(R, k) &= \varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0) \quad (\text{Lagrange su } \varphi(t)) \\ &= k \varphi'(y_0 + \alpha) \\ &= k [f_y(x_0 + R, y_0 + \alpha) - f_y(x_0, y_0 + \alpha)] \quad (\text{Lagrange in } x) \\ &= k f_{xy}(x_0 + \beta, y_0 + \alpha) \end{aligned}$$

Supponendo $k > 0, R > 0$ avremo $0 < \beta < R$ e $0 < \alpha < k$

Analogamente $g(R, k) = \psi(x_0 + R) - \psi(x_0)$ (Lagrange su $\psi(t)$)

$$= R \psi'(x_0 + \gamma)$$

$$= R [f_x(x_0 + \gamma, y_0 + k) - f_x(x_0 + \delta, y_0)] \text{ Lagrangiano}$$

$$= R k f_{yx}(x_0 + \gamma, y_0 + \delta)$$

dove $0 < \gamma < R$ e $0 < \delta < k$

Divido per Rk che sono $\neq 0$ e ho ottenuto

$$f_{xy}(x_0 + \beta, y_0 + \delta) = f_{yx}(x_0 + \gamma, y_0 + \delta)$$

Ora faccio tendere $(R, k) \rightarrow (0, 0)$ e uso l'ipotesi (ii) ottenendo

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0). \quad \square$$

Osservazione Non se ne usano 2 parametri diversi, si può usare $k = R$.

Esempio in cui sono diverse

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Prima osservazione: è ovvio che f_{xy} e f_{yx} esistono e coincidono

per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$

Nell'origine devo fare i conti diversamente.

Fatto 1 $f(x, y)$ è continua in $(0, 0)$

[Moralmente è $\frac{p^4}{p^2}$]

Fatto 2 $f(x, y)$ è differenziabile in $(0, 0)$ e $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$

$f(x, y) = 0$ sugli assi

Dim. che è diff. 1° modo Uso la def. e mi riduco a far vedere che

$$f(R, k) = \underset{\substack{\text{O} \\ \text{O} \\ \text{O}}}{f(0, 0)} + \underset{\substack{\text{O} \\ \text{O} \\ \text{O}}}{f_x(0, 0)} R + \underset{\substack{\text{O} \\ \text{O} \\ \text{O}}}{f_y(0, 0)} k + O(\sqrt{R^2 + k^2})$$

Basta mostrare che $f(r, \theta) = o(\sqrt{x^2+y^2})$, cioè che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{f(r, \theta)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad (\text{è } \frac{r^4}{r^3})$$

2° modo Calcolo $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ ovunque e dim. che sono continue in $(0,0)$ + teo. diff. tot.

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - 2x(x^3y - xy^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} = - \frac{\text{stessa cosa scambiati } x \text{ e } y}{(x^2+y^2)^2}$$

Il fatto che f_x e $f_y \rightarrow 0$ per $(x, y) \rightarrow (0,0)$ segue da $\frac{r^5}{r^4}$.

Fatto 3

$$f_x(0, y) = -\frac{y^5}{y^4} = -y \Rightarrow f_{yx}(0, 0) = -1$$

\uparrow Diverse

$$f_y(x, 0) = \frac{x^5}{x^4} = x \Rightarrow f_{xy}(0, 0) = 1$$

Oss 1 Come vedere che $f_y(x, y) = -f_x(y, x)$

Dim. osservando che $f(x, y) = -f(y, x)$, quindi

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y} f(y, x) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\dots) \cdot 0$$

\uparrow chain rule

$$= -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x). \quad]$$

Oss. 2 "Costruzione di controesempi a Schwarz".

Prendo una $g(x, y)$ con limiti diversi a $(0,0)$ sull'asse x e sull'asse y .

Poi pongo

$$f(x, y) = xy g(x, y)$$

Se g non è omogenea funzione !!!

ANALISI 2

LEZIONE 010

Titolo nota

02/10/2015

FORMULA DI TAYLOR IN PIÙ VARIABILI

Analisi 1

$$f(x_0 + R) = \sum_{k \leq m} \underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} R^k}_{\text{polinomio di Taylor di ordine } m} + r(R)$$

dove

- (Peano) $r(R) = O(R^m)$ per $R \rightarrow 0$ [Ipotesi: $m-1$ derivate nell'intorno derivata m -esima nel punto]
- (Lagrange) $r(R) = \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} R^{m+1}$ con c che sta fra x_0 e $x_0 + R$ [Ipotesi: $m+1$ derivate nell'intorno]

Analisi 2

$$f(x_0 + R) = \sum_{|p| \leq m} \frac{D^p f(x_0)}{p!} R^p + r(R)$$

Sotto ci sta il formalismo dei MULTI-INDICI.

Un multiindice p è una m -upla (p_1, \dots, p_m) di naturali.

Si pone

- $|p| = p_1 + \dots + p_m$
- $p! = p_1! \cdot \dots \cdot p_m!$
- Se $R = (R_1, \dots, R_m)$ è un vettore, allora $R^p = R_1^{p_1} \cdot \dots \cdot R_m^{p_m}$
- $D^p f = \partial_{x_1}^{p_1} \cdot \dots \cdot \partial_{x_m}^{p_m} = \text{derivata parziale di ordine } |p|$

Oss. Con i multiindici si scrive bene la potenza di un k -monio

$$(x_1 + \dots + x_k)^m = \sum_{|p| = m} \frac{m!}{p!} x^p$$

↑
multiindici con
 k componenti

Volevolo

$$x_1 + \dots + x_k = \sum_{|p| = 1} x^p$$

Casi particolari del polinomio di Taylor2 variabili, ordine 3, centro in $(x_0, y_0) = (0,0)$

$$\begin{aligned}
 f(x, y) = & f(0,0) && \text{termine di ordine 0} \\
 & + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y && \text{termine di 1° grado} \\
 & + \frac{1}{2!} [f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2] && 2^{\circ} \text{grado} \\
 & + \frac{1}{3!} [f_{xxx}(\dots)x^3 + 3f_{xxy}(\dots)x^2y + 3f_{xyy}(\dots)xy^2 + f_{yyy}(\dots)y^3] && 3^{\circ} \text{grado}
 \end{aligned}$$

In 2 variabili i termini di ordine k sono come aver ulteriormente sviluppato

$$\frac{1}{k!} (f_x x + f_y y)^k$$

In n variabili è la stessa cosa solo con $\underbrace{x_1 \partial_x + \dots + x_n \partial_{x_n}}_{\rightarrow} \frac{1}{k!}$

Forme del resto

notuna



- Alla Peano: $r(\mathbf{R}) = O(|\mathbf{R}|^m)$ [Ipotesi: deriv. parz. di ordine $m-1$ nell' intorno e di ordine m nel punto]
- Alla Lagrange: $r(\mathbf{R}) = \sum_{|\mathbf{p}|=m+1} \frac{D^{\mathbf{p}} f(c)}{\mathbf{p}!} \mathbf{R}^{\mathbf{p}}$

dove c è un punto nel segmento congiungente x_0 e $x_0 + \mathbf{R}$
 [Ipotesi: deriv. parziali di ordine $m+1$ nell' intorno]

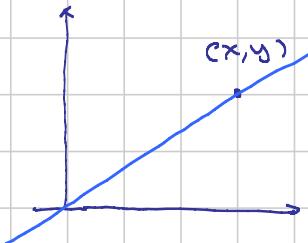
"Dim." Slogan: è un fatto uno-dimensionale !!

Per semplicità considero il caso di 2 variabili.

$f(x, y)$ e voglio sviluppare in $(0,0)$.

Considero, fissati x e y , la funzione

$$\varphi(t) = f(tx, ty)$$



La funzione φ è derivabile tante volte quanto f e avrà un suo sviluppo di Taylor - Lagrange

$$\varphi(t) = \sum_{k \leq m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{\varphi^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} t^{m+1}$$

Ponendo $t=1$ ottieniamo

$$f(x, y) = \varphi(1) = \sum_{k \leq m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}$$

Resta da capire chi sono $\varphi^{(k)}(0)$. Vediamo a mano

$$\varphi^{(0)}(0) = f(0, 0)$$

$$\varphi'(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CHAIN RULE}}}{f_x(tx, ty)} x + f_y(tx, ty) y$$

$$\text{quindi } \varphi'(0) = f_x(0, 0) x + f_y(0, 0) y$$

$$\varphi''(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uguali}}}{f_{xx}(tx, ty)x^2 + f_{xy}(tx, ty)xy + f_{xy}(tx, ty)xy + f_{yy}(tx, ty)y^2}$$

$$\varphi''(0) = f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2$$

e così via per gli ordini successivi.

Questo dimostra Taylor - Lagrange modulo fare per indistinzione la formula per $\varphi^{(k)}(t)$.

— o — o —

La dim. di Taylor Peano non si può fare allo stesso modo usando Taylor - Peano sulla $\varphi(t)$.

Ad Analisi 1 posso dim. TP usando TL.

Dim. Voglio TP di ordine n . Scrivo TL di ordine $n-1$

$$f(x_0+R) = \sum_{k \leq m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} R^k + \frac{f^{(m)}(x_0+c)}{m!} R^m$$

Se so che $f^{(n)}(x)$ è continua in x_0 , allora posso aggiungere e togliere

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} R^n + \boxed{\frac{f^{(n)}(x_0+c) - f^{(n)}(x_0)}{n!} R^n}$$

Termino che manca
per la sommatoria

" $O(R^n)$ se so che $f^{(n)}(x)$ esiste in
un intorno ed è continua in x_0

Questo dimostra TP assumendo che $f^{(n)}(x)$ esista in un intorno
e sia continua in x_0 e si estende anche in più variabili.

— o — o —

Oss. Praticamente i pol. di Taylor si calcolano sfruttando quelli
in una variabile.

$$f(x,y) = x \sin y + \cos(xy) \quad \text{Taylor di ordine 6}$$

$$= x \left(y - \frac{1}{6} y^3 + \frac{1}{120} y^5 \right) + 1 - \frac{1}{2} x^2 y^2 + O((x^2 + y^2)^3)$$

\uparrow
 $|x,y|^6$
= distanza dal p. to
alla sesta.

ANALISI 2

LEZIONE 011

Titolo nota

06/10/2015

Lagrange DIREZIONALE

Analisi 1: $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$

In più variabili: $f(b) - f(a) = \underbrace{b-a}_{\text{numero}} \cdot \underbrace{\nabla f(c)}_{\substack{\text{vettore} \\ \text{pto sul segmento di estremi} \\ a \text{ e } b}}$

Dim. Considero la restrizione al segmento

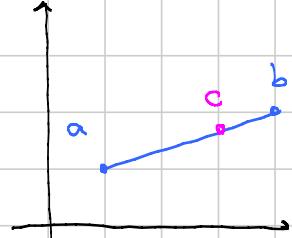
$$\varphi(t) = f(a + t(b-a))$$

param. del segmento

$$f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = 1 \cdot \varphi'(t_0) \quad t_0 \in (0,1)$$

ma

$$\varphi'(t) = \underbrace{\langle \nabla f(a + t(b-a)), b-a \rangle}_{\substack{\text{CHAIN RULE}}} \text{ da cui la tesi.}$$



Conseguenza 1 Sia $f: \overline{B}_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che $\nabla f = 0$ per ogni $x \in \overline{B}_\delta(x_0)$.

Allora $f(x)$ è costante in $\overline{B}_\delta(x_0)$.

Dim. $f(x) - f(x_0) = \langle x - x_0, \nabla f(c) \rangle = 0$ quindi $f(x) = f(x_0)$

Conseguenza 2 Sia $f: \overline{B}_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1
 (cioè: si dice che $f \in C^k(A)$ se sono continue in A tutte le derivate $D^\alpha f(x)$ con α multi-indice con $|\alpha| \leq k$)

Allora f è Lipschitziana in $\overline{B}_\delta(x_0)$ e la costante di Lip. è

$$L = \max \{ |\nabla f(x)| : x \in \overline{B}_\delta(x_0) \}$$

Dim. $|f(b) - f(a)| = |\langle b-a, \nabla f(c) \rangle| \leq \underbrace{|b-a|}_{\substack{\text{C.S.}}} \cdot \underbrace{|\nabla f(c)|}_{\leq L} \leq L$

Questo dimostra che la costante L va bene. Bisognerebbe dimostrare che ogni costante più piccola di L non va bene.

Esercizio Se f è dip. in un insieme A e $x_0 \in \text{Int}(A)$ e $\nabla f(x_0)$ esiste, allora $|\nabla f(x_0)| \leq L \leftarrow$ costante che compare nella def. di f dip.

Dim. Prese un qualunque VERSORE v calcoliamo la derivata direzionale nel p.t. x_0

$$|\langle \nabla f(x_0), v \rangle| = \left| \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \right| = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + \alpha v) - f(x_0)|}{|\alpha v|} \leq L$$

\uparrow
 f è diff. in x_0

$$\leq \frac{|v| \cdot L}{|\alpha|} = L \text{ perché } |v| = 1$$

Quindi ora sappiamo che

$|\langle \nabla f(x_0), v \rangle| \leq L$ per ogni v tale che $|v| = 1$. Da questo voglio dedurre che $|\nabla f(x_0)| \leq L$.

Ci sono 2 casi:

- Se $\nabla f(x_0) = 0$ non è molto difficile
- Se $\nabla f(x_0) \neq 0$ uso $v = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$ (versore che dice la direzione di $\nabla f(x_0)$) e ottengo

$$\langle \nabla f(x_0), \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|} \rangle = \frac{1}{|\nabla f(x_0)|} \langle \nabla f(x_0), \nabla f(x_0) \rangle = |\nabla f(x_0)|$$

— o — o —

Domanda Quanto è importante che l'insieme di definizione sia $B_\delta(x_0)$

Per la conseguenza 1, basta che sia un aperto CONNESSO

Enunciato: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$ un aperto connesso, sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ diff. con $\nabla f(x) = 0$ per ogni $x \in A$.
Allora f è costante in A .

Dim. Prendo a caso $x_0 \in A$ e pongo

$$B = \{x \in A : f(x) = f(x_0)\} \neq \emptyset$$

Vorrei dimostrare che $B = A$. Per far questo basta dimostrare che B è contemporaneamente aperto e chiuso (rispetto ad A).

Ora

- B è chiuso perché $B = f^{-1}(\{f(x_0)\})$, cioè f^{-1} (chiuso)
- B è aperto per quanto detto prima come conseguenza 1. \square

— o — o —

Oss. Si può fare una dimostrazione da analisi 1 sfruttando un lemma che dice

"Un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è connesso se e solo se è connesso per archi C^1 "

Per la conseguenza 2, esaminiamo questo enunciato:

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto (limitato). Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ diff. con

$$|\nabla f(x)| \leq L \quad \forall x \in A$$

Allora

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y| \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A.$$

F
A
L
S
O

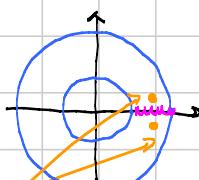
Idea: quando congiungo 2 pti x e y , la congiungente può "passare fuori".



Ovviamente posso fare 1 "giro lungo" e ottenere

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot \text{lunghezza poligonale che congiunge } x \text{ e } y$$

Esempio burocratico

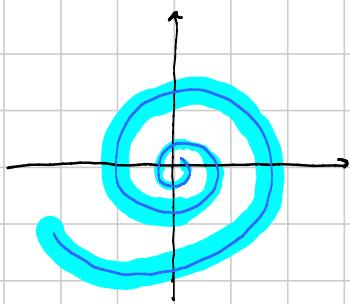


vicini di \mathbb{R}^2 con f lontana. Il fatto è che sono lontani in A .

A = corona circolare meno segmento lungo asse x

$f(x, y) = \theta$ quello delle coord. polari

Esempio perverso



$A =$ intorno di una
spirale che va a
0

Se la spirale ha "lunghezza infinita" allora posso considerare una
funzione con $|\nabla f| \leq 1$ che "sale lungo la spirale".

Questa non è dip. e NECOME NO LIMITATA.

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 012

Titolo nota

06/10/2015

Poliuomi di Taylor in più variabili

$$f(x_0 + R) = \sum_{|p| \leq m} \frac{D^p f(x_0)}{p!} x^p + r(R)$$

- Se f ammette derivate parziali fino all'indice $m+1$ in un intorno di x_0 , allora vale la formula con resto alla Lagrange

$$r(R) = \sum_{|p|=m+1} \frac{D^p f(c)}{p!} x^p \quad \text{con } c \text{ nel segmento tra } x_0 \text{ e } x_0 + R \quad (c \text{ è lo stesso per tutti i } p)$$

- Se f ammette derivate parziali fino all'indice $m-1$ in un intorno di x_0 e tutte le derivate di indice $m-1$ sono diff. in x_0 , allora vale la formula con resto alla Peano

$$r(R) = o(|R|^m) \quad \text{per } R \rightarrow 0$$

(Dimostrata alla lezione 10 supponendo però che anche le $D^p f(x_0)$ con $|p|=m$ esistessero nell'intorno come funzioni continue)

Passi della dim. del Peano vero

Lemma (esercizio) Supponiamo per una funzione di 2 variabili che f_x e f_y esistano in un intorno di (x_0, y_0) e siano diff. in (x_0, y_0) . Allora $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

Dal Lemma segue che nelle ipotesi di Taylor Peano le derivate con $|p|=m$ non dipendono dall'ordine di esecuzione, quindi per lo meno posso scrivere il polinomio di Taylor di ordine m .

Lemma 2 (Esercizio) Il polinomio di Taylor dato dalla formula
ha la proprietà che le sue derivate in 0 coincidono con quelle di
 f in x_0 fino all'ordine m .

[Sarà che $D^q x^p$ calcolata in $x=0$ vale 0 se $q \neq p$ e vale
 $p!$ se $q=p$].

Ora procedo come ad Analisi 1: considero $\varphi(x) = f(x) - \text{polinomio}$
o meglio $\varphi(x) = f(x_0 + x) - \text{polinomio}$
e abbiano che φ ha tutte le derivate nulle fino all'ordine m .

Lemma finale Se $\varphi(x)$ ha tutte le derivate nulle fino all'ordine m ,
allora $\varphi(x) = O(|x|^m)$ per $x \rightarrow 0$
(cioè: tutte le derivate fino all'ordine $m-1$ esistono in un intorno
di 0 e quelle di ordine $m-1$ sono diff. in $x=0$).

[Dim.] Si fa per induzione!

$m=0$ è banale

$m=1$ è da definizione di differenziale

Facciamo il passaggio induttivo da $(m-1)$ a m .

Prendo f come nelle ipotesi e applico il passo induttivo a tutte le
sue derivate parziali prime. Ne deduco che

$$D^p f(x) = O(|x|^{m-1}) \quad \text{per ogni } |p|=1$$

Da cui segue che

$$|\nabla f(x)| = O(|x|^{m-1}) = |x|^{m-1} \omega(x)$$

Ora applico Lagrange dimensionale:

$$|f(x) - f(0)| = |\langle \nabla f(c), x \rangle| \leq |\nabla f(c)| \cdot |x| = \underbrace{|x| \cdot |c|^{m-1}}_{\leq |x|^m} \underbrace{|\omega(c)|}_{\substack{\downarrow \\ \text{nel senso} \\ \text{di } \mathbb{R}^m}}$$

e questo chiude la dimostrazione.

RIPASSO SULLE FORME QUADRATICHE

Def. Una forma quadratica in n variabili è una somma di monomi di 2° grado nelle n variabili

$$q(x) = \sum_{|q|=2} a_q x^q = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

\uparrow
 coeff.

Esempio In 3 variabili $q(x, y, z) = x^2 - 7z^2 + 5xy + 3yz$

Def. Una forma quadratica si dice

- definita positiva se $q(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$
- semidefinita positiva se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$
- def. neg.
- semidef. neg.
- indefinita se non è nessuno dei precedenti, cioè
 $\exists x \in \mathbb{R}^n \ q(x) > 0$ $\exists y \in \mathbb{R}^n \ q(y) < 0$.

Segnatura Ad ogni forma quadratica è associata una terna di interi (m_0, m_+, m_-) o (i_0, i_+, i_-)
 con $i_0 + i_+ + i_- = n$
 detti segnatura della forma.

Da questi si deduce in quali casi ci troviamo

La forma è

- def. positiva $\Leftrightarrow i_0 = i_- = 0 \wedge i_+ = n$
- " negativa $\Leftrightarrow i_0 = i_+ = 0 \wedge i_- = n$
- semidef. pos. $\Leftrightarrow i_- = 0$
- " neg. $\Leftrightarrow i_+ = 0$
- indefinita $\Leftrightarrow i_+ > 0 \wedge i_- > 0$.

Fatto importantissimo

- Se $q(x)$ è definita positiva, allora esiste $m > 0$ tale che

$$q(x) \geq m \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$
 - Se $q(x)$ è definitiva negativa, allora esiste $m > 0$ tale che

$$q(x) \leq -m \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

aggiunto dopo video

Metodi per calcolare la sequatura.

- ④ Con gli autovetori. Alla forma associo una matrice M simmetrica, che dunque ha autovetori reali, quindi

$$\left. \begin{array}{l} m_0 = \# \text{ autor. nulli} \\ m_+ = \# \text{ " } > 0 \\ m_- = \# \text{ " } < 0 \end{array} \right\} \text{contati con molteplicità}$$

- ② Completaamento dei quadrati. Scrivo q come somma / differenza di espressioni lin. ind. A quel p.t.

- ③ Cartesio sul polinomio caratteristico. Siamo il polinomio caratt.

$$P(x) = a_m x^m + \dots + a_k x^k \quad \text{con } a_k \neq 0$$

Ailora

- $m_0 = k$
 - $m_+ = \text{numero di variazioni di segno nella successione dei coeff. non nulli di } p(x)$
 - $m_- = \text{si ottiene per differenza}$

- ④ Metodo dei minimi orlati sulla diagonale (Sylvester).

Si può procedere in qualunque direzione

$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right) \\
 \text{1-2-3} \qquad \qquad \qquad \text{3-2-1} \qquad \qquad \qquad \text{1-3-2}
 \end{array}$$

Def. "vera" di seguitura

$\text{io} = \dim \ker M = \dim$ l'insieme dei vettori ortogonali a tutti gli altri

ANALISI 2

LEZIONE 013

Titolo nota

07/10/2015

Ametrati sulle forme quadraticheTecnica di completamento dei quadrati

Esempio $q(x, y) = x^2 + 4y^2 + 3xy$ voglio la segnatura

$$= x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3y}{2} + \frac{9}{4}y^2 - \frac{9}{4}y^2 + 4y^2$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 + \frac{7}{4}y^2 \quad \text{somma di 2 quadrati} \Rightarrow$$

segnatura è ++

$$q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3xy + z^2 + 4xz$$

$$= \underbrace{x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2}y + 2 \cdot x \cdot 2z}_{\text{+ 2. } \frac{3}{2}y \cdot 2z} + \underbrace{\frac{9}{4}y^2 - \frac{9}{4}y^2 + 4z^2 - 4z^2}_{\text{+ 2. } \frac{3}{2}y \cdot 2z - 2 \cdot \frac{3}{2}y \cdot 2z + 2y^2 + z^2}$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}y + 2z\right)^2 + \text{roba in } y \text{ e } z \text{ che tratto come sopra}$$

$$= \text{supponiamo } (\dots)^2 + (\dots)^2 - (\dots)^2 \quad ++-$$

Sylvester border Dine

Esempio



$$+ 0 \ominus$$

segnatura può essere solo $---$ opp. $++-$
 cucompatibile con
 il primo segno +

$$- + 0 - + 0 \quad \text{Quasi subito so che } i_0 = 1$$

$$+ - -$$

impossibile perché
i primi 2 sono --

$$++++ \rightarrow \text{NO}$$

$$+ + - -$$

Lemma fondamentale Sia $q(x)$ una forma quadratica (su m variabili).

Supponiamo che q sia definita positiva.

Allora esiste una costante $m > 0$ tale che

$$q(x) \geq m |x|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

↑
più piccolo autovalore

Dim. Sia A la matrice associata alla forma, cioè $q(x) = \langle Ax, x \rangle$

Ora la matrice A è simmetrica, quindi per il teorema spettrale è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale, cioè

$$M^{-1}AM = D \leftarrow \text{sulla diag. gli autovalori}$$

M^{-1}

Ma allora

da dimostrare

$$q(x) = x^t A x = x^t M^t D M x = (Mx)^t D (Mx) \geq m |Mx|^2 = m |x|^2$$

\uparrow
 M è ortogo..

Resta da dimostrare che per ogni $v \in \mathbb{R}^m$
vale la disug.

$$(Mx)^t Mx = x^t \underbrace{M^t M}_{\text{Id}} x = |x|^2$$

$$v^t D v \geq m |v|^2 \quad v = (v_1, \dots, v_m)$$

\uparrow

$$\sum \lambda_i v_i^2 \geq m \sum v_i^2$$

\uparrow
min. dei λ_i

— o — o —

Risultato analogo Se q è una forma quadratica, allora esiste M t.c.

$$q(x) \leq M |x|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

\uparrow
più grande autovalore

— o — o —

MATRICE HESSIANA

Matrice che ha come elementi le derivate parziali seconde

$$\{Hf(x_0)\}_{ij} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Schwarz \Rightarrow sotto ipotesi decenti è una matrice simmetrica.

Per semplicità prendiamo $f(x, y)$ e scriviamo Taylor di ordine 2 in $(0,0)$

$$f(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y$$

ordine 0 no funzione

ordine 1 no gradiente

$$+ \frac{1}{2} \underbrace{[f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2]}_{\text{Forma quadratica associata alla matrice } Hf(0, 0)}$$

$$+ O(x^2 + y^2)$$

In generale per n variabili con centro in x_0 qualunque possiamo scrivere

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), R \rangle + \frac{1}{2} R^t Hf(x_0) R + O(|R|^2)$$

Forma quadratica

Def. Il p.t. x_0 si dice stationario se $\nabla f(x_0) = 0$

Geometricamente: in 2 variabili vuol dire piano tangente // piano xy

Equazione in generale del piano tangente al grafico di $f(x, y)$ nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Studio Locale vicino ad un p.to stationario

Teorema Sia f una funzione C^2 in un intorno di x_0 (e volendo si può risparmiare).

Supponiamo che $\nabla f(x_0) = 0$

Allora

- Se $Hf(x_0)$ è def. pos., x_0 è p.to di min. locale (cioè esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$)
- Se $Hf(x_0)$ è def. neg., x_0 è p.to di max. loc.
- se $Hf(x_0)$ è indefinito, x_0 non è né max. loc., né min. loc.
- se $Hf(x_0)$ è semidef. (pos. o neg.) SONO GUAI SERI.

Achtung! $Hf(x_0)$ semidef. pos. $\not\Rightarrow$ minimo Locale

Esempio 1 $f(x,y) = x^2 + y^4$ $(0,0)$

$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

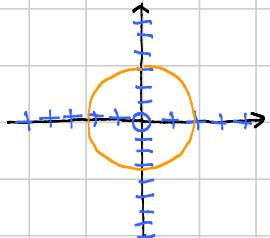
2 0

semidef. pos.

$(0,0)$ è p.to di min. globale ($\forall (x,y) \neq (0,0)$ vale $f(x,y) > 0$)

Esempio 2 $f(x,y) = x^2 - y^4$ $(0,0)$ ∇f e Hf non cambiano

$(0,0)$ non è né p.to di max, né p.to di min. locale



ANALISI 2

LEZIONE 014

Titolo nota

07/10/2015

Sia x_0 un p.t.o. stazionario ($\nabla f(x_0) = 0$)

① $Hf(x_0) > 0$ (def. pos.) $\Rightarrow x_0$ p.t.o. di min. locale

Dim. Taylor - Peano $f(x_0 + R) = f(x_0) + \frac{1}{2}q(R) + O(|R|^2)$

\uparrow
 forma quadratica
 associata ad $Hf(x_0)$

$$= f(x_0) + \frac{1}{2}q(R) + |R|^2 \omega(R)$$

Ma allora per il lemma fondamentale esiste $m > 0$ t.c.

$$\begin{aligned}
 f(x_0 + R) - f(x_0) &= \frac{1}{2}q(R) + |R|^2 \omega(R) \\
 &\geq \frac{m}{2} |R|^2 + |R|^2 \omega(R) = |R|^2 \left(\frac{m}{2} + \omega(R) \right) \\
 &\stackrel{0}{\geq} \frac{m}{4} \text{ in un opportuno } \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad B_R(x_0)
 \end{aligned}$$

Questo dim. che $f(x_0 + R) - f(x_0) \geq 0$ in $B_R(x_0)$
 con disug. stretta se $R \neq 0$.

② $Hf(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ p.t.o. di max. locale

Dim. Stessa cosa, solo che nel p.t.o. di max. $q(x) \leq -m|x|^2$

③ $Hf(x_0)$ indefinita $\Rightarrow x_0$ non è né max, né min.

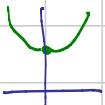
Dim. Esseendo indefinita, vuol dire che

$$\exists v \in \mathbb{R}^m: q(v) > 0$$

$$\exists w \in \mathbb{R}^m: q(w) < 0$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(t) &= \frac{f(x_0 + t\omega)}{2} = f(x_0) + \frac{1}{2} q(\omega) + |t\omega|^2 \omega(t\omega) \\
 &= f(x_0) + \frac{1}{2} t^2 q(\omega) + t^2 |\omega|^2 \omega(t\omega) \\
 &= f(x_0) + t^2 \left(\frac{1}{2} q(\omega) + \frac{|\omega|^2 \omega(t\omega)}{t^2} \right) \\
 &\geq f(x_0) + t^2 \frac{1}{4} q(\omega) \quad \text{se } t \text{ è vicino a 0.}
 \end{aligned}$$

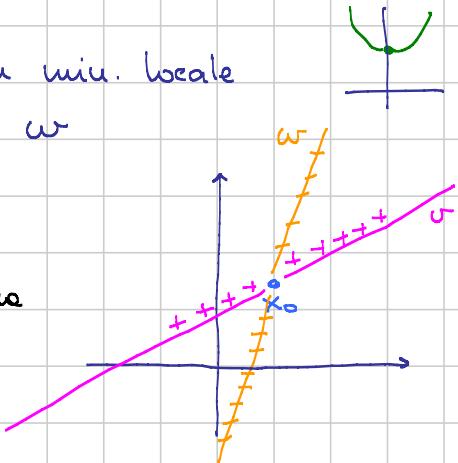
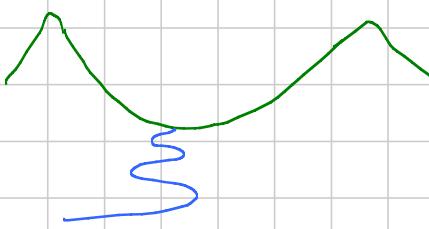
Muovendosi lungo la direzione ω vedo un min. locale



Con un conto analogo lungo la direzione ω vedo un max.

— o — o —

Geometricamente x_0 è quello che si chiama p.t. di sella o mountain pass



Esercizio 1 Determinare i p.ti stazionari della funzione

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - xy$$

e capire di che tipo sono.

$$\nabla f(x, y) = 0 \quad \begin{cases} 4x^3 - y = 0 & y = 4x^3 \\ 4y^3 - x = 0 & 4^4 x^9 - x = 0 \quad x(2^8 x^8 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$x = 0 \rightsquigarrow y = 0 \rightsquigarrow (0, 0)$$

$$x = \pm \frac{1}{2} \rightsquigarrow y = \pm \frac{1}{2} \text{ con lo stesso segno} \rightsquigarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Per capire cosa sono posso fare l'Hf $Hf = \begin{pmatrix} 12x^2 & -1 \\ -1 & 12y^2 \end{pmatrix}$

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Det} = -1 \quad \text{seguenza } + - \Rightarrow \text{sella}$$

$$Hf\left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{seguenza } ++ \Rightarrow \text{p.ti di min.}$$

HARD-HARD Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Supponiamo che abbia almeno due p.ti di min. locale

→ c'è per forza un p.to di max?

→ c'è per forza un altro stationario?



HARD-HARD-HARD Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x, y_0) = +\infty \quad \forall y_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(x_0, y) = -\infty \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Esiste per forza un p.to stationario?

— o — o —

Esercizio 1 $f(x, y) = x^2 + y^4 + xy^2$

L'origine è un p.to stationario. Di che tipo? $\mathbf{Mf} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

quindi BOH!!!

Completo i quadrati: $x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{4}y^4 + y^4$

$$= \left(x + \frac{1}{2}y^2\right)^2 + \frac{3}{4}y^4 > 0 \quad \text{se } (x, y) \neq (0, 0)$$

⇒ (0, 0) è p.to di minimo assoluto

Esercizio 2 $f(x, y) = x^2 + y^4 + 3xy^2$

corretto dopo video

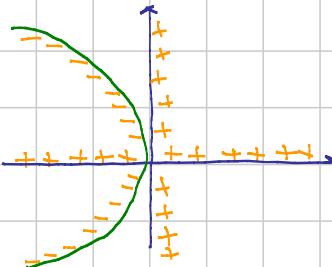
Come prima: $\left(x + \frac{3}{2}y^2\right)^2 - \frac{5}{4}y^4$. Faccio in modo che la prima parentesi sia nulla

corretto dopo video

$f\left(-\frac{3}{2}t^2, t\right) = -\frac{5}{4}t^4$, quindi vicino a (0, 0) ci sono p.ti in cui $f(x, y) < 0$

Alternativa: cambio di variabili

$$z = y^2$$



Esercizio 3 $f(x,y) = x \sin y - y \sin x + x^3 y^2$ $(0,0)$ è stazionario
Sviluppo di Taylor

$$\begin{aligned}
 f(x,y) &= x \left(y - \frac{1}{3!} y^3 + o(y^3) \right) - y \left(x - \frac{1}{3!} x^3 + o(x^3) \right) \\
 &= \cancel{xy} - \frac{1}{6} xy^3 - \cancel{x^2 y} + \frac{1}{6} x^3 y + \underbrace{o((x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}})}_{\text{i termini buttati sono di grado } \geq 6} \\
 &= \frac{1}{6} \cancel{xy} (x^2 - y^2) + o(p^5) \\
 &\quad \text{segno variabile, quindi forse non è max/min}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(t, 2t) &= t \sin(2t) - 2t \sin t + o(t^5) \\
 &= t \left(2t - \frac{1}{6} 8t^3 \right) - 2t \left(t - \frac{1}{6} t^3 \right) + o(t^5) \\
 &= -\frac{4}{3} t^4 + \frac{1}{3} t^4 + o(t^5) = -t^4 + o(t^5) \rightsquigarrow \text{max}
 \end{aligned}$$

$$f(2t, t) \rightsquigarrow \text{vedo un minimo.} \quad \text{Oss. } Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quanto fa $f_{xxxx}(0,0) = 0$

↓

compare nel Taylor davanti $x^3 y^4$ e questo termine nel Taylor "non c'è"

— 0 — 0 —

ANALISI 2 - LEZIONE 015

Titolo nota

09/10/2015

Max e min per funzioni di più variabiliTeorema Sia $K \subseteq \mathbb{R}^m$. Allora i seguenti fatti sono equivalenti.

- (i) K è LIMITATO + CHIUSO,
- (ii) K è compatto per successioni,
- (iii) K è compatto per ricoprimenti.

Def. Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^m$ si dice

- CHIUSO se coincide con la sua chiusura (opp. complementare aperto)
- LIMITATO se $\exists R > 0$ t.c. $K \subseteq B_R(0)$ (o equivalentemente $K \subseteq B_R(x_0)$ per un qualche centro x_0)
- COMPATTO PER SUCCESSIONI se per ogni $\{x_m\} \subseteq K$ esiste $m_k \rightarrow +\infty$ ed esiste $x_\infty \in K$ t.c. $x_{m_k} \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ \text{limite in } \mathbb{R}^m}} x_\infty$
- COMPATTO PER RICOPRIMENTI se per ogni $\{M_i\}_{i \in I}$ aperti di \mathbb{R}^m t.c. $K \subseteq \bigcup_{i \in I} M_i$ esiste $J \subseteq I$ finito t.c.

$$K \subseteq \bigcup_{j \in J} M_j$$

(ogni ricoprimento ammette s.ric. finito)

Def. $K \subseteq \mathbb{R}^m$ si dice COMPATTO se verifica una delle 3 equiv.Dim. $(i) \Rightarrow (ii)$ Per semplicità partiamo in \mathbb{R}^2 .Prendiamo $K \subseteq \mathbb{R}^2$ lim. + chiuso, sia $\{v_m\} \subseteq K$ una succ. $v_m = (x_m, y_m)$.Passo 1 : essendo K limitato, $|v_m| \leq R$ per un certo raggio R .Ma allora $|x_m| \leq R$ e $|y_m| \leq R$ per ogni $m \in \mathbb{N}$

$$|x_u| = \sqrt{x_u^2} \leq \sqrt{x_u^2 + y_m^2} \leq R$$

Passo 2 Per Bolzano - Weierstrass in una dimensione, $\{x_m\}$ ammette una s.succ. convergente

$$x_{m_k} \rightarrow x_\infty$$

Passo 3 Considero ora la successione $\{y_{m_k}\}$. Questa per B-W ammette una sottosucc. a sua volta convergente

$$y_{m_{k_i}} \rightarrow y_\infty$$

Questo garantisce anche che $x_{u_{k_i}} \rightarrow x_\infty$

Passo 4 Sono riuscito a far convergere le componenti

$$\begin{array}{ccc} \text{lim. in } \mathbb{R} & & \text{lim. in } \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ y_{m_{k_i}} & \rightarrow y_\infty & x_{u_{k_i}} \rightarrow x_\infty \end{array}$$

Dico che $(x_{u_{k_i}}, y_{m_{k_i}}) \rightarrow (x_\infty, y_\infty) = v_\infty$

lim. in \mathbb{R}^2

Basta verificare che

$$|v_{m_{k_i}} - v_\infty| = \left(|x_{u_{k_i}} - x_\infty|^2 + |y_{m_{k_i}} - y_\infty|^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0$$

Passo 5 Resta da dimostrare che $v_\infty \in K$. Questo segue banalmente dalla chiusura di K .

[Se $v_\infty \notin K$, essendo il complem. aperto ... definitivamente la succ. sarebbe fuori da K].

— o — o —



K è fuori da $B_r(v_\infty)$

Oss. In \mathbb{R}^m si complica solo le notazioni, ma l'idea è la stessa: ogni volta estraggo una s.succ. dalla precedente per far convergere una nuova componente.

Diu (ii) \Rightarrow (i) Per assurdo

Supponiamo K non LIMITATO. Allora per ogni $m \in \mathbb{N}$ trovo un p.t. $v_m \in K$ t.c. $|v_m| \geq m$

Questa non può avere s.succ. convergenti

Supponiamo K non chiuso. Allora esiste v_∞ aderente a K ma non in K . Allora per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste

$$v_m \in B_{\frac{1}{m}}(v_\infty)$$

Ma allora $v_m \rightarrow v_\infty$, quindi tutte le sue s.succ. $\rightarrow v_\infty \notin K$.

— o — o —

TEOREMA DI WEIERSTRASS Sia $D \subseteq \mathbb{R}^m$ e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

- (i) D compatto,
- (ii) f continua.

Allora esistono per forza

$$\max \{ f(x) : x \in D \}$$

$$\min \{ f(x) : x \in D \}$$

Variante semicontinua:

- (i) D compatto

- (ii) f SCI (semicontinua inf.)

Allora esiste per forza il min

(semicontinua sup)

(esiste max).

Diu. Direttamente in versione SCI. Di siano esiste

$$I := \inf \{ f(x) : x \in D \} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Per definizione di \inf e il solito lemma, I è il limite di una successione di valori nell'immagine, quindi

$$\exists \{x_m\} \subseteq D \text{ t.c. } \underset{\substack{\uparrow \\ \text{succ. minimizzante}}}{f(x_m)} \rightarrow I$$

Per la compattetza per succ. di D esiste $x_{m_k} \rightarrow x_\infty \in D$.

Per la sc1 di $f(x)$ avremo che

$$I \leq f(x_\infty) \leq \liminf_{\substack{\uparrow \\ k \rightarrow \infty}} f(x_{n_k}) = \lim_{\substack{\uparrow \\ m \rightarrow \infty}} f(x_m) = I$$

\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow
I è inf. f sc1 succ. min.

se $f(x_n)$ ha lim.,
allora tutte le s.succ.
hanno lo stesso limite

Essendo $LHS = RHS$, in messo sono tutte uguaglianze, quindi

$$f(x_\infty) = I$$

Quindi da ora $I \in \mathbb{R}$ ed è il minimo, mentre x_∞ è un p.t. di minimo. \square

— o — o —

Corollario Una funzione continua su un compatto è per forza LIMITATA

— o — o —

Operativamente, dove cerco i p.ti di max/min una volta che so che esistono?

Nelle solite 3 categorie

(1) Stationari interni : p.ti $x \in \text{Int}(D)$ t.c. $\nabla f(x) = 0$

(2) Singolari interni : p.ti $x \in \text{Int}(D)$ t.c. $\nabla f(x)$ non esiste
non esiste almeno una delle derivate parziali

(3) Bordo : $x \in \partial D$
↑ in generale questo è complicato

Dim. Sia x_0 un p.t.o di max/min per $f(x)$ in D .

Allora abbiamo 3 casi:

- se $x_0 \in \partial D$ siamo in (3)
- se $x_0 \in \text{Int}(D)$ e $\nabla f(x_0)$ N.E. siamo in (2)
- se $x_0 \in \text{Int}(D)$ e $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ esistono tutte, devono dim. che sono nulle.

Considero la funzione $\varphi_i(t) = f(x_0 + t e_i)$

È definita almeno in un intorno ^{1-esimo vett. base canonica} di $t=0$ (perché $x_0 \in \text{Int}(D)$) e ha max/min per $t=0$, quindi

$\varphi'_i(0)$ (se esiste) deve fare 0

" \Leftarrow defin. di derivata parziale

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 016

Titolo nota

09/10/2015

Come trovare max/min di una funzione su un compatto

- ① Vedere a occhio
- ② Metodo delle linee di livello
- ③ Procedura standard cercando

→ staz. interni

→ singolari interni

→ Bordo, per il quale esistono 2 tecniche

• PARAMETRIZZAZIONE

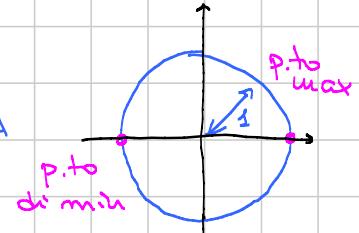
• MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

$$\underline{\text{Esempio 1}} \quad \max \{ x : x^2 + y^2 \leq 1 \} = 1$$

$$\uparrow f(x,y)$$

↑ descrizione dell'insieme A
dove è def. $f(x,y)$

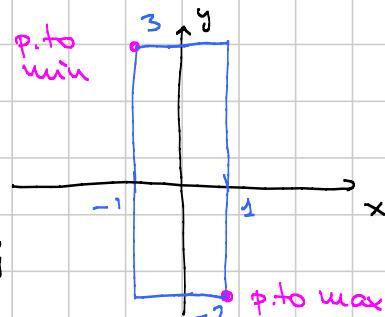
$$\min \{ \dots \} = -1$$



$$\underline{\text{Esempio 2}} \quad \max / \min \{ 3x - 5y : (x,y) \in [-1,1] \times [-2,3] \}$$

$$\max = 13 \quad \text{p.to di max } (1, -2)$$

$$\min = -18 \quad \text{p.to di min } (-1, 3)$$



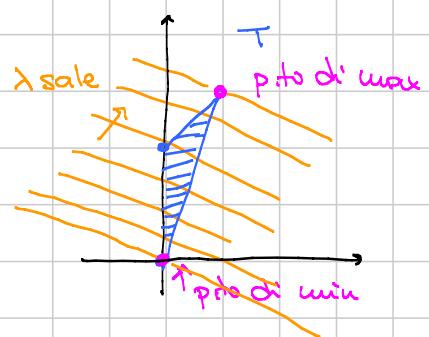
$$\underline{\text{Esempio 3}} \quad \max / \min \{ x + 2y : (x,y) \in T \}$$

T è il triangolo con vertici in $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,3)$

Con le linee di livello: disegno le linee di livello della funzione

$$f(x,y) = \lambda$$

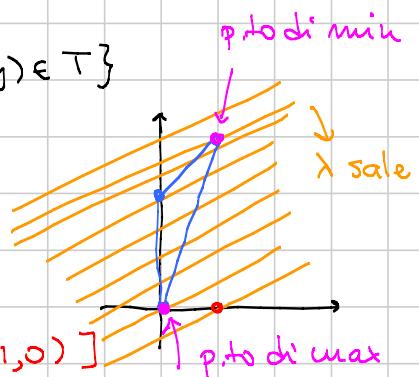
$$x + 2y = \lambda \quad y = -\frac{x}{2} + \frac{\lambda}{2}$$



I p.ti di max/min sono le intersezioni di T corrispondenti ai valori di λ max/min.

Esempio 3-bis max/min $\{x-2y : (x,y) \in T\}$

Con ragionamento ad occhio non si arriva alla risposta.



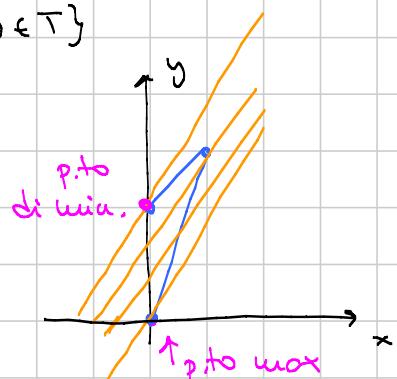
[Achtung! Non posso dire che per il max

uso x più grande e y più piccolo, quindi $(1,0)$]

Scrivo le linee di livello: $x-2y = \lambda$, $y = \frac{x}{2} - \frac{\lambda}{2}$

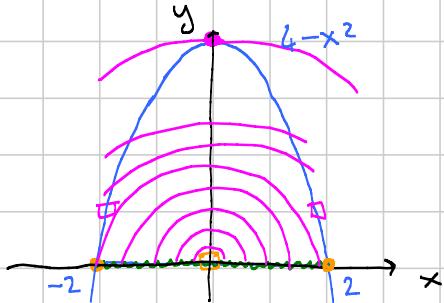
Esempio 3-ter max/min $\{x - \frac{1}{2}y : (x,y) \in T\}$

Linee di livello $x - \frac{1}{2}y = \lambda$ $y = 2x - 2\lambda$



Esempio 4 max/min $\{x^2 + y^2 : (x,y) \in A\}$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$



Il minimo si vede a occhio

min = 0 p.t. di min = $(0,0)$

max = 16 p.t. di max = $(0,4)$

ma non è dim. per bene

Seguiamo la procedura:

→ Staz. interni: \emptyset $2x=0, 2y=0$ $(0,0)$ non è interno

→ Staz. ai bordi: \emptyset

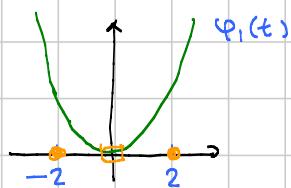
→ Bordo, che è fatto da 2 pezzi

Perzzo ① = $\{ (t,0) : t \in [-2,2] \}$

Perzzo ② = $\{ (t,4-t^2) : t \in [-2,2] \}$

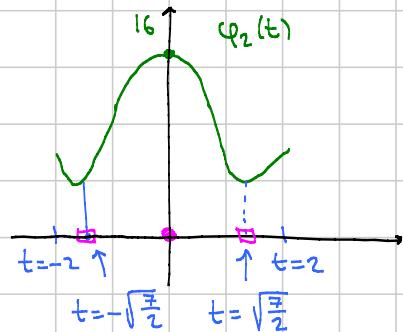
Parametrizziamo la funzione sul bordo

$$\varphi_1(t) = f(t, 0) = t^2$$



max per $t = \pm 2$ che corrispondono a $(x, y) = (-2, 0)$
min per $t = 0$ che corrisponde a $(0, 0)$

$$\begin{aligned}\varphi_2(t) = f(t, 4-t^2) &= t^2 + (4-t^2)^2 = t^2 + 16 - 8t^2 + t^4 \\ &= t^4 - 7t^2 + 16 \quad t \in [-2, 2]\end{aligned}$$



$$\varphi_2'(t) = 4t^3 - 14t = 0$$

$$\text{per } t=0 \text{ e } t^2 = \frac{7}{2}$$

Nel punto 2 abbiamo

max per $t=0 \rightsquigarrow$ corrisponde a $(0, 4)$

min per $t = \pm \sqrt{\frac{7}{2}} \rightsquigarrow$ corrisponde

$$\text{a } \left(\pm \sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{1}{2} \right)$$

Alla fine ho ottenuto 6 p.ti candidati

$$(\pm 2, 0)$$

$$(0, 0)$$

$$\left(\pm \sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{1}{2} \right)$$

$$(0, 4)$$

Li sostituisco tutti nella funzione e

confronto i valori: dove vale di + è il max

" " " - è il min.

Esempio 4-bis

$$\max / \min \left\{ x^2 + y^2 : \underbrace{x \in [-2, 2], y = 4 - x^2}_{A} \right\}$$

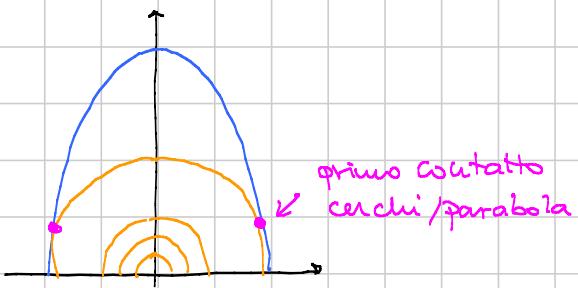
In questo caso la risposta è
la $\varphi_2(t)$ di prima, da cui

solo punto di parabola

$$\max = 16 \quad \text{p.t. di max} = (0, 4)$$

$$\min = \frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 16 \quad \text{p.t. di min} = \left(\pm \sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{1}{2} \right)$$

In termini di linee
di livello



Strategie di parametrizzazione. Come parametrizzo in \mathbb{R}^2

- Segmento di estremi (a_1, b_1) e (a_2, b_2)

$$\{(a_1 + t(a_2 - a_1), b_1 + t(b_2 - b_1)) : t \in [0, 1]\}$$

- tratto della curva $y = f(x)$ con $x \in [a, b]$

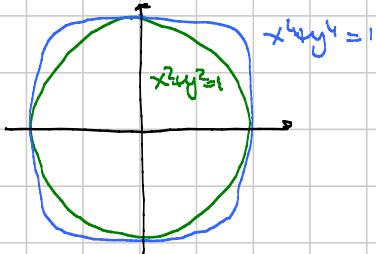
$$\{(t, f(t)) : t \in [a, b]\}$$

- circonferenza di centro (a, b) e raggio r :

$$\{(a + r \cos t, b + r \sin t) : t \in [0, 2\pi]\}$$

- ellisse $ax^2 + by^2 = 1$ $\left\{ \left(\frac{1}{a} \cos t, \frac{1}{b} \sin t \right) : t \in [0, 2\pi] \right\}$

- $x^4 + y^4 = 1$



Due pezzi: $\left\{ (t, \sqrt[4]{1-t^4}) : t \in [-1, 1] \right\}$ (parte alta)

$$\left\{ (t, -\sqrt[4]{1-t^4}) : t \in [-1, 1] \right\}$$
 (parte bassa)

ANALISI 2

LEZIONE 017

Titolo nota

13/10/2015

Esercizio 1 Consideriamo $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \|x\|^2$.

Scrivere $\nabla f(x_0)$ e $Hf(x_0)$.

$$\begin{aligned} f(x_0 + R) &= \|x_0 + R\|^2 = \|x_0\|^2 + \|R\|^2 + 2 \langle x_0, R \rangle \\ &= \|x_0\|^2 + \underbrace{2 \langle x_0, R \rangle}_{\|R\|^2} + \langle R, R \rangle \\ &\quad \|R\|^2 \\ f(x_0) &+ \langle \nabla f(x_0), R \rangle + \frac{1}{2} \langle H(x_0)R, R \rangle \end{aligned}$$

da cui $\nabla f(x_0) = 2x_0$, $Hf(x_0) = 2 \text{ Id}$.

Allo stesso risultato si arriva "facendo le derivate".

Variante $g(x) = \|x\|^4$ Voglio calcolare $\nabla f(x_0)$

Osservo che $g(x) = [f(x)]^2$, quindi per la CHAIN RULE

$$\nabla g(x) = 2f(x) \cdot \nabla f(x) = 2\|x\|^2 \cdot 2x = 4\|x\|^2 x$$

numero vettore

Altra variante $R(x) = \|x\|$

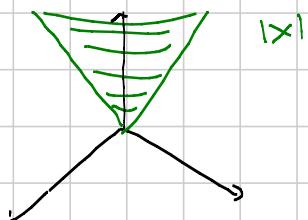
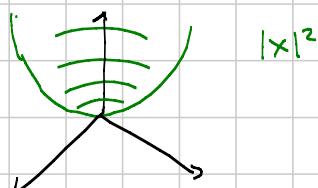
$$R(x) = \sqrt{f(x)} \quad \nabla R(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \nabla f(x) = \frac{1}{2\|x\|} \cdot 2x = \frac{x}{\|x\|}$$

per $x \neq 0$. Se $x = 0$, allora $\nabla R(x)$ non esiste, e non esistono nemmeno le derivate parziali.

$$\frac{\partial R}{\partial x_i}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(0+te_i) - R(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t}$$

diverso per $t \rightarrow 0^+$ e $t \rightarrow 0^-$

In \mathbb{R}^2



Esercizio 2 Sia M una matrice $m \times m$, non necess. simmetrica. Consideriamo $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \langle Mx, x \rangle$$

Calcolare $\nabla f(x_0)$ e $Hf(x_0)$

$$\begin{aligned} f(x_0 + \bar{r}) &= \langle M(x_0 + \bar{r}), x_0 + \bar{r} \rangle \\ &= \langle Mx_0 + M\bar{r}, x_0 + \bar{r} \rangle \\ &= \underbrace{\langle Mx_0, x_0 \rangle}_{\|f(x_0)\|} + \underbrace{\langle Mx_0, \bar{r} \rangle}_{\langle \nabla f(x_0), \bar{r} \rangle} + \underbrace{\langle M\bar{r}, x_0 \rangle}_{\frac{1}{2} \langle Hf(x_0) \bar{r}, \bar{r} \rangle} + \underbrace{\langle M\bar{r}, \bar{r} \rangle}_{\|M\bar{r}\|^2} \end{aligned}$$

Conclusione SBAGLIATA: $Hf(x_0) = 2M$, a meno che M non sia simmetrica.

Osserviamo che

$$\langle M\bar{r}, x_0 \rangle = \langle \bar{r}, M^T x_0 \rangle = \langle M^T x_0, \bar{r} \rangle$$

e pertanto

$$\begin{aligned} \langle Mx_0, \bar{r} \rangle + \langle M\bar{r}, x_0 \rangle &= \langle Mx_0, \bar{r} \rangle + \langle M^T x_0, \bar{r} \rangle \\ &= \langle (M + M^T) x_0, \bar{r} \rangle \end{aligned}$$

e quindi

$$\nabla f(x_0) = (M + M^T) x_0 \quad (\text{compatibile con esercizio 1} \\ \text{in cui } M = \text{Id})$$

Per l'Hessiano osserviamo che

$$\begin{aligned} \langle Hf(x_0) \bar{r}, \bar{r} \rangle &= \langle 2M\bar{r}, \bar{r} \rangle = \langle M\bar{r}, \bar{r} \rangle + \langle M\bar{r}, \bar{r} \rangle \\ &= \langle M\bar{r}, \bar{r} \rangle + \langle \bar{r}, M^T \bar{r} \rangle \\ &= \langle M\bar{r}, \bar{r} \rangle + \langle M^T \bar{r}, \bar{r} \rangle \\ &= \langle (M + M^T) \bar{r}, \bar{r} \rangle \end{aligned}$$

da cui

$$Hf(x_0) = \underbrace{M + M^T}_{\text{matrice simm.}} \quad (\text{compatib. con Esercizio 1})$$

Oss. (esercizio di algebra lineare)

Data una matrice M esiste un'unica matrice simmetrica A t.c.

$$\langle Mx, x \rangle = \langle Ax, x \rangle \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n.$$

Esercizio 3 (Equazione delle onde)

Caratterizzazione tutte le funzioni $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 t.c.

$$M_{tt}(t, x) = M_{xx}(t, x) \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

Sottoesercizio 3.1 Caratt. $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$: $f_x(x, y) = 0$

Sono tutte e sole le funzioni del tipo $f(x, y) = \psi(y)$.

Pongo $\psi(y) = f(0, y)$ e osservo che

$$f(x, y) - f(0, y) = x \cdot f_x(c, y) = 0 \Rightarrow f(x, y) = \psi(y)$$

↑
Lagrange in x

Sottoesercizio 3.2 Caratt. $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$: $f_{xy}(x, y) = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x} [f_y(x, y)] = 0 \Rightarrow f_y(x, y) = \psi(y)$$

$$\Rightarrow f(x, y) = \underset{y}{\underset{\uparrow}{\Psi}}(y) + \varphi(x)$$

primitiva di $\psi(y)$

$$f(x, y) = f(x, 0) + \int_0^y f_y(x, s) ds$$

||

$$\varphi(x) + \int_0^y \psi(s) ds = \varphi(x) + \Psi(y)$$

Le funzioni che risolvono $f_{xy}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
sono tutte e sole quelle del tipo

$$f(x, y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

Back to esercizio 3.

Considero la funzione $g(\xi, \eta) = f(\xi + \eta, \xi - \eta)$

Vado a calcolare con la CHAIN RULE le derivate di g :

$$g_{\xi} = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} = f_t(\xi + \eta, \xi - \eta) \cdot 1 + f_x(\dots) \cdot 1$$

$$g_{\eta} = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} = f_t(\dots) \cdot 1 + f_x(\dots) \cdot (-1)$$

$$g_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \underline{f_{tt}(\dots) \cdot 1} + \underline{f_{tx}(\dots) \cdot (-1)} + \underline{f_{xt}(\dots) \cdot 1} + \underline{f_{xx}(\dots) \cdot (-1)}$$

la somma viene 0 per ipotesi

Ma allora

$$g_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0 \quad \forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$$

quindi

$$g(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

Data g , posso ricostruire f , basta risolvere

$$\begin{cases} \xi + \eta = t \\ \xi - \eta = x \end{cases} \quad 2\xi = t + x \quad \xi = \frac{t+x}{2} \quad \eta = \frac{t-x}{2}$$

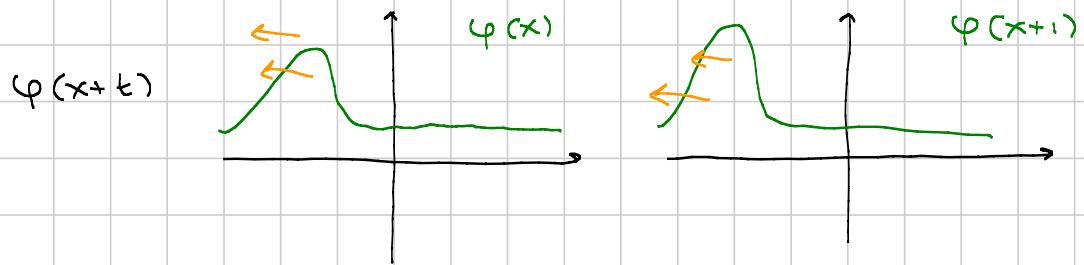
da cui

$$f(t, x) = g\left(\frac{t+x}{2}, \frac{t-x}{2}\right) = \varphi\left(\frac{t+x}{2}\right) + \psi\left(\frac{t-x}{2}\right)$$

Cambiando φ e ψ posso scriverla nella forma

$$f(t, x) = \varphi(x+t) + \psi(x-t)$$

TRAVELING WAVES



Ogni sol. dell' eq. delle onde è somma di 2 traveling waves che vanno in direzioni opposte

Variante Trovare tutte le soluzioni di

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{con } c \text{ parametro} > 0.$$

ANALISI 2

LEZIONE 018

Titolo nota

14/10/2015

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Metodo per trovare candidati p.ti di max/min di una funzione data su un insieme descritto come luogo di zeri

Daf. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice luogo di zeri di Φ l'insieme

$$V := \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi(x) = 0\}$$

Equazione di V

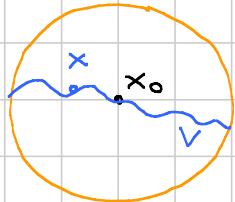
Daf. Siano $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$. Siano $f: B_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ e $\Phi: B_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$.

Sia V definito come sopra.

Dico che x_0 è p.t. di max per $f(x)$ ristretta a V se
 $x_0 \in V$ of course (aggiunto dopo video)

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \text{ t.c. } \Phi(x) = 0$$

... minimo ... $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall \dots$

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Nella situazione della def. di sopra, supponiamo che f e Φ siano diff. in $B_\delta(x_0)$.

Se x_0 è un p.t. di max./min. allora accade almeno una di queste possibilità :

① $\nabla \Phi(x_0) = 0$

② $\nabla f(x_0)$ è multiplo di $\nabla \Phi(x_0)$, cioè $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla \Phi(x_0)$

↳ Moltiplicatore di Lagrange

Utilizzo operativo Supponiamo di essere in 2 variabili.

Sto cercando max/min di $f(x,y)$ su un insieme compatto D .

Cerco i candidati con il solito metodo:

→ staz. interni

→ sing. interni

→ bordo \rightsquigarrow qui intervengono i moltiplicatori: spero che ∂D sia il luogo di zeri di una certa $\phi(x,y)$.

Risolvo due sistemi:

$$\begin{aligned}\phi_x(x,y) &= 0 \\ \phi_y(x,y) &= 0 \\ \phi(x,y) &= 0\end{aligned}$$

1° sistema: le soluzioni sono i p.ti di $\partial D = V$ in cui $\nabla \phi = 0$. Sono i p.ti di tipo ③ nel metodo precedente

Oss. 2 incognite (x,y) e 3 equazioni, quindi SPESO non ci sono soluzioni

$$\begin{aligned}f_x(x,y) &= \lambda \phi_x(x,y) \\ f_y(x,y) &= \lambda \phi_y(x,y) \\ \phi(x,y) &= 0\end{aligned}$$

2° sistema: cerca i p.ti di $\partial D = V$ in cui $\nabla f = \lambda \nabla \phi$. Sono i p.ti di tipo ② nella descrizione prec.

Oss. 3 incognite (x,y,λ) e 3 equazioni, quindi "spesso" ci sono soluzioni

Alla fine aggiungo alla lista dei candidati interni i p.ti di ∂D trovati risolvendo i due sistemi. Per il secondo sistema il valore di λ non conta nulla, ma contano solo x e y .

— o — o —

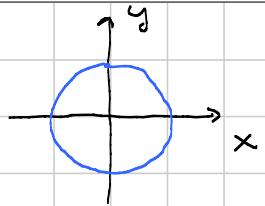
Oss. Risolvere il secondo sistema equivale a trovare i p.ti stationari di una funzione ausiliaria di 3 variabili

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda \phi(x,y)$$

Oss. Se sono in m variabili i sistemi hanno $m+1$ equazioni.

Il 1° ha m incognite, il 2° ne ha $(m+1)$.

Esempio 1 $\max / \min \{ \underbrace{x+2y}_{f(x,y)} : x^2+y^2 \leq 1 \}$



③ Stationari e singolari interni: \emptyset

② Bordo ha equazione

$$\underbrace{x^2+y^2-1=0}_{\Phi(x,y)}$$

Risolvo i 2 sistemi.

1° sistema

$$\begin{cases} \Phi_x = 0 \\ \Phi_y = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \text{impossibile} \end{cases}$$

2° sistema

$$\begin{cases} f_x = \lambda \Phi_x \\ f_y = \lambda \Phi_y \\ \Phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{\lambda} \\ \lambda \neq 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \text{dopo aver} \\ \text{oss. che} \end{bmatrix}$$

Sostituisco nella 3a: $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1$, $\frac{5}{4} = \lambda^2$, $\lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

Quindi ho 2 soluzioni: $(x,y) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$
i segni sono gli stessi:

Sostituisco nella $f(x,y)$ e trovo max/min.

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5}$$

Conclusioni: $\max = \sqrt{5}$ p.t.o di max $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

A

B

$\min = -\sqrt{5}$ p.t.o di min $(- \dots, - \dots)$

B

Interpretazione: $f(x,y) = a \Leftrightarrow x+2y = a \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{a}{2}$

Esempio 2 $\max / \min \{ \underbrace{x^2 + 2y^2}_{f(x,y)} : \underbrace{x^4 + y^4 \leq 1}_{\text{televisione}} \}$

① Staz. interni: $\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

② Sing. interni : \emptyset

③ Bordo : $\underbrace{x^4 + y^4 - 1 = 0}_{\phi(x,y)}$

30 sistema

$$\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \text{impossibile}$$

20 sistema

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \begin{cases} 2x = 4\lambda x^3 \\ 4y = 4\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \begin{cases} x = 2\lambda x^3 \\ y = \lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

1^a equazione

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ \downarrow & \leftarrow 3^{\text{a}} \text{ equ.} \\ y &= \pm 1 \\ \downarrow & \\ (0, \pm 1) & \end{aligned}$$

$$1 = 2\lambda x^2$$

$$y = 0$$

$$1 = \lambda y^2$$

$$(\pm 1, 0)$$

$$x^2 = \frac{1}{2\lambda} \quad y^2 = \frac{1}{\lambda}$$

$$\downarrow 3^{\text{a}} \text{ equ.}$$

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \rightsquigarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

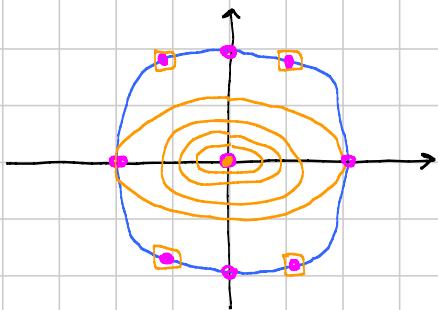
da cui trovo $x^2 = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ $y^2 = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$ scarto quelle con

il segno - e trovo 4 possibilità per (x,y)

Alla fine ho trovato 8 pti + quello stationario cetero.

Sostituendo trovo max / min.

Dalle linee di livello è chiaro che il minimo è nell'origine, ma non è chiaro se il max è in $(0, \pm 1)$ o nei 4 punti simmetrici.



— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 019

Titolo nota

14/10/2015

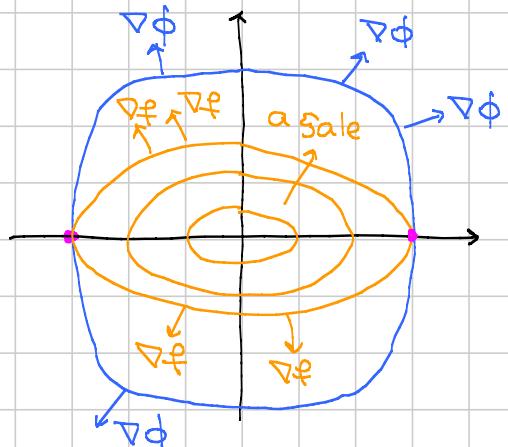
Interpretazione brutale del metodo dei moltiplicatori

$$\max / \min \{ x^2 + 2y^2 : \underbrace{x^4 + y^4 = 1}_{\text{solo bordo}} \}$$

Sto cercando le linee di livello di $f(x)$ che risultano TANGENTI all'insieme V .

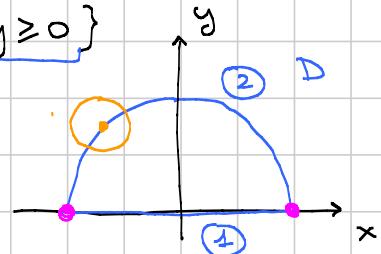
Ora il fatto geometrico è questo:
IL GRADIENTE È PERPENDICOLARE alle linee di livello

Nei punti di tangenza le linee di livello di f e ϕ sono tangenti, quindi $\nabla\phi$ e ∇f sono perpendicolari alla stessa cosa e dunque uno multiplo dell'altro.

UTILIZZO MISTO DI MOLTIPLICATORI E ALTRE TECNICHE

Esempio $\max / \min \{ x + 2y : \underbrace{x^2 + y^2 \leq 1}_{D}, y \geq 0 \}$

D compatto, f continua $\stackrel{w}{\Rightarrow}$ max e min esistono



→ Staz. e sing. interni: \emptyset

→ Bordi: sono 2 pezzi

Per il pezzo ① uso la param. $\{ (t, 0) : t \in [-1, 1] \}$

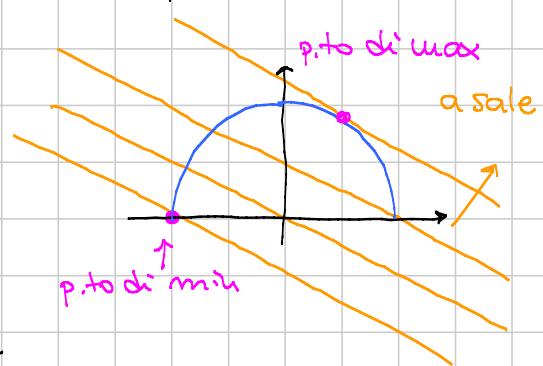
$$f(t, 0) = t \quad \text{che studio per } t \in [-1, 1] \rightsquigarrow \text{trovo } (\pm 1, 0)$$

Sul pezzo 2 vorrei usare i moltiplicatori con $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ ma questa sarebbe tutta la circ.

Questo si può fare MA occorre

- ① scartare i candidati che hanno $y < 0$
- ② includere d'ufficio i "BORDI DEI BORDI", affiamenti detti PUNTI DI TAGLIO, cioè gli estremi del perso di bordo che sto considerando, cioè $(\pm 1, 0)$

Facendo i conti, il p.t.o di max esce dal 2° sistema dei moltiplicatori



Esempio 2 max/min $\{ x - 2y : x^2 - y^3 = 0, x \in [-1, 1] \}$

D compatto con $\text{Int}(D) = \emptyset$

L'equazione di D è $\underbrace{x^2 - y^3 = 0}_{\Phi(x, y)}$

1° sistema : $\begin{cases} \Phi_x = 0 \\ \Phi_y = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x = 0 \\ -3y^2 = 0 \\ x^2 = y^3 \end{cases} \rightsquigarrow \text{ha come soluz. } (0, 0)$

2° sistema $\begin{cases} f_x = \lambda \Phi_x \\ f_y = \lambda \Phi_y \\ \Phi = 0 \end{cases} \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -2 = -3\lambda y^2 \\ x^2 = y^3 \end{cases} \begin{cases} \text{ricavo } x \\ \text{ricavo } y \end{cases}$

Alternativa: diviso le prime 2 equazioni : $-\frac{1}{2} = -\frac{2}{3} \frac{x}{y^2}$
da cui

$$x = \frac{3}{4} y^2$$

sostituisco nella 3a $\frac{9}{16} y^4 = y^3 \rightarrow y = 0 \rightarrow x = 0$

$$\rightarrow y = \frac{16}{9} \rightarrow x = \frac{3}{4} \frac{256}{81} = \frac{64}{27}$$

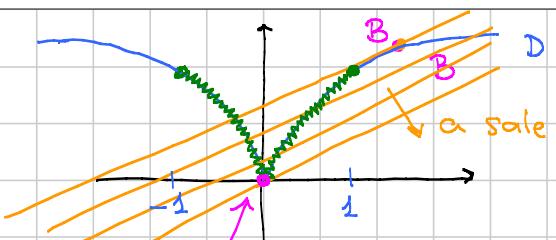
Il secondo candidato è $\left(\frac{64}{27}, \frac{16}{9} \right) = B$

$\uparrow x > 1$

\uparrow eliminato

$$x - 2y = a \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{a}{2}$$

Dove includere d'ufficio i p.ti di taglio
 $(\pm 1, 1)$



Soluzione 1° sistema, in questo caso c'è una cuspidi

Riassumendo ho 3 candidati

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow (1, 1) &\rightsquigarrow f(1, 1) = -1 \\ \rightarrow (-1, 1) &\rightsquigarrow f(-1, 1) = -3 \leftarrow \text{MIN} \\ \rightarrow (0, 0) &\rightsquigarrow f(0, 0) = 0 \leftarrow \text{MAX} \end{aligned}$$

—○—○—

Esercizio 3 Sia A una matrice simmetrica. Sia $q(x) = \langle Ax, x \rangle$ la forma quadratica ad essa associata.

Calcolare max/min di $q(x)$ sui vettori di norma 1, cioè

$$\max / \min \left\{ \underbrace{q(x)}_{\Phi(x)} : \underbrace{\|x\| = 1}_{\nabla} \right\}$$

Una possibile eq. per ∇ è $\|x\| - 1 = 0$, ma meglio è

$$\underbrace{\|x\|^2 - 1}_{\Phi(x,y)} = 0$$

Max e min esistono grazie a Weierstrass. Li cerco via moltiplicatori. Sono $\nabla f(x)$ e $\nabla \phi(x)$ che abbiamo fatto in una lezione precedente:

$$\nabla f(x) = 2Ax \quad (\text{in generale } (A + A^T)x)$$

$$\nabla \phi(x) = 2x$$

1° sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \phi = 0 \\ \phi = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x = 0 \\ \|x\|^2 = 1 \end{array} \right. \quad \text{impossibile}$$

2° sistema

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla \phi \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} Ax = \lambda x \\ \|x\| = 1 \end{cases}$$

Sorprendente: i punti stazionari sono gli autovettori (normalizzati in modo da stare in \mathbb{R}^n) e i corrispondenti moltiplicatori di Lagrange sono i cor. autovalori.

Quando sostituisco in $q(x)$ un autovettore trovo

$$q(x) = \langle Ax, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda$$

In conclusione: \max = max autovettore
 \min = min autovettore

Oss. Studiare \max / \min di $q(x)$ in $\|x\|=1$ è equivalente a studiare \max e \min di

$$R(x) = \frac{q(x)}{\|x\|^2} \quad \text{su tutto } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

↑

Quotiente di REYLEIGH

Basta osservare che $R(\lambda x) = R(x)$ per ogni $\lambda > 0$ quindi R è costante sulle semirette che escono dall'origine

Back to lezione? Sia M una matrice $m \times n$. Trovare la costante di Lip. della funzione $f(x) = Mx$ pensata come $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Sono che $|M(x-y)| \leq L \|x-y\|$ $\forall x, y$
 quindi $Mx - My$

$$L = \max \frac{|Mv|}{\|v\|} \quad v: \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Ma allora

$$L^2 = \max \left\{ \frac{|Mv|^2}{|v|^2} : v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \right\}$$

$$= \max \{ |Mv|^2 : |v|^2 = 1 \}$$

Oss. finale $|Mv|^2 = \langle Mv, Mv \rangle = \underbrace{\langle M^T M v, v \rangle}_{\text{simmetrica}}$

Conclusione: La costante di Lip. è il più grande (in modulo) autovettore della matrice

$$M^T M$$

(che è simmetrica, dunque ha autovettori reali).

Poi va fatta la radice.

ANALISI 2 - LEZIONE 020

Titolo nota

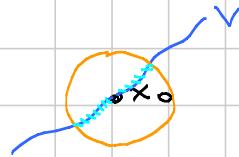
16/10/2015

Moltiplicatori di Lagrange (caso con più moltiplicatori)Setting: $V \subseteq \mathbb{R}^m$ descritto come luogo di zeri di più funzioni

$$V = \{x \in \mathbb{R}^m : \underbrace{\Phi_1(x) = \Phi_2(x) = \dots = \Phi_k(x) = 0}_{k \text{ equazioni che descrivono } V}\}$$

Def. Dato V come sopra e data $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, dico che $x_0 \in V$ è p.t.o di max/min locale per f in V se

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } \underbrace{f(x) \geq f(x_0)}_{\substack{\uparrow \\ \text{caso minimo}}} \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \cap V$$



Teorema (misterioso) Supponiamo che

x_0 sia p.t.o di max/min per f ristretta a V .

Supponiamo che $f(x), \Phi_1(x), \dots, \Phi_k(x)$ siano differenziabili in $B_\delta(x_0)$. Allora x_0 rientra in una di queste due categorie:

→ $\nabla \Phi_1(x_0), \dots, \nabla \Phi_k(x_0)$ sono k vettori LINEARMENTE DIPENDENTI, cioè equivalentemente la matrice che li ha come righe (o colonne) ha rango $\leq k-1$

→ $\nabla f(x_0)$ è combinazione lineare di $\nabla \Phi_1(x_0), \dots, \nabla \Phi_k(x_0)$, cioè esistono numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ t.c.

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla \Phi_1(x_0) + \dots + \lambda_k \nabla \Phi_k(x_0)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono i moltiplicatori

Operativamente :

→ i punti del primo tipo li otengo risolvendo il **1° sistema**

→ i p.ti del secondo tipo li ottengo risolvendo il **2° sistema**

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_k = 0 \quad \leftarrow k \text{ equazioni}$$

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla \Phi_1 + \dots + \lambda_k \nabla \Phi_k \quad \leftarrow n \text{ equazioni, una per componenti}$$

$k+m$ equazioni e $k+m$ incognite (m componenti di x e k moltiplicatori) \Rightarrow ragionevole avere $\#$ finito di soluzioni.

Brutalmente : i p.ti del secondo tipo sono i p.ti in cui è tangente agli insiemi di livello di f .

I pti del 1º tipo sono i pti in cui V può essere "fatto male", cioè avere cuspidi, intersezioni di vari rami, e così via.



Esempi Già con una sola funzione.

$$\phi(x,y) = 0 \quad xy = 0$$

$$\nabla \phi(x, y) = (y, x)$$

L'origine soddisfa il 1° sistema
 $\phi = 0 \quad \nabla \phi = (0, 0)$

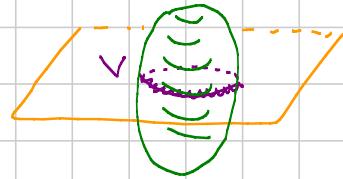
$$\phi(x, y) = 0 \quad x^2 = 0$$

Tutti i punti di V sono soluz. del
lo sistema

Esempio 1 $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + 2y^2 + z^2 = 4}_{\text{ellissoide}}, \underbrace{x+y+z=1}_{\text{piano}}\}$

$$f(x, y, z) = z + x^2$$

max/min di f su V



V è compatto: \rightarrow è limitato perché contenuto in una sfera,
 o ancora meglio nel cubo $[-2, 2]^3$
 \rightarrow è chiuso perché è intersezione di chiusi perché
 sono controimmagine di un pto (chiuso)
 wrt una funzione continua.

$V \Rightarrow$ max e min esistono, quindi basta trovare i candidati

$$\Phi_1(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4 = 0 \quad \Phi_2(x, y, z) = x + y + z - 1$$

1° sistema $\begin{pmatrix} \nabla \Phi_1 \\ \nabla \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 4y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Dico ch. che ha
 range 2 nei pti di V

Se ha range 1 vuol dire che

$$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ 4y - 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{annullamento dei} \\ 3 \text{ minori} \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{stare in } V \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= 2y \\ x &= z \\ z &= 2y \end{aligned} \quad \begin{aligned} x &= z = 2y \\ &\downarrow \text{piano} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{5} & y &= \frac{1}{5} \\ z &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\frac{4}{25} + \frac{2}{25} + \frac{4}{25} = 4 \quad \begin{aligned} &\uparrow \text{Sostituisco nell'ellissoide} \\ \text{NO} \Rightarrow &\text{nessuna soluzione} \end{aligned}$$

2° sistema $\nabla f = \lambda \nabla \Phi_1 + \mu \nabla \Phi_2 \quad f(x, y, z) = z + x^2$

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x + \mu \\ 0 = 4\lambda y + \mu \\ 1 = 2\lambda z + \mu \\ \Phi_1 = \Phi_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} 2^a - 3^a : & 4\lambda y - 2\lambda z = -1 \\ 1^a - 2^a : & 2x = 2\lambda x - 4\lambda y \\ & x = \lambda x - 2\lambda y \end{aligned}$$

Provo ad eliminare λ usando le 2 equ. ottenuto

$$\lambda = \frac{-1}{2(2y-z)} = \frac{x}{x-2y}$$

↑
posso dividere ...

Dividendo nella seconda
devo stare attento a non
perdere soluzioni (nel video
c'è)

Restano 3 equazioni in x, y, z

$$\begin{cases} 2y - x = 2x(2y - z) \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \text{spesso di risolvere}$$

Oss. Supponiamo di avere $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = a \end{cases}$

Quando il 1^o sistema ha soluzione? Quando l'ellisseide è
tangente al piano

—○—

Oss. Le soluzioni del 2^o sistema sono i punti stazionari non
vincolati per la funzione

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x) - \lambda_1 \phi_1 - \dots - \lambda_k \phi_k.$$

—○—○—

ANALISI 2 - LEZIONE 021

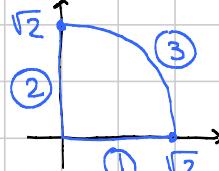
Titolo nota

16/10/2015

Esempio 1 $\max / \min \{ x^2 y : x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0, y \geq 0 \}$ \Rightarrow max e min. esistono

$$\nabla f(x, y) = (2xy, x^2) \text{ i pti stazionari}$$

sono tutti e soli i pti dell'asse y

 \Rightarrow infiniti pti stazionari \rightsquigarrow nessuno stazionario interno! \rightsquigarrow nessun singolare interno

Bordo: 2 ptti con parametrizz., 1 pttro con moltiplicatori

① e ②

③

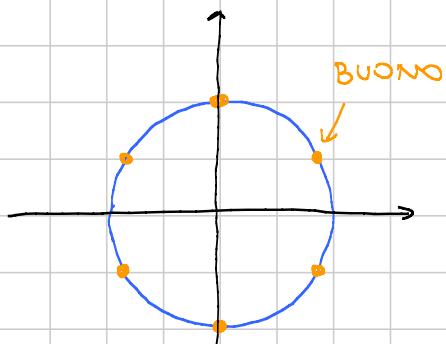
$$\text{① : } \{(t, 0) : t \in [0, \sqrt{2}]\} \quad \text{② : } \{(0, t) : t \in [0, \sqrt{2}]\} \quad \text{su questi ptti } f \equiv 0$$

$$\text{③ } \Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 2 \quad \rightsquigarrow \text{nessuna soluz.} \rightarrow \text{sistema}$$

$$\boxed{2^o \text{ sistema}} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 2xy = \lambda x \\ x^2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} x(y - \lambda) &= 0 \quad \leftarrow 1^o \text{ equ.} \\ x = 0 & \\ \downarrow 3^o \text{ equ.} & \\ y = \lambda & \\ \downarrow 2^o \text{ equ.} & \\ x^2 = 2y^2 & \\ \downarrow 3^o \text{ equ.} & \\ 3y^2 = 2 & \\ \downarrow & \\ y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} & \end{aligned}$$

$$x^2 = \frac{4}{3} \quad x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow \left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}, \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)$$



4 pti

In conclusione nel vostro caso i candidati sono

→ tutti i p.ti dei perni ① e ② $\rightsquigarrow f(x,y) = 0$

→ il p.to $(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$ $\rightsquigarrow f(\dots, \dots) = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$

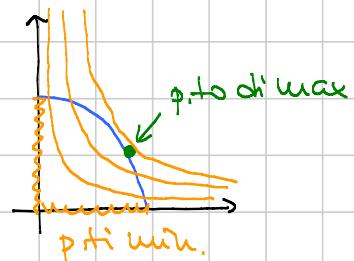
$$\text{Max} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \quad \text{p.to di max} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\text{min} = 0$$

p.ti di min = tutti i p.ti dei perni ① e ②

Linee di livello: $x^2y = \lambda$

$$y = \frac{\lambda}{x^2}$$



Esempio 1-bis max/min $\{ x^2y + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 : (x,y) \in \text{insieme di prima} \}$

Se imposto il sistema con i moltiplicatori, vengono LHS omibili.

In realtà però

$$\underbrace{x^2y + x^4 + 2x^2y^2 + y^4}_{f(x,y)} = x^2y + (x^2 + y^2)^2 = \underbrace{x^2y + 4}_{\text{circonferenza}} \text{ sulla}$$

$$\hat{f}(x,y)$$

sulla circonferenza

Tecnica di SOSTITUZIONE DEL VINCOLO: "semplificare" la funzione f da studiare trovando una funzione più semplice che coincide con f nei p.ti di V .

Ovviamente cambia la parte stationari e singolari interni.

Nell'esempio si può procedere così

min = 0 con unico p.to di min $(0,0)$. Infatti $f(0,0) = 0$ e per ogni altro (x,y) si ha

$$f(x,y) = \underbrace{x^2y}_{\geq 0} + (x^2 + y^2)^2 \geq (x^2 + y^2)^2 > 0$$

Se $(x,y) \neq (0,0)$

$\max = f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ con unico p.t. di max.

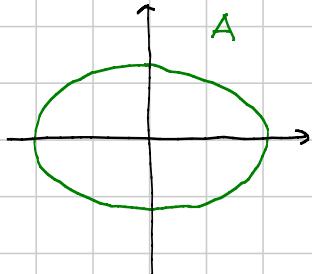
Infatti per ogni altro p.t.

$$f(x, y) = \underbrace{x^2 y}_{\leq \text{valore}} + \underbrace{(x^2 + y^2)^2}_{\leq 4} < f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right).$$

nel. p.t.
 $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

Oss. Se il problema fosse stato $\max / \min \{x^2 y + \dots : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ conveniva fare i moltiplicatori su $\hat{f}(x, y)$ invece che su $f(x, y)$.

Esempio 2 $\max / \min \{ |x^2 - y| : \underbrace{x^2 + 2y^2 \leq 5}_{\text{ellisse}} \}$



Valore assoluto nei p.t. singolari interni

A è compatto: \rightarrow limitato perché $A \subseteq [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]^2$
 \rightarrow chiuso perché contorno immagine di $(-\infty, 5]$ che è un chiuso

\Rightarrow max e min esistono.

Semplificazione: STUDIO SENZA IL VALORE ASSOLUTO
e poi deduco

$g(x, y) = x^2 - y \rightsquigarrow$ niente staz. e sing. interni

Bordo: 1° sistema non ha soluzioni

$$2^{\circ} \text{ sistema} \begin{cases} g_x = \lambda \phi_x \\ g_y = \lambda \phi_y \\ x^2 + 2y^2 = 5 \end{cases} \begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ -1 = 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 5 \end{cases}$$

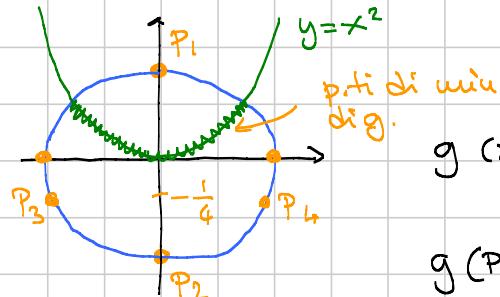
$$2^{\text{a}} \text{ equ} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{4y} \Rightarrow 2x = 2\left(-\frac{1}{4y}\right)x; 4xy = -x$$

2^a equ.

$$x=0 \Rightarrow y^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$4y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + \frac{2}{16} = 5 \Rightarrow \text{trovo } x^2 = \frac{78}{16}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{19}}{4}$$



$$g(x,y) = x^2 - y$$

$$g(P_1) = -\frac{\sqrt{5}}{2} \quad g(P_2) = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$g(P_3) = g(P_4) = \frac{78}{16} + \frac{1}{4} = \frac{82}{16} \quad \text{max di } g$$

$$\max f = \frac{82}{16} \quad (\text{che ha battuto } \frac{\sqrt{5}}{2}) \quad \text{pti di max: } P_3 \text{ e } P_4$$

$\min f = 0$ pti di min: gli infiniti pti in cui si annulla $g(x,y)$, cioè tutti i pti della parabola $y = x^2$ che cascano nell'ellisse.

Esempio 3 $f(x,y,z,w) = \frac{x^2 y z^2}{x^4 + y^4 + z^4 + w^4}$

Limite di f per $(x,y,z,w) \rightarrow (0,0,0,0)$

Due appross: introduco coord. polari in \mathbb{R}^4 oppure

$$|f(x,y,z,w)| = |x| \underbrace{\left| \frac{xyz^2}{x^4 + y^4 + z^4 + w^4} \right|}$$

Se fosse $\leq M$ per

$(x,y,z,w) \neq (0,0,0,0)$ concluderemmo i carabinieri

La funzione (2^a) è omogenea di grado, quindi

$$\max \{ g(x) : x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \} = \max \{ g(x) : x^4 + y^4 + z^4 + w^4 = 1 \}$$

$x \in \mathbb{R}$ per Weierstrass.

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 022

Titolo nota

20/10/2015

Max e min su insiemi non compatti $f: A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n$ $\inf / \sup / \max / \min \{ f(x) : x \in A \}$ TEOREMA (Weierstrass generalizzato)Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è continua(ii) esiste un sottolivello non vuoto e compatto, cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$K_M = \{ x \in D : f(x) \leq M \} \leftarrow \text{sottolivello}$$

è non vuoto e compatto.

Allora

$$\min \{ f(x) : x \in D \}$$

esiste per forza.

Oss. Se voglio che esista il max, basta usare il sopralivelloDim. Per W. classico esiste

$$\min \{ f(x) : x \in K_M \}$$

Sia x_0 un p.t. di minimo in K_M . Dico che x_0 è p.t. di min.per tutto D . Infatti:

- Se $x \in K_M$, allora $f(x) \geq f(x_0)$ (per def. di x_0)
- Se $x \in D \setminus K_M$, allora

$$f(x) > M \geq f(x_0).$$

per def. di
KM

perché $x \in KM$

Quindi in ogni caso

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in D.$$

□

Corollario Supponiamo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua e

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Allora esiste il minimo.

Dim. Basta dim. che esiste un sottolivello non vuoto e compatto.

Scelgo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a caso (ad esempio $x_0 = 0$) e pongo

$$M = f(x_0).$$

Il corrispondente sottolivello è

- $\neq \emptyset$ perché contiene x_0 ,
- chiuso perché controimmagine di un chiuso $(-\infty, M]$
- limitato perché per definizione di limite

$$\exists R > 0 \text{ t.c. } f(x) \geq M+1 \quad \forall x \text{ t.c. } |x| \geq R$$

quindi

$$K_M \subseteq B_R(0)$$

Conclusione $K_M \neq \emptyset$ e compatto. \square

— o — o —

Esempio 1 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 \quad D = \mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{c} f(x, y) \geq x^2 + 2y^2 \\ \downarrow \\ +\infty \end{array}$$

Siamo nelle ipotesi del corollario \Rightarrow minimo esiste (si vede a occhio che è in $(0, 0)$).

Dal limite segue anche che $\sup = +\infty$.

Esempio 1-bis $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + \frac{1}{x} \sin x \quad D = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ (banalmente) e il min. esiste perché

$$f(x, y) \geq x^2 + 2y^2 - \frac{1}{x} \quad \text{e quindi siamo nelle ip. del coroll.}$$

Esempio 2

$$f(x,y) = x^2 - 2y^2 \quad D = \mathbb{R}^2$$

$$\sup = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 = +\infty$$

$$\inf = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0,t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -2t^2 = -\infty$$

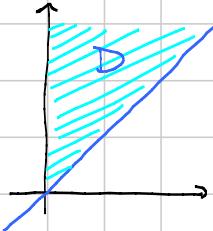
Esempio 3

$$f(x,y) = x^2 - 2y^2 \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq x\}$$

$$\inf = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0,t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -2t^2 = -\infty$$

Dico che esiste max e vale 0



1° modo Dimostrazione diretta

$$f(x,y) \leq x^2 - 2x^2 = -x^2 \leq 0 \quad \text{per ogni } (x,y) \in D$$

\uparrow
 $y \geq x$

e vale il segno di uguale se e solo se $y = x = 0$

2° modo Se voglio usare w. gen. devo dimostrare che

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in D}} f(x,y) = -\infty$$

Come lo dimostro? Vevo almeno 2 possibilità

$$\begin{aligned} \text{I} \quad \text{Coord. polari:} \quad f(x,y) &= \rho^2 (\cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta) \\ &= \rho^2 (1 - 3 \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

Ora $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ e quindi $\frac{1}{2} \leq \sin^2 \theta \leq 1$, ma allora

$$\underbrace{f(x,y)}_{-\infty} \leq \rho^2 \left(1 - \frac{3}{2}\right) = \underbrace{-\frac{1}{2} \rho^2}_{-\infty}$$

2) Truccoso : $f(x, y) = x^2 - 2y^2$

$$\begin{aligned}
 &= \underbrace{x^2 - y^2}_{\leq 0} - \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} y^2 \\
 &\leq -\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} y^2 \\
 &\quad \uparrow y \geq x \\
 &\leq -\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 \\
 &= -\frac{1}{2} (x^2 + y^2) \\
 &\quad \downarrow -\infty
 \end{aligned}$$

valgono solo perché siamo in D

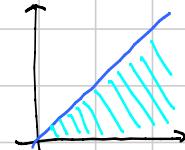
Una volta che so che max esiste, allora il p.to di max si trova nelle solite 3 categorie

→ staz. e sing. interne non esistono

→ bordo è fatto da 2 parti
 ① $\{(0, t) : t \geq 0\}$
 ② $\{(t, 0) : t \geq 0\}$

Esempio 4 $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x\}$

Sup = $+\infty$ $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t, 0) = +\infty$



inf = $-\infty$ $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} -t^2 = -\infty$

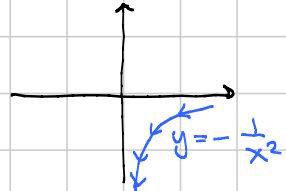
Esempio 5 $f(x, y) = x^2 + \arctan(xy)$ $D = \mathbb{R}^2$

Sup = $+\infty$ $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t, 0) = +\infty$

che è l'inf. teorico

inf ≤ 0 perché $f(0, 0) = 0$ Punto $\alpha = -\frac{\pi}{2}$: seno \times molto vicino a 0, e $xy \sim -\infty$

$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, -\frac{1}{t^2}) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 + \arctan(-\frac{1}{t}) = -\frac{\pi}{2}$



Esempio 6 Dimostrare la diseguaglianza tra media aritmetica e quadratica

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

O equivalentemente

$$x_1 + \dots + x_n \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Abbiamo 2 opzioni basate sul fatto che è omogenea.

$$\rightarrow \text{Fare } \max \left\{ \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} : \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} = 1 \right\}$$

$$\rightarrow \text{Fare } \min \left\{ x_1^2 + \dots + x_n^2 : x_1 + \dots + x_n = 1 \right\}$$

La prima è migliore perché il vincolo è compatto, quindi max esiste. A quel punto uso i moltiplicatori

$$\nabla f = \lambda \nabla \phi$$

$$\begin{aligned} 1 &= 2\lambda x_1 \\ 1 &= 2\lambda x_2 \\ &\vdots \\ 1 &= 2\lambda x_m \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} 1 &= 2\lambda x_1 \\ 1 &= 2\lambda x_2 \\ &\vdots \\ 1 &= 2\lambda x_m \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1 = \dots = x_m \quad \text{e a quel punto li trovo con il vincolo.}$$

—○—○—

ANALISI

2

LEZIONE 023

Titolo nota

16/10/2015

Esercizio (TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA)

Dimostrare che ogni polinomio a coeff. complessi ammette almeno una radice complessa

Dim. Road map \rightarrow formulare in termini di max/min
 \rightarrow fare vedere che il min esiste
 \rightarrow fare vedere che solo o più esser min.

$$p(z) = a_m z^m + \dots + a_1 z + a_0$$

lo trasformo in una funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = |p(x+iy)|$$

↑ modulo del numero complesso

A questo punto fesi $\Leftrightarrow \min \{ f(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \} = 0$

Detto (x_0, y_0) un pto di min. si avrà che

$$\underbrace{f(x_0 + iy_0)}_{z_0} = 0$$

Passo 1 Dimostriamo che il minimo esiste (w.generizzato)

Intanto $f(x, y)$ è continua in \mathbb{R}^2 .

Mostriamo che

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$$

Tomiamo al polinomio, che wlog possiamo pensare monico

$$|p(z)| = |z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0|$$

$$|p(z)| = |z^m| \cdot \underbrace{\left| 1 + \frac{a_{m-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{m-1}} + \frac{a_0}{z^m} \right|}_{|z|^m} \geq 1 - \frac{|a_{m-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_1|}{|z|^{m-1}} - \frac{|a_0|}{|z|^m}$$

Ho usato una proprietà dei moduli, cioè
la diseguaglianza triangolare

$$|p(z)| \geq |z|^m \left(1 - \frac{|a_{m-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_0|}{|z|^m} \right)$$

Quando $x^2+y^2 \rightarrow +\infty$, anche $|z| \rightarrow +\infty$ (occhio: $|z| = \rho$)

quindi $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} |p(z)| = +\infty$

Per W. generalizzato il min. esiste.

Passo 2 Dimostriamo che il minimo è 0. Se per assurdo non fosse 0, facciamo vedere con uno STUDIO LOCALE che si può scendere.

Wlog possiamo assumere che un p.t. di minimo sia $(0,0)$ ($z_0 = 0$)
(se così non fosse considero il nuovo polinomio $p(z - z_0)$)

$$p(z) = \underbrace{b_0}_{\neq 0} + \underbrace{b_k}_{\text{primo coeff successivo}} z^k + b_{k+1} z^{k+1} + \dots + b_m z^m$$

o al essere $\neq 0$.

$\in \mathbb{C}$

Ora considero i valori di z del tipo $t w$ con t piccolo reale

$$p(tw) = b_0 + b_k t^k w^k + o(t^k)$$

Scelgo $w \in \mathbb{C}$ in maniera tale che $b_k w^k = -b_0$, cioè

$$w^k = -\frac{b_0}{b_k}$$

(ho diviso per $b_k \neq 0$ e basta saper fare le radici k -esime, per le quali c'è una teoria elementare)

Dallo w_0 questo w appena scelto, abbiamo

$$p(tw_0) = b_0 - b_0 t^k + o(t^k) = (1-t^k)b_0 + o(t^k)$$

e quindi

$$|p(tw_0)| = |(1-t^k)b_0 + o(t^k)| \leq (1-t^k)|b_0| + |o(t^k)|$$

trivagolare

↓

$< |b_0|$ per t piccolo

$$(1-t^k)|b_0| + |o(t^k)| = |b_0| - t^k|b_0| + o(t^k) < |b_0|$$

per studio locale.

—○—○—

Oss. Abbiamo dimostrato un risultato più forte: dato $p \in \mathbb{C}[z]$ se $z_0 \in \mathbb{C}$ non è una radice, allora c'è una direzione che esce da z_0 nella quale $|p(z)|$ decresce.

Quindi le radici di $p(z)$ sono tutti e soli i p.ti di min. loc. per la funzione $|p(z)|$.

—○—○—

Esercizio Calcolare sup / max di $\underline{x^2 + y^2 + z^2}$
sull'insieme

$f(x, y, z)$

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, xyz = 3\}$$

Capiamo come è fatto D :

→ è chiuso perché è intersezione di 4 chiusi

→ non è limitato perché $(1, n, \frac{3}{m}) \in D$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
e la notma $\rightarrow +\infty$

\Rightarrow addio w .

Perciò abbiamo già dim. che $\sup = +\infty$. Infatti

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \underbrace{f(1, t, \frac{3}{t})}_{\in D} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + t^2 + \frac{9}{t^2} = +\infty$$

Ora $\lim_{\substack{x^2+y^2+z^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y,z) \in D}} f(x,y,z) = +\infty$ perché lo è anche senza la condizione $(x,y,z) \in D$

In generalizzato \Rightarrow esiste il minimo, che posso calcolare con i moltiplicatori o la parametrizzazione

$$\nabla f = \lambda \nabla \phi \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x = \lambda yz \quad \cdot x \\ 2y = \lambda xz \quad \cdot y \\ 2z = \lambda xy \quad \cdot z \\ xy^2 = 3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 2x^2 = \lambda xyz = 3\lambda \\ 2y^2 = \quad \quad \quad = 3\lambda \\ 2z^2 = \quad \quad \quad = 3\lambda \end{array}$$

Quindi $x=y=z = \sqrt[3]{3}$ e questo è l'unico p.t. di minimo.

Con la parametrizz. l'ho ritrovato $z = \frac{3}{xy}$ e mi riducevo

$$\alpha \min \left\{ x^2+y^2+\frac{9}{xy^2} : \underbrace{x \geq 0, y \geq 0}_{\text{vincolo non compatto.}} \right\}$$

— o — o —

Titolo nota

21/10/2015

FUNZIONI CONVESSE PIÙ VARIABILI

Def. Sia V uno sp. vettoriale. Un sottoinsieme $C \subseteq V$ si dice **convesso** se

$$\forall x \in C \quad \forall y \in C \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in C$$

Segmento di estremi x e y

Def. Sia $C \subseteq V$ convesso e sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$.

La funzione f si dice **convessa** se

$$\forall x \in C, \forall y \in C, \forall \lambda \in [0, 1] \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

La funzione f si dice **strettamente convessa** se vale < quando $x \neq y$ e $\lambda \in (0, 1)$.

Lemma Se $C \subseteq V$ è convesso, $(x_1, \dots, x_n) \in C^n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$ tali che $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, allora

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in C$$

comb. convessa di x_1, \dots, x_n

Dim. Induzione su m . $[m=2]$ è da def.

$$\boxed{m-1 \Rightarrow m} \quad \text{wlog } \lambda_m \neq 1. \quad \text{Allora}$$

comb. conv. di $x_1, \dots, x_{m-1} \Rightarrow \in C$

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{m-1} x_{m-1} + \lambda_m x_m = \left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_m} x_1 + \dots + \frac{\lambda_{m-1}}{1-\lambda_m} x_{m-1} \right) (1-\lambda_m) + \lambda_m x_m$$

— o — o —

Teorema (Jensen negli sp. vettoriali) Sia $C \subseteq V$ convesso, sia $m \geq 2$, sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa, siano $(x_1, \dots, x_n) \in C^m$, siano $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^m$ t.c. $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$.

Allora

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

Dim. Come ad analisi 1, a partire dalla riga precedente. \square

— o — o —

Teoria base delle funzioni convesse di 1 variabile

Convessità vs continuità

- f è continua in $\text{Int}(C)$
- f è loc. lip. in $\text{Int}(C)$

Convessità vs derivata prima Supponiamo f derivabile in $\text{Int}(C)$

Allora

f convessa $\Leftrightarrow f'(x)$ deb. cresc. in $\text{Int}(C)$

f strett. conv. $\Leftrightarrow f'(x)$ strett. cresc. in $\text{Int}(C)$

Convessità vs derivata seconda Supponiamo $f''(x)$ esiste in $\text{Int}(C)$

Allora

f convessa $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \text{Int}(C)$

f strett. conv. $\Leftrightarrow f''(x) > 0 \quad \forall x \in \text{Int}(C)$

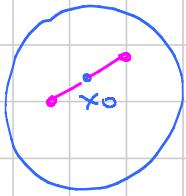
$\text{l'altra è falsa, solo } \geq$

— o — o —

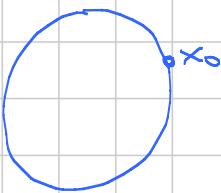
Moralmente il quadro è analogo in \mathbb{R}^m .

— o — o —

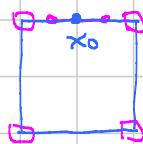
Def. Sia $C \subseteq V$ un insieme convesso. Un punto $x_0 \in C$ si dice punto estremale se non sta nell'interno di nessun segmento con estremi in C \uparrow
non sul bordo.

Esempi

x_0 estremale



x_0 non estremale



- I punti estremali sono per forza su ∂C
- I pti estremali di $B_r(x_0)$ sono il bordo
- I pti estremali di un poligono sono solo i vertici.

Proposizione Se $C \subseteq \mathbb{R}^m$ è convesso e compatto, e $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e convessa,

allora il max (che esiste per W.) è assunto almeno in un pto estremale.

(Almeno uno dei pti di max è estremale)

Dim. In una variabile una funzione convessa assume il max agli estremi di un intervallo.

Ripetendo il ragionamento sui segmenti che contingono x_0 segue la tesi. \square

— o — o —

Fatto: La convessità, anche in \mathbb{R}^m , è una faccenda unidimensio-
niale, cioè $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa se e solo se
sono convesse le sue restrizioni alle rette.

Detto meglio, i seguenti fatti sono equivalenti:

- (1) f è convessa in C
- (2) $\forall x_0 \in C, \forall v \in \mathbb{R}^m, \varphi(t) := f(x_0 + tv)$ è convessa
per i valori di t per cui è definita
- (3) $\forall x_0 \in C, \forall y_0 \in C$, la funzione
 $\varphi(t) = f(x_0 + t(y_0 - x_0))$
è convessa in $[0, 1]$.

Diu. \square (1) \Rightarrow (3) Dico di dimostrare che

$$\varphi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leq \lambda \varphi(t_1) + (1-\lambda)\varphi(t_2)$$

S

Ora $\varphi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) = f(x_0 + \underbrace{\lambda t_1 (x_1 - x_0)}_{P} + \underbrace{(1-\lambda)t_2 (x_1 - x_0)}_{Q})$

$$\varphi(t_1) = f(x_0 + \underbrace{t_1 (x_1 - x_0)}_{P})$$

$$\varphi(t_2) = f(x_0 + \underbrace{t_2 (x_1 - x_0)}_{Q})$$

$$\lambda P + (1-\lambda)Q = \underbrace{\lambda x_0 + \lambda t_1 (x_1 - x_0)}_{S} + \underbrace{(1-\lambda)x_0 + (1-\lambda)t_2 (x_1 - x_0)}_{(1-\lambda)Q}$$

$$f(S) \leq \lambda f(P) + (1-\lambda) f(Q)$$

(3) \Rightarrow (1) La tesi è che f è convessa quindi

$$f(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1) \leq \lambda f(x_0) + (1-\lambda) f(x_1)$$

$\varphi(\lambda)$ $\varphi(0)$ $\varphi(1)$

So per ipotesi che $\varphi(t) = f(x_0 + t(x_1 - x_0))$ è convessa

Spero che LHS sia $\varphi(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1) = \varphi(1-\lambda)$

$$\begin{aligned} \varphi(1-\lambda) &= f(x_0 + (1-\lambda)(x_1 - x_0)) = f(x_0 + x_1 - x_0 - \lambda x_1 + \lambda x_0) \\ &= f(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1). \end{aligned}$$

— o — o —



$$f(P) \leq \lambda f(x_0) + (1-\lambda) f(x_1)$$

$$\lambda = \frac{|x_1 - P|}{|x_1 - x_0|}$$

— o — o —

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^m$ un sottoinsieme qualunque e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Si dice che f è localmente limitata in D se solo se

$$\forall K \subseteq \text{Int}(D) \quad \exists M \text{ t.c. } |f(x)| \leq M \quad \forall x \in K$$

↑
compatto

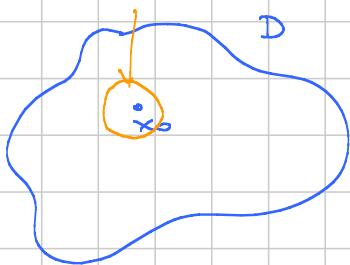
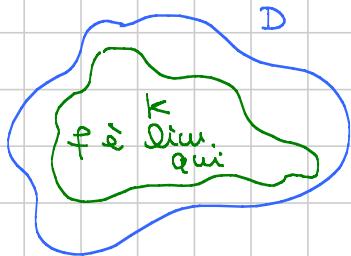
Prop. Nelle ipotesi di sopra, sono fatti equivalenti

$$(1) \quad \forall K \subseteq \text{Int}(D) \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in K \quad |f(x)| \leq M$$

$$(2) \quad \forall x_0 \in \text{Int}(D) \quad \exists r > 0 \text{ t.c. } \overline{B}_r(x_0) \subseteq \text{Int}(D) \quad \exists M \in \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \overline{B}_r(x_0) \quad |f(x)| \leq M.$$

f limitata qui



ANALISI 2

-

LEZIONE 025

Titolo nota

21/10/2015

Dim. prop. fine ora precedente(1) \Rightarrow (2) è ovvio perché $\overline{B}_r(x_0)$ è un compatto(2) \Rightarrow (1) Sia $K \subseteq \text{Int}(D)$ compatto. $\forall x_0 \in K$ esiste $r > 0$ t.c. f è limitata in $\overline{B}_r(x_0)$.Ma $\{B_r(x_0) : x_0 \in K\}$ è un ricoprimento aperto di K , quindi esiste un sottoricoprimento finito

$$K \subseteq B_{r_1}(x_1) \cup B_{r_2}(x_2) \cup \dots \cup B_{r_n}(x_n)$$

Siano M_1, \dots, M_n le costanti che limitano $|f(x)|$ in queste palle, allora

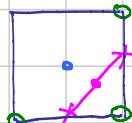
$$f(x) \leq \max \{M_1, \dots, M_n\} \quad \forall x \in K.$$

 $\longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow$ Teorema Sia $C \subseteq \mathbb{R}^m$ un convesso e sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa.Allora f è loc. limitata dall'alto in $\text{Int}(C)$.

(Non sappiamo ancora che è continua)

Dim. Basta dimostrare che è limitata nei cubetti che contengono un punto p.t.Detto meglio: $\forall x_0 \in \text{Int}(C)$, f è limitata dall'alto in almeno un cubetto con centro in x_0 .

Questo è vero perché i p.t. estremali sono un numero finito.

 $\longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow$ 

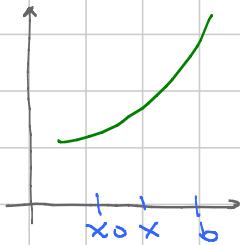
LA PARTE QUI SOTTO È RIFATTA MEGLIO ALLA
LEZIONE 26 ↓

Teorema $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.

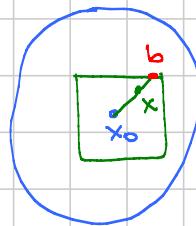
Allora f è continua in $\text{Int}(C)$

Dim.

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right| \\ &\leq \left| \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} \right| |x - x_0| \end{aligned}$$



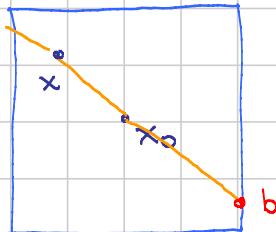
$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{|x - x_0|} |x - x_0|}_{\leq \frac{f(b) - f(x_0)}{|b - x_0|} |x - x_0|} \\ &\leq \underbrace{\frac{M - f(x_0)}{|b - x_0|}}_{\text{Fisso}} \cdot |x - x_0| \end{aligned}$$



A questo punto faccio tendere $x \rightarrow x_0$ però mi serve il valore assoluto, cioè vorrei

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{M - f(x_0)}{|b - x_0|} |x - x_0|$$

Prendo il b dalla parte in cui si realizza il massimo sul segmento, e a quel p.t. il numeratore è positivo.

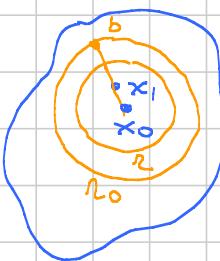


— o — o —

Teorema $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa \Rightarrow localmente lipschitziana

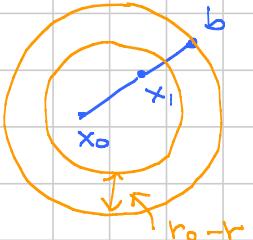
Dim. Prendo due raggi $0 < r < r_0$ t.c.

$\overline{B}_{r_0}(x_0) \subseteq \text{Int}(C)$



Ora sappiamo che in $\bar{B}_{r_0}(x_0)$ $f(x)$ ammette massimo M e minimo m , per la continuità appena "dimostrata". Allora per ogni x_0 e x_i in $B_r(x_0)$ avremo che

$$\begin{aligned} |f(x_i) - f(x_0)| &= \frac{|f(x_i) - f(x_0)|}{|x_i - x_0|} |x_i - x_0| \\ &\leq \frac{|f(b) - f(x_0)|}{|b - x_0|} |x_i - x_0| \\ &\leq \frac{M - m}{r_0 - r} |x_i - x_0| \end{aligned}$$



FINE PARTE RIFATTA
(MEGLIO?) ALLA LEZ. 26

Monotonia del gradiente

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $g: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione.

Si dice che g è monotona se

$$\langle g(y) - g(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in D \quad \forall y \in D$$

↑
se > quando $x \neq y$ allora è
strettamente monotona

Teorema $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile.

Allora

f è convessa $\Leftrightarrow \nabla f(x)$ è monotono

Dim. \Rightarrow Dico dimostrare che

$$\langle \nabla f(x_1) - \nabla f(x_0), x_1 - x_0 \rangle \geq 0 \quad \forall x_0 \in C, \forall x_1 \in C$$

Considero $\varphi(t) = f(x_0 + t(x_1 - x_0))$

Allora φ è convessa e derivabile, quindi $\varphi'(1) \geq \varphi'(0)$

$$\text{Ma} \quad \varphi'(t) = \langle \nabla \varphi(x_0 + t(x_1 - x_0)), x_1 - x_0 \rangle \text{ per chain rule}$$

$$\langle \nabla f(x_0), x_1 - x_0 \rangle \leq \langle \nabla f(x_1), x_1 - x_0 \rangle$$

Porto al RHS e ho la tesi.

← Basta dimostrare che tutte le $\varphi(t)$ come sopra sono convesse in $[0, 1]$. Essendo φ derivabile basta far vedere che $\varphi'(t)$ è debolmente crescente, cioè

$$\underbrace{\langle \nabla \varphi(x_0 + t_2(x_1 - x_0)), x_1 - x_0 \rangle}_{\varphi'(t_2)} \geq \underbrace{\langle \nabla \varphi(x_0 + t_1(x_1 - x_0)), x_1 - x_0 \rangle}_{\varphi'(t_1)}$$

per ogni $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$.

Se porto tutto a sx ho

$$\left\langle \nabla f \underbrace{(x_0 + t_2(x_1 - x_0))}_a - \nabla f \underbrace{(x_0 + t_1(x_1 - x_0))}_b, \frac{x_1 - x_0}{(t_1 - t_2)(b - a)} \right\rangle \geq 0$$

e quindi segue dalla monotonia del gradiente.

In una variabile le funzioni convesse stanno sopra le loro tangenti (se esistono).

A livello di $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = f(x_0 + t(x_1 - x_0))$$

$$\varphi(1) \geq \varphi(0) + 1 \cdot \varphi'(0)$$

$$f(x_1) \geq \underbrace{f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x_1 - x_0 \rangle}_{\text{equazione del piano tangente nel punto } x_0}$$

$$f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$$

Le funzioni concesse stanno sopra il piano tangente.

ANALISI 2

LEZIONE 026

Titolo nota

23/10/2015

Convessità vs Continuità in più variabili $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa
 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ connesso

ROAD MAP

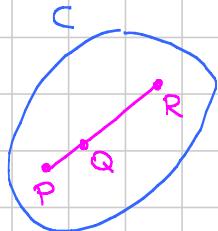
- ① f è loc. limitata dall'alto in $\text{Int}(C)$
- ② f è continua in $\text{Int}(C)$
- ③ f è loc. limitata dall'alto e dal basso in $\text{Int}(C)$
- ④ f è loc. lipschitziana in $\text{Int}(C)$

- ① Segue dal fatto che f essendo convessa è limitata dall'alto sui cubi che hanno # finito di p.ti estremali (2^n in \mathbb{R}^n)
- ③ Segue dal p.to ② e dal teo. di Weierstrass.

Lemma (dei 3 rapporti incrementali) Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ connesso, e sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.

Siamo P, Q, R tre p.ti di C , con Q che sta sul segmento PR .

Allora



$$\frac{f(Q) - f(P)}{|Q-P|} \leq \frac{f(R) - f(P)}{|R-P|} \leq \frac{f(R) - f(Q)}{|R-Q|}$$

Dim. Considero $\varphi(t) := f(P + t(R-P))$ $t \in [0,1]$
È una funzione convessa.

$$\varphi(0) = f(P)$$

$$\varphi(1) = f(R)$$

$$\varphi(t_0) = f(Q) \text{ con } t_0 = \frac{|Q-P|}{|R-P|} \quad (\text{N.B. } 1-t_0 = \frac{|R-Q|}{|R-P|})$$

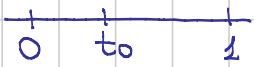
Scrivo il lemma dei 3 rapporti per la $\varphi(t)$:

$$\frac{f(t_0) - f(0)}{t_0} \leq \frac{f(1) - f(0)}{1} \leq \frac{f(1) - f(t_0)}{1-t_0}$$

"

"

"



$$\frac{f(Q) - f(P)}{|Q-P|} \leq \frac{f(R) - f(P)}{1} \leq \frac{f(R) - f(Q)}{|R-Q|}$$

Divido e ho la tesi.

□

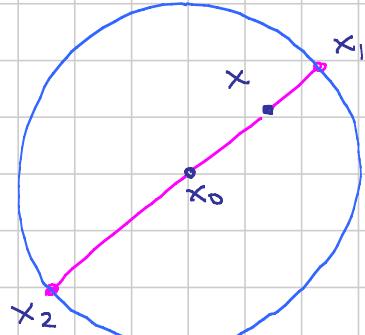
— o — o —

② f è continua in $\text{Int}(C)$

Dim. Prendo $x_0 \in \text{Int}(C)$ e scelgo $r_0 > 0$ t.c.

$$\overline{B_{r_0}(x_0)} \subseteq \text{Int}(C)$$

Per il punto ① sappiamo che $f(x)$ è limitata dall'alto in $\overline{B_{r_0}(x_0)}$, diciamo $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c.



$$f(x) \leq M \quad \forall x \in \overline{B_{r_0}(x_0)}$$

Prendo un qualunque $x \neq x_0$ nella palla.Applico il lemma dei 3 rapporti con $P = x_0$, $Q = x$, $R = x_1$.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{|x - x_0|} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{|x_1 - x_0|} \leq \frac{M - f(x_0)}{r_0}$$

Applico ora il lemma con $P = x_2$, $Q = x_0$ ed $R = x$:

$$\frac{f(x_0) - M}{r_0} \leq \frac{f(x_0) - f(x_2)}{|x_0 - x_2|} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{|x - x_0|}$$

Abbiamo dim. che

$$-\frac{M - f(x_0)}{r_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{|x - x_0|} \leq \frac{M - f(x_0)}{r_0}$$

cioè

$$\boxed{\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq \frac{M - m}{r_0}}$$

Porto $|x - x_0|$ al RHS e passo al limite per $x \rightarrow x_0$ e ho dim. la continuità in x_0 .

— o — o —

Oss. A seconda del segno di $f(x) - f(x_0)$ basta fare una delle 2 scelte

$$x_0 - x - x_1 \quad \text{oppure} \quad x_2 - x_0 - x$$

— o — o —

④ Sia $x_0 \in \text{Int}(C)$ e siamo $0 < r_1 < r_0$ t.c.

$\overline{B}_{r_0}(x_0) \subseteq \text{Int}(C)$. Allora $f(x)$ ha massimo M e minimo m in $\overline{B}_{r_0}(x_0)$ e

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{M - m}{r_0 - r_1} |y - x|$$

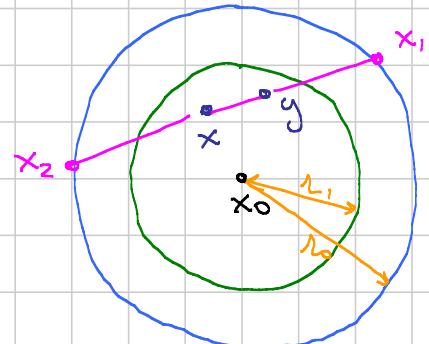
(lip. di $f(x)$ in $\overline{B}_{r_1}(x_0)$)

per ogni x e y in $\overline{B}_{r_1}(x_0)$.

[Dim.]

Uso il solito lemma con $x - y - x_1$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{|y - x|} \leq \frac{f(x_1) - f(y)}{|x_1 - y|} \leq \frac{M - m}{r_0 - r_1}$$



Questo dimostra la tesi se num. del LHS è ≥ 0 .

Uso il solito lemma con $x_2 - x - y$:

$$\frac{m - M}{r_0 - r_1} \leq \frac{f(y) - f(x_2)}{|y - x_2|} \leq \frac{f(y) - f(x)}{|y - x|}$$

pensaci bene!

Num. potenzialmente negativi !!!!!

Conclusione come nel caso di ②

Oss. Dimostriamo per bene che $|x_i - y| \geq r_0 - r_1$

Dim. $r_0 = |x_i - x_0| = |(x_i - y) + (y - x_0)| \leq$ (triangolare)

$$\leq |x_i - y| + |y - x_0| \leq |x_i - y| + r_1$$

Porto r_1 al LHS e concluso.

— o — o —

Convessità e derivate seconde $C \subseteq \mathbb{R}^m$ convesso, $f: C \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo che $f \in C^2(\text{Int}(C))$.

Allora

f è convessa $\Leftrightarrow Hf$ è semidefinita positiva in $\text{Int}(C)$

Dim. Basta dimostrare che le funzioni $\varphi(t) = f(x_0 + t v)$ sono convesse dove definite.

Essendo le funzioni φ di classe C^2 , sono convesse se e solo se $\varphi''(t) \geq 0$.

Basta dimostrare che

$$\varphi''(t) = \langle Hf(x_0 + t v) v, v \rangle$$

matrice vettori

Questo si può vedere calcolando le derivate con la chain-rule o più brevemente usando Taylor.

Mettiamo in un p.t.o. t_0

$$\varphi(t_0 + R) = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0) R + \frac{1}{2} \varphi''(t_0) R^2 + O(R^2)$$

$$\varphi(x_0 + t_0 v + R v) = \varphi(y_0) + \langle \nabla f(y_0), v \rangle R + \frac{1}{2} \langle Hf(y_0) v, v \rangle R^2$$

$$\varphi(y_0 + k) = \varphi(y_0) + \langle \nabla f(y_0), k \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(y_0) k, k \rangle + O(|k|^2)$$

— o — o —

La dimostrazione che

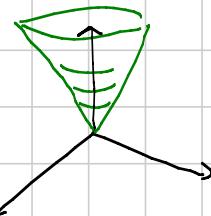
f strett. convessa \Leftrightarrow Hf definito pos. in $\text{Int}(C)$

è esattamente la stessa.

— o — o —

Esempio (non banale) $f(x) = |x|$

Questa è convessa, ma non è nemmeno C^1 .



La convessità si dimostra con la definizione:

dati $x \in \mathbb{R}^n$ e y in \mathbb{R}^n e dati $\lambda \geq 0$ e $\mu \geq 0$ con $\lambda + \mu = 1$,
devo dim. che

$$|\lambda x + \mu y| \stackrel{?}{\leq} \lambda |x| + \mu |y|$$

Faccio i quadrati (posso perché ...)

$$\lambda^2 |x|^2 + \mu^2 |y|^2 + 2\lambda\mu \langle x, y \rangle \stackrel{?}{\leq} \lambda^2 |x|^2 + \mu^2 |y|^2 + 2\lambda\mu |x| |y|$$

Quello che resta è Cauchy - Schwarz.

Oss. Sarebbe anche una triangolare, MA ... occhio che ...

la triangolare si dimostra così !!!

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 027

Titolo nota

23/10/2015

Esercizio 1 Consideriamo $f(x,y) = x^a y^b$ definita in

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$$

Determinare per quali valori di a e b reali risulta convessa.

(Fosse in \mathbb{R} : $f(x) = x^a$ è convessa per $x > 0 \Leftrightarrow a(a-1) \geq 0$)

Dim. Esseendo C^∞ basta fare Hf

$$f_x = a x^{a-1} y^b$$

$$f_{xx} = a(a-1) x^{a-2} y^b$$

$$f_y = b x^a y^{b-1}$$

$$f_{yy} = b(b-1) x^a y^{b-2}$$

$$f_{xy} = ab x^{a-1} y^{b-1}$$

$$Hf = \begin{pmatrix} a(a-1) x^{a-2} y^b & ab x^{a-1} y^{b-1} \\ ab x^{a-1} y^{b-1} & b(b-1) x^a y^{b-2} \end{pmatrix}$$

Hf è semidefinita positiva \Leftrightarrow

$$a(a-1) \geq 0$$

$$b(b-1) \geq 0$$

$$\text{Det} \geq 0 \quad a(a-1)b(b-1) - \frac{2}{3}ab^2 \geq 0$$

Esercizio 2 Consideriamo una funzione radiale

$$f(x,y) = g(x^2 + y^2)$$

con g di classe C^2 .

Capire quali condizioni su g assicurano la convessità di $f(x,y)$

Dim. Calcolo le derivate:

$$f_x = g'(x^2+4y^2) \cdot 2x$$

$$f_y = g'(x^2+4y^2) \cdot 2y$$

$$f_{xx} = g''(x^2+4y^2) \cdot 4x^2 + 2g'(x^2+4y^2)$$

$$f_{yy} = g''(x^2+4y^2) \cdot 4y^2 + 2g'(x^2+4y^2)$$

$$f_{xy} = g''(x^2+4y^2) \cdot 4xy$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^2g''(\dots) + 2g'(\dots) & 4xyg''(\dots) \\ 4xyg''(\dots) & 4y^2g''(\dots) + 2g'(\dots) \end{pmatrix}$$

Le condizioni sono: \rightarrow due termini sulla diagonale ≥ 0
 $\rightarrow \text{Det} \geq 0$

$$\text{Det} = (4x^2g'' + 2g') (4y^2g'' + 2g') - 16x^2y^2(g'')^2$$

$$= 16x^2y^2(g'')^2 + 8(x^2+4y^2)g''g' + 4(g')^2 - 16x^2y^2(g'')^2$$

$$= 4g'(x^2+4y^2) [2(x^2+4y^2)g''(x^2+4y^2) + g'(x^2+4y^2)]$$

La condizione, in termini della $g(x)$, è che

$$g'(x) [2xg''(x) + g'(x)] \geq 0 \quad \forall x \geq 0$$

Esempio 3 Stabilire dove è convessa la funzione

$$f(x,y) = \log(1+x^2+4y^2)$$

Siamo nel caso precedente con $g(x) = \log(1+x^2)$. Facciamo i conti:

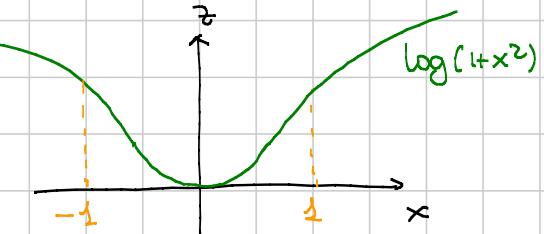
$$g'(x) = \frac{2x}{1+x^2} > 0 \text{ per } x > 0 ; g''(x) = \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$2xg''(x) + g'(x) = \frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} + \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2x(2-2x^2+1+x^2)}{(1+x^2)^2}$$

Semberebbe venire $\frac{2x(3-x^2)}{(1+x^2)^2} \geq 0$... controllare.

Come è fatta la funzione?

$\log(1+x^2+y^2) = \text{rotazione intorno all'asse } z$ del grafico precedente pensato nel piano xz

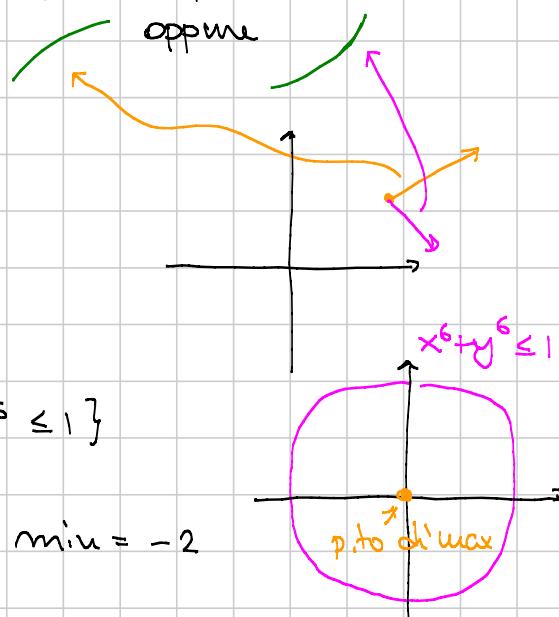


Idea geometrica:

→ vicino all'origine f è convessa

→ lontano dall'origine $\text{Det } Hf < 0$, quindi Hf ha autovalori +, quindi $f(x,y)$ non è né concava, né convessa.

Detto: curve diversi che passano per un p.t. lontano dall'origine possono vedere



Esempio 4 $\max_{\text{min}} \{ \cos x + \cos y : x^6 + y^6 \leq 1 \}$

Se fosse su tutto \mathbb{R}^2 : $\max = 2$, $\min = -2$

Insieme compatto: max e min esistono 😊

→ S.l. p.l. interni: \emptyset

→ S.l. interni $\begin{cases} -\sin x = 0 & x = k\pi \\ -\sin y = 0 & y = R\pi \end{cases}$ interni solo $(0,0)$

Il minimo sarà sul bordo, che tratto con i moltiplicatori

1o sistema : verificare che cosa ha soluzioni

2o sistema : $\begin{cases} fx = \lambda \phi_x \\ fy = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\sin x = 6\lambda x^5 \\ -\sin y = 6\lambda y^5 \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases}$

→ Se $x=0$, allora $y = \pm 1 \rightsquigarrow (0, \pm 1)$

→ Se $y=0$, allora $x = \pm 1 \rightsquigarrow (\pm 1, 0)$

→ Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$ dividendo e trovo

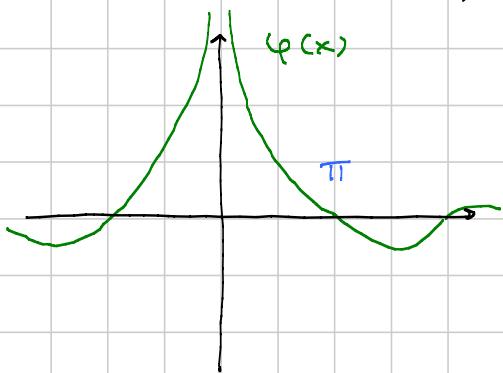
$$-\frac{\sin x}{x^5} = 6\lambda = -\frac{\sin y}{y^5}$$

Sono proprio tanto che $\frac{\sin x}{x^5}$ sia iniettiva in $[-1, 1]$
così devo che $x=y$.

Ora è PARI (\ominus) , ma fortunatamente è iniettiva in $[0, 1]$,
quindi posso deconcludere che $x = \pm y$.

$$\varphi(x) = \frac{\sin x}{x^5}$$

$$\varphi'(x) = \frac{\cos x \cdot x^5 - 5x^4 \cdot \sin x}{x^{10}}$$



Sono $\varphi'(x) \leq 0$ per $x \in [0, 1]$, ciò è

$$x^4 (x \cos x - 5 \sin x) \leq 0$$

questa si studia

$$g(x)$$

$$g'(x) = \cos x - x \sin x - 5 \cos x$$

$$= -x \sin x - 4 \cos x < 0 \text{ in } (0, \frac{\pi}{2})$$

Inoltre $g(0) = 0$, quindi

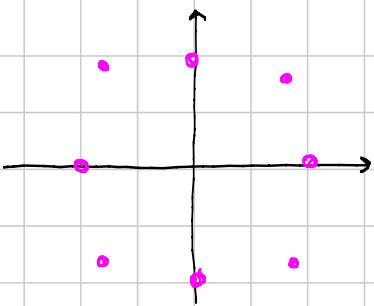
$$g(x) < 0 \text{ per } x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Una volta deconcluso che $y = \pm x$

vengono fuori 4 altre soluzioni del sistema.

Quindi alla fine i candidati sono 8

Non resta che sostituire



Domanda: cosa succede se considero

$$x^6 + y^6 = R$$

Per R piccoli il minimo sarà con $x = \pm y$, ad un certo valore R_0 il minimo non sarà più nei punti con $x = \pm y$

— o — o —

ANALISI 2

- LEZIONE 028

Titolo nota

27/10/2015

INTEGRALI DOPPI

- ① Come si indicano (notazioni)
- ② Significato geometrico
- ③ Definizione
- ④ Tecniche di calcolo

1 Notazioni

doppio simbolo di integrale insieme di integrazione INTEGRANDA: funzione da voglio integrare

Spesso si abbrevia scrivendo $\int_A f(x,y) dx dy$

Si parla di integrale PROPRIO se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e sono verificate due richieste

- (i) A limitato (cioè $\exists R > 0$ t.c. $A \subseteq B_R(0,0)$)
- (ii) f limitata (cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x,y)| \leq M$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$)

Si parla di integrale IMPROPRIO se manca almeno una delle richieste fondamentali.

Il "risultato" dell'integrale, posto che esista, è un NUMERO REALE.

— o — o —

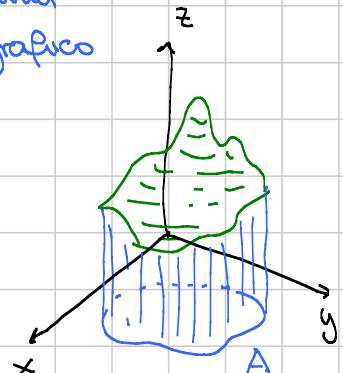
② Significato geometrico Supponiamo $f(x, y) \geq 0$ in A .

$\iint_A f(x, y) dx dy$ = volume della regione di spazio compresa tra piano base xy e grafico di f .
Formalmente la regione è

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{(x, y) \in A,}_{\substack{\text{la regione si} \\ \text{proietta su } A}} \underbrace{0 \leq z \leq f(x, y)}_{\substack{\text{la quota varia} \\ \text{da 0 al grafico} \\ \text{di } f(x, y)}}\}$$

Se $f(x, y) \leq 0$ in A , allora integrale = volume cambiato di segno

Se $f(x, y)$ ha segno variabile, allora



integrale = somma algebrica dei volumi delle varie zone in cui $f(x, y)$ ha segno costante

— o — o —

③ Definizione Conviene definire $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy$ prendendo come ipotesi che

(ii) f è limitata in \mathbb{R}^2

(i) $\exists A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato tale che $f(x, y) = 0$ per ogni $(x, y) \notin A$
(poi può fare 0 anche in p.ti di A)

A questo punto quando vorremo calcolare / definire l'integrale su un certo $B \subseteq \mathbb{R}^2$ potremo

$$\iint_B f(x, y) dx dy := \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(x, y) dx dy \quad \text{dove}$$

$$\hat{f}(x, y) := \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in B \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin B \end{cases}$$

La definizione procede in 3 fasi:

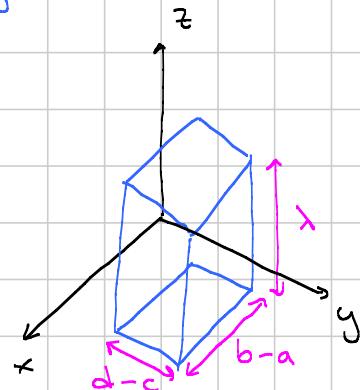
- caso banale
- caso semibanale
- caso generale

Caso banale: f costante su un rettangolo con lati \parallel agli assi, cioè esistono $[a, b]$ e $[c, d]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \lambda && \text{per } (x, y) \in [a, b] \times [c, d] \\ &= 0 && \text{al di fuori} \end{aligned}$$

In questo caso si pone

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy := \lambda \underbrace{(b-a)(d-c)}_{\substack{\text{area rettangolo} \\ \text{base}}} \quad \text{attestata con segno del parallelepipedo}$$



Caso semibanale: f è combinazione lineare di casi banali, cioè

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_{R_i}(x, y)$$

dove $R_i := [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$ e

$$\varphi_{R_i}(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in R_i \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin R_i \end{cases} \quad \begin{aligned} &\text{funzione caratteristica del rettangolo} \\ &R_i \end{aligned}$$

Def. Indichiamo con $SF(\mathbb{R}^2)$ l'insieme delle funzioni di questo tipo, che si chiamano

- step functions
- funzioni semplici
- funzioni a gradini

In questo caso si pone

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy := \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{(b_i - a_i)(d_i - c_i)}_{\substack{\uparrow \text{Area } R_i \\ \text{altre basi parallelepipedo } i-\text{esimo}}}$$

Oss. Il "grafico" di una $f \in SF(\mathbb{R}^2)$ è una serie di mattoni con lati paralleli agli assi di \mathbb{R}^3 .

Lemma (fondamentale che avrebbe dimostrato) Se due combinazioni lineari diverse definiscono la stessa funzione, allora l'integrale definito come sopra è lo stesso.

— o — o —

Caso generale Sia ora $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa le ipotesi (i) e (ii). Allora si pone

$$\iint_{\mathbb{R}^2}^* f(x,y) dx dy := \inf_{\substack{\varphi \\ \text{integrale superiore}}} \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) dx dy : \varphi \in SF(\mathbb{R}^2) \text{ e } f(x,y) \leq \varphi(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

integrale superiore

$$\iint_{*\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy := \sup_{\substack{\varphi \\ \text{integrale inferiore}}} \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) dx dy : \varphi \in SF(\mathbb{R}^2) \text{ e } f(x,y) \geq \varphi(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

integrale inferiore

Lemma (Quasi ovvio) Per ogni $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ che verifica (i) e (ii) vale la diseguaglianza

$$\iint_{*\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy \leq \iint_{\mathbb{R}^2}^* f(x,y) dx dy$$

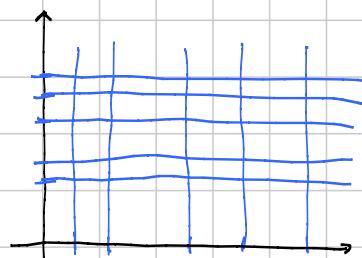
Per dimostrarlo per bene servirebbe sapere che se φ e ψ sono in $SF(\mathbb{R}^2)$ e

$$\varphi(x, y) \leq \psi(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

allora

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) dx dy \leq \iint_{\mathbb{R}^2} \psi(x, y) dx dy$$

(a sua volta serve un lemma che dice che 2 step functions possono essere pensate definite a partire dagli stessi rettangoli)



Def. Quando succede che nel lemma quasi ovvio c'è uguaglianza, allora si dice che f è integrabile secondo RIEMANN in \mathbb{R}^2 e il valore comune è l' integrale.

Proposizione (Quasi ovvio) Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa (i) e (ii). Allora f è integrabile secondo Riemann se e solo se

$\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi_\varepsilon \in SF(\mathbb{R}^2)$ e $\psi_\varepsilon \in SF(\mathbb{R}^2)$ tali che

$$\varphi_\varepsilon(x, y) \leq f(x, y) \leq \psi_\varepsilon(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} [\psi_\varepsilon(x, y) - \varphi_\varepsilon(x, y)] dx dy \leq \varepsilon$$

somme
inferiori

somme
sup
integrale

Oss

- (1) Abbiamo usato (i) e (ii) per essere sicuri che esistono elementi di $SF(\mathbb{R}^2)$ sopra e sotto $f(x,y)$.
- (2) Si ottiene la stessa definizione (esercizio) lavorando alla DARBOUX, cioè usando solo funzioni $SF(\mathbb{R}^2)$ ottenute prendendo in ogni rettangolo sup e inf di $f(x,y)$.
- o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 29

Titolo nota

27/10/2015

Teorema (molto misterioso)

Funzioni decenti (ad esempio continue)

su insiemi decenti (ad esempio poligoni / cerchi /...)

sono integrabili secondo Riemann.

Inoltre l'integrale si può calcolare con la formula di riduzione

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy$$

FORMULA DI RIDUZIONE

$$= \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx$$

2 = 1+1

Oss. Queste formule sono l'analogo di quello che in matematica discreta si chiama DOUBLE COUNTING

k_{ij}	k_{00}	k_{01}	k_{02}	$\rightarrow R_0$	$\sum_{i,j} k_{ij} = \sum_j c_j = \sum_i R_i$
	k_{11}			$\rightarrow R_1$	
		k_{13}		$\rightarrow R_2$	
	k_{30}		k_{34}		
	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	
	c_0	c_1	c_2	c_3	

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \right] dx = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx \right] dy$$

x è fisso e integro
 solo rispetto alla
 variabile y =
 integrare su colonna x

y è fisso =
 integrare sulla
 riga ad
 altezza y

Primo caso L'insieme di integrazione è un rettangolo

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y) = \int_c^d dy \int_a^b dx f(x, y)$$

Esempio 1 $R = [0, 2] \times [0, 1]$ $f(x, y) = y^2 + xy$

$$\begin{aligned} \iint_R (y^2 + xy) dx dy &= \int_0^2 dx \int_0^1 dy (y^2 + xy) \\ &= \int_0^2 dx \left[\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}xy^2 \right]_{y=0}^{y=1} \quad \text{(sostituisco estremi)} \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x^2 \right) dx \quad \text{(Analisi \pm pura)} \\ &= \left[\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x^2 \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{2}{3} + 1 = \boxed{\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

Posso usare formula di riduzione nell'altro senso

$$\begin{aligned} \iint_R (y^2 + xy) dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^2 dx (y^2 + xy) \quad \text{(Primitiva in } x) \\ &= \int_0^1 dy \left[xy^2 + \frac{1}{2}x^2y \right]_{x=0}^{x=2} \quad \text{(sostituisco estremi)} \\ &= \int_0^1 dy [2y^2 + 2y] \quad \text{(Analisi \pm)} \\ &= \left[\frac{2}{3}y^3 + y^2 \right]_0^1 = \frac{2}{3} + 1 = \boxed{\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

Oss. Fare l'integrale in 2 modi è un'ottima verifica della correttezza del risultato.

[INSIEMI NORMALI]

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice

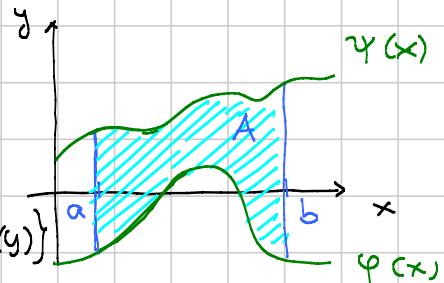
- normale rispetto all'asse x se si può scrivere nella forma

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

per opportuni $a < b$ e funzioni $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

- normale rispetto all'asse y se si può scrivere come

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$



(come prima, ma girato di 90°).

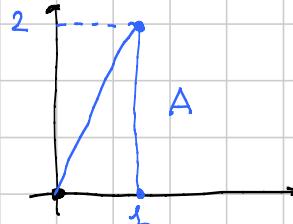
Oss. Se φ e ψ sono continue, l'insieme A ricade tra quelli decenti del teorema cui stiamo.

[Formula di riduzione su insiemi normali]

Asse x : $\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy f(x, y)$

Asse y : $\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} dx f(x, y)$

Esempio $A = \text{triangolo con vertici in } (0,0), (1,0), (1,2)$
 $f(x, y) = y$



Scribo A come normale asse x:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x\}$$

$$\begin{aligned} \iint_A y \, dx \, dy &= \int_0^1 dx \int_0^{2x} dy \cdot y && \text{(primitiva rispetto a } y) \\ &= \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=2x} && \text{(sostituisco estremi)} \\ &= \int_0^1 2x^2 \, dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_{x=0}^{x=1} = \boxed{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Per verifica, scrivo A come normale rispetto all'asse y

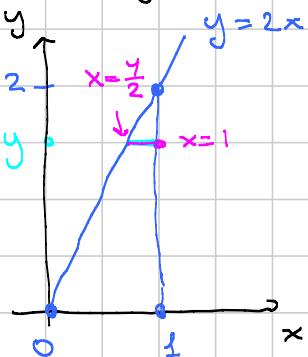
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2, \frac{1}{2}y \leq x \leq 1\}$$

$$\iint_A y \, dx \, dy =$$

$$\int_0^2 dy \int_{\frac{1}{2}y}^1 \frac{1}{2}y \, dx \, y = \text{(primitiva in } x)$$

$$= \int_0^2 dy \left[xy \right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=1} = \text{(sostituisco gli estremi)}$$

$$= \int_0^2 dy \left[y - \frac{1}{2}y^2 \right] = \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3 \right]_0^2 = 2 - \frac{4}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$$



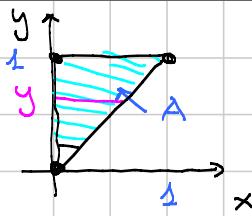
Osservazione Il secondo sviluppo si poteva semplificare

$$\begin{aligned} \int_0^2 dy \int_{\frac{1}{2}y}^1 \frac{1}{2}y \, dx \, y &= \int_0^2 y \, dy \int_{\frac{1}{2}y}^1 \frac{1}{2}y \, dx \cdot 1 \\ &\quad \text{(l'integrale di } \int \text{ su un insieme è la lunghezza } 1 - \frac{1}{2}y) \\ &= \int_0^2 y \left(1 - \frac{1}{2}y \right) dy = \text{come prima.} \end{aligned}$$

non dipende da x, quindi può uscire fuori

Esempio 2 $\iint_A e^{-y^2} dx dy$

Normale asse x



$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$$

$$\iint_A e^{-y^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy \quad (\text{Non so fare la primitiva } \frown \frown)$$

Normale asse y

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$$

$$\iint_A e^{-y^2} dx dy = \int_0^1 dy \int_0^y dx e^{-y^2} = \int_0^1 e^{-y^2} dy \int_0^y dx = \int_0^1 y e^{-y^2} dy \quad \smiley$$

Per veri duri...

$$\int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy = \int_0^1 dx [F(y)]_x^1 = \int_0^1 dx [F(1) - F(x)]$$

una primitiva

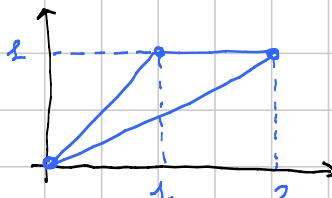
Se scelgo bene la
primitiva fa ☺

L'altro termine lo integro per parti e
mi viene $x e^{-x^2}$

— o — o —

Normale asse x

$$\int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^x dy \dots + \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^1 dy \dots$$



Normale asse y

$$\int_0^1 dy \int_y^2 dx \dots$$

ANALISI 2

- LEZIONE 030

Titolo nota

28/10/2015

Proposizione (criterio di integrabilità) Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e nulla fuori da un limitato.

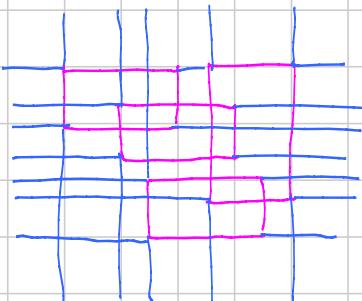
Allora f è integrabile se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esistono φ_ϵ e ψ_ϵ in $SF(\mathbb{R}^2)$ t.c.

$$\varphi_\epsilon(x, y) \leq f(x, y) \leq \psi_\epsilon(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\psi_\epsilon(x, y) - \varphi_\epsilon(x, y)] dx dy \leq \epsilon$$

$\in SF(\mathbb{R}^2) \quad \epsilon > 0$

Oss. Posso sempre supporre φ_ϵ e ψ_ϵ ottenuta a partire da una stessa "rettangolazione" di \mathbb{R}^2



Proprietà semplici delle funzioni integrabili

① L'insieme delle funz. int. è uno sp. vett. e l'integrale è un' applic. lineare (LINEARITÀ)

[Dim. date f e g , prendo step. funct. sopra e sotto per f e g e poi le sommo]

② (MONOTONIA) Se f e g sono integrabili e $f \leq g$ su \mathbb{R}^2 , allora

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy \leq \iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y) dx dy$$

[Dim. Tutte le s.f. superiori per g sono buone anche per f]

③ (VALORE ASSOLUTO) f integrabile $\Rightarrow |f|$ integrabile e

$$\left| \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy \right| \leq \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)| dx dy$$

[Dim. prendo φ_ε e ψ_ε per f e costruisco opportune $\hat{\varphi}_\varepsilon$ e $\hat{\psi}_\varepsilon$ per $|f|$ decidendo rettangolo per rettangolo]

- se $f \geq 0$ in rett., allora $\hat{\varphi}_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$, $\hat{\psi}_\varepsilon = \psi_\varepsilon$
- se $f \leq 0$ in rett., allora $\hat{\varphi}_\varepsilon = -\psi_\varepsilon$, $\hat{\psi}_\varepsilon = -\varphi_\varepsilon$
- se f ha segno variabile in rett., allora $\hat{\varphi}_\varepsilon = 0$, $\hat{\psi}_\varepsilon = \max\{\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon\}$

Si verifica che

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \hat{\psi}_\varepsilon - \hat{\varphi}_\varepsilon \leq \iint_{\mathbb{R}^2} (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) \quad]$$

④ (Proprietà di reticolato) Se f e g sono integrabili, allora $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ sono integrabili

[Dim. Ci sono 2 possibili approcci:

- costruire s.f. sopra e sotto opportunamente
- basarsi sul val. assoluto

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(|x-y| + x+y) \quad \text{e idem per min.} \quad]$$

⑤ (PRODOTTO) Se f e g sono integrabili, allora $f \cdot g$ è integrabile (e basta: non c'è formula per l'integrale del prodotto)

[Dim. Due fasi:

- se $f \geq 0$ e $g \geq 0$ si lavora con le step. functions aggiungendo e togliendo il termine misto
- se f e g sono a segno variabile, introduco parti positive e negative

$$f = f^+ - f^- \quad f^+ \geq 0, f^- \geq 0$$

$$g = g^+ - g^- \quad g^+ \geq 0, g^- \geq 0$$

e moltiplico tutto, oppure osservo che

$$fg = \frac{1}{2} [(f+g)^2 - f^2 - g^2]$$

ora f int. $\Rightarrow |f|$ int. e $\geq 0 \Rightarrow f^2$ int.

⑥ Additività rispetto alla zona di integrazione

Se f è integrabile in A e in B con $A \cap B = \emptyset$, allora f è integrabile in $A \cup B$ e vale

$$\iint_{A \cup B} f(x,y) dx dy = \iint_A \dots + \iint_B \dots$$

[Dim. non c'è nulla da fare se non osservare che su tutto \mathbb{R}^2 si riduce alla somma di funzioni]

— o — o —

FORMULA DI RIDUZIONE (FUBINI o FUBINI-TONELLI)

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e nulla fuori da un limitato.

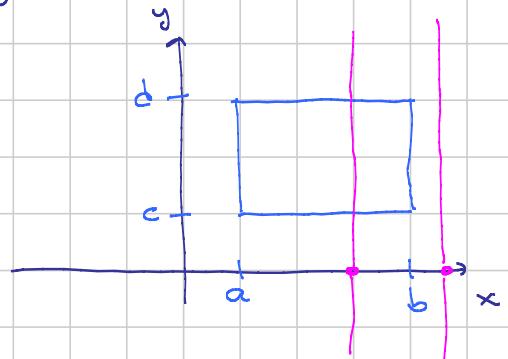
Allora

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy &\leq \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy \leq \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy \end{aligned}$$

[Dim.] Caso banale : $f(x,y) =$ funzione caratteristica di rettangolo $[a,b] \times [c,d]$

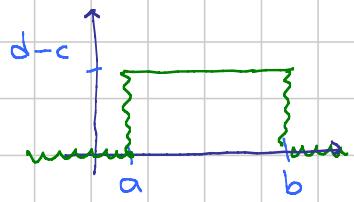
RHS e LHS sono $(b-a) \times (d-c)$ per definizione, senza super. o inferiore.

Esamineremo i 2 termini centrali



Fissato x

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [a,b] \\ d-c & \text{se } x \in [a,b] \end{cases}$$



quindi è a sua volta una step function nella variabile x
Quando integro rispetto ad x ottengo

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy f(x,y) = (b-a)(d-c)$$

sesta bisogna di inferiori o superiori.

Quindi vale la formula con tutti uguali.

Caso semibanale : $f(x,y) \in SF(\mathbb{R}^2)$

Truccaccio: considero $f \rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy$

$$f \rightarrow \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy f(x,y)$$

Sono due applicazioni lineari $SF(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ che coincidono su una base (le caratteristiche di rettangoli). Quindi coincidono, quindi ancora una volta la formula vale con tutti $=$.

Caso generale prendo f qualunque e prendo una qualunque $\varphi \in SF(\mathbb{R}^2)$ con $f(x,y) \leq \varphi(x,y)$ sempre.

Allora per ogni x fissato vale

$$\int_{\mathbb{R}}^* f(x,y) dy \leq \int_{\mathbb{R}}^* \varphi(x,y) dy$$

↑
quindi $f \leq \varphi$ sulla colonna verticale

Ma allora

$$\int_{\mathbb{R}}^* dx \int_{\mathbb{R}}^* f(x,y) dy \leq \int_{\mathbb{R}}^* dx \int_{\mathbb{R}}^* \varphi(x,y) dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) dx dy$$

Faccendo l'inf su tutte le $g(x,y) \geq f(x,y)$ in \mathbb{R}^2 , a destra ottengo

$$\iint_{\mathbb{R}^2}^* f(x,y) dx dy.$$

Per concludere basta osservare che

- Da disag. a sx si fa uguale con le SF dal basso
- quella centrale è banale perché

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

— o — o —

Esercizio (Hard?) Trovare un esempio in cui i 4 numeri sono diversi (addirittura assegnati).

Esempio 1 Trovare $f(x,y)$ con $\iint_{\mathbb{R}^2}^* f \neq \iint_{-\infty}^{\infty} f$

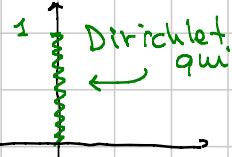
Posso prendere $f(x,y) = 0$ fuori da $[0,1] \times [0,1]$

$f(x,y) = 1$ se $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$ e $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$

$f(x,y) = 0$ altrimenti

Esempio 2

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0, y \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Esempio 3 f non integrabile, ma i due termini centrali coincidono e senza bisogno di integrali inferiori e superiori.

ANALISI 2

-

LEZIONE 031

Titolo nota

28/10/2015

Formula di spettamento (caso speciale)Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ come sempre.

Supponiamo che

(i) f è integrabile su \mathbb{R}^2 (ii) per ogni $x \in \mathbb{R}$ la restrizione alla colonna $y \rightarrow f(x,y)$ è integrabile in \mathbb{R} . ((ii) non segue da (i))

Allora

↑ il fatto che esiste la parte
della tesi

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} dx \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dy f(x,y)}_{\text{ho assunto che esiste}}$$

Dim Scrivo la tesi del teorema generale con tutti $=$ (perché per ipotesi (i) sono uguali RHS e LHS):

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}} dx \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy}_{\text{scorta } f \text{ per hp (ii)}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy \end{aligned}$$

Questo basta per concludere che la funzione

$$x \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy$$

è integrabile su \mathbb{R} e vale l'uguaglianza.

—○—○—

Oss. Vale un enunciato simmetrico per concludere che

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} dx f(x,y)$$

Oss. Non basta che gli integrali sperimentati esistano senza problemi e coincidano per dedurre l'integrabilità in \mathbb{R}^2
(vedi esempio di fine les. precedente)

— o — o —

INSIEMI MISURABILI

Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato si dice misurabile se la sua funzione caratteristica è integrabile secondo Riemann su \mathbb{R}^2 , cioè

$$\iint_A \chi \, dxdy \text{ esiste.}$$

In tal caso l'integrale si chiama misura di A

Criterio di misurabilità Un insieme limitato $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è misurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due insiemi

$$B_\varepsilon \subseteq A \subseteq C_\varepsilon$$

tali che

(i) B_ε e C_ε sono unioni di rettangoli con lati // agli assi

$$\text{Area}(C_\varepsilon) - \text{Area}(B_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

essendo unioni di rettangoli,

l'area è quella classica

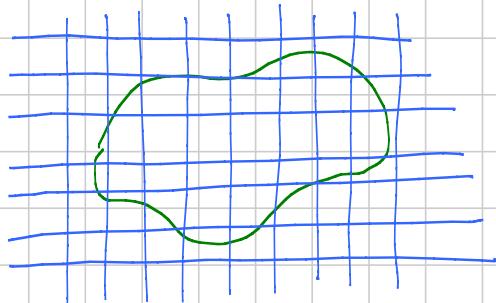
[Unioni FINITE:
precisione (spero ovvia)
aggiunta dopo video]

→ In C_ε prendo tutti i rettangoli R

$$\text{t.c. } R \cap A \neq \emptyset$$

→ In B_ε prendo gli R t.c.

$$R \subseteq A$$



Dim (idea) Se la funzione caratt. di A è integrabile, allora esistono S.F. φ_ε e ψ_ε con

$$\varphi_\varepsilon(x, y) \leq \frac{1_A(x, y)}{\text{caratteristica}} \leq \psi_\varepsilon(x, y)$$

con

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) dx dy \leq \varepsilon$$

Pongo $B_\varepsilon := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_\varepsilon(x, y) > 0\}$
 $C_\varepsilon := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \psi_\varepsilon(x, y) > 0\}$

Si verifica che

$$B_\varepsilon \subseteq A \subseteq C_\varepsilon$$

e anche

$$\text{Area}(C_\varepsilon) - \text{Area}(B_\varepsilon) \leq \iint_{\mathbb{R}^2} (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) dx dy \leq \varepsilon$$

↑
 vorrebbe = se facessi φ_ε e ψ_ε alla Darboux
 —○—○—

Conseguenza Gli insiemi normali con "tappi" continui sono misurabili

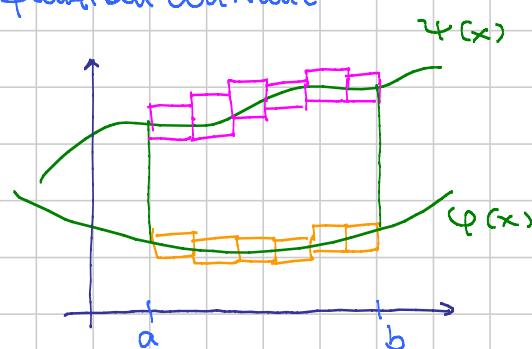
Dim. Prendiamo il caso rispetto all'asse x . Allora

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

↗ ↘
 funzioni continue

Basta che φ e ψ siano integrabili nel senso dell'analisi \int per avere B_ε e C_ε come richiesto.

La conclusione è ovvia.



Teorema (più sensato di quello della lezione 29)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme limitato e misurabile

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e continua

Allora f è integrabile su \mathbb{R}^2

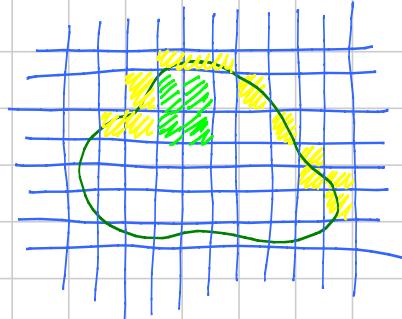
Dim. Pongo $\hat{f}(x, y) = f(x, y) \cdot 1_A(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{in } A \\ 0 & \text{fuori} \end{cases}$

Dato $\varepsilon > 0$, devo costruire φ_ε e ψ_ε come nel criterio di integrabilità

Nei rettangolini gialli, pongo

$$\varphi_\varepsilon(x, y) = -M \quad |f(x, y)| \leq M$$

$$\psi_\varepsilon(x, y) = M$$



"Pongo" $\iint_{\text{gialli}} (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) \leq 2M \cdot \underline{\text{Area gialli}}$

essendo A misurabile, può diventare piccola a piacere.

Pongo $B :=$ unione rettangoli dentro. Allora B è compatto, quindi essendo f continua vale Heine-Cantor (come ad analisi 1) e quindi per di suddividere abbastanza fitto so che

$\max \{f(x, y) : (x, y) \in R\} - \min \{f(x, y) : (x, y) \in R\} \leq \varepsilon$
per ogni rettangolo R .

Definisco ora

$$\varphi_\varepsilon(x, y) = \min \quad \text{in ogni rettangolo}$$

$$\psi_\varepsilon(x, y) = \max \quad R \text{ che fa parte di } B$$

Pongo $\iint_B (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) dx dy \leq \varepsilon \cdot \text{area}(B)$

diventa piccola a piacere
(più voglio ε piccolo, più devo prendere i rettangoli R fitti)

Hint per costruire f con integrale con sezioni molto buone

Lemma Esiste $D \subseteq [0,1] \times [0,1]$ denso tale che

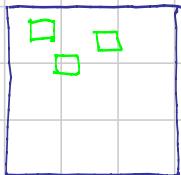
(i) ogni retta $x = x_0$ contiene al massimo 1 punto di D

$$(ii) \quad " \quad " \quad y = y_0 \quad " \quad "$$

Dato il lemma, l' esempio cercato è 1_D (non è integrabile e sulle sezioni viene 0).

Idea per il lemma D è deuso se e solo se interseca ogni sottoquadратик con estremi razionali

I sotto qualsiasi con estremi in \mathbb{Q}
sono numerabili, cioè li posso mettere
in successione



Per induzione posso prendere punti $P_k \in \mathbb{Q}_k$ facendo in modo che P_k non stia sulle $(k-1)$ rette orizz. e $(k-1)$ rette verticali già usate prima.

Con la stessa idea forse si può fare l'esempio più difficile.



ANALISI 2 - LEZIONE 032

Titolo nota

30/10/2015

INTEGRALI DOPPI IN COORDINATE POLARI

$$x = p \cos \theta$$

$$y = p \sin \theta$$

FORMULA

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B f(p \cos \theta, p \sin \theta) p d p d \theta$$

↑ B x y
 integrare da voglio
 calcolare

↓ A
 insieme A descritto
 in coordinate
 polari

↓ p d p d θ
 pagamento

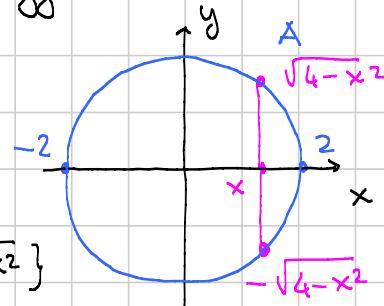
Esempio 1

$$\iint_A (x^2 + y^2) dx dy$$

$A =$ cerchio con centro in $(0,0)$
 e raggio 2

1° modo Vedere A come insieme
 normale rispetto asse x

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$



A questo p.t.o

$$\iint_A (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2) dy$$

$$= \int_{-2}^2 dx \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}$$

= resta integrare pieno di radici

Stessa sorte se lo vedono come normale rispetto asse y.

2º modo Uso coordinate polari

Desenv. A. in coord. polari

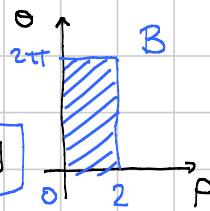
$$\iint_A (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^2 d\rho \int_0^{\pi} d\theta$$

B: descrizione di
A in coord. polari

$$= \int_0^2 dp \int_0^{2\pi} d\theta \quad p^3$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^2 = 8\pi$$

$$= \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta$$



Operativamente : integrare in coord. pol. è quando quando si ha simmetria radiale.

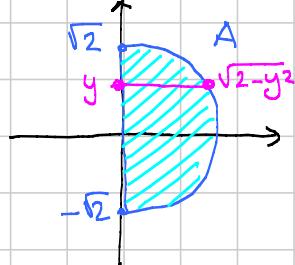
Esempio 2 $\iint_A y^2 \, dx \, dy$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0\}$$

Come insieme normale

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \sqrt{2}, -\sqrt{2-x^2} \leq y \leq \sqrt{2-x^2}\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}, 0 \leq x \leq \sqrt{2-y^2}\}$$



In coord. polari : $0 \leq \rho \leq \sqrt{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ opp. $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{2}$

Nous pensons néanmoins $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\iint_A y^2 dx dy = \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \underbrace{\rho^2 \sin^2 \theta}_{y^2} \underbrace{\frac{\rho}{\text{pag.}}}_{A \text{ in coord. pd.}}$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \pi$$

Oss. (rivedere analisi 1) $k \in \mathbb{Z}, R \in \mathbb{R}$

$$\int_{k\frac{\pi}{2}}^{R\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \int_{k\frac{\pi}{2}}^{R\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = (R-k)\frac{\pi}{4}$$

In altre parole: l'integrale di $\sin^2 \theta$ o di $\cos^2 \theta$ tra estremi che sono multipli interi di $\frac{\pi}{2}$ è uguale a metà della lunghezza dell'intervalllo.

Dim. $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta$ $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta$

Allora $C = S$ (per simmetria) e $C + S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta = \frac{\pi}{2}$

Per riflessione in tutti gli altri intervalli

Altra cosa da ricordare: $\int_{k\frac{\pi}{2}}^{(k+1)\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = \pm 1$ e idem. per $\cos \theta$

Esempio 3 $\iint_A x dx dy$

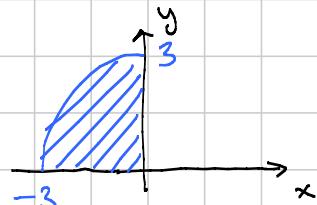
A = cerchio con centro in $(0,0)$
e raggio 3 intersecato il 2º
quadrante.

$$= \int_0^3 dp \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \theta d\theta \quad \text{per} \cos \theta = p$$

A in coord. polari

$$= \int_0^3 p^2 dp \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \theta d\theta = -9$$

g -1



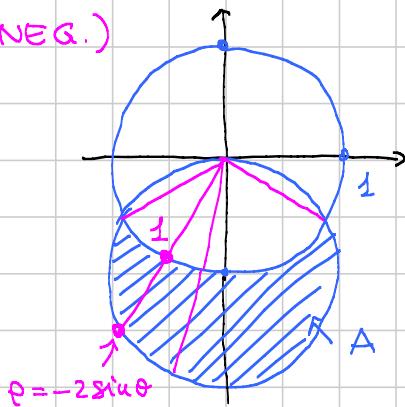
Oss. Il segno potranno prevederlo dall'inizio perché l'integrandola è ≤ 0 nell'insieme di integrazione

— o — o —

Esempio 4 $\iint_A y \, dx \, dy$ (DEVE VENIRE NEG.)

A = l'insieme come in figura

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + (y+1)^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + 2y = 0$$



In coord. cartesiane sembra complicato.

Proviamo in coord. polari

$$x^2 + y^2 \geq 1 \Rightarrow \rho \geq 1 \quad (\text{fuori dal primo cerchio})$$

$$x^2 + y^2 + 2y \leq 0 \Rightarrow \rho^2 + 2\rho \sin \theta \leq 0 \quad (\text{dentro il 2° cerchio})$$

$$\rho + 2\sin \theta \leq 0 \Rightarrow \rho \leq -2\sin \theta$$

Riassumendo: $1 \leq \rho \leq -2\sin \theta$

Se impongo $1 \leq -2\sin \theta$ ottengo dove varia θ : $\sin \theta \leq -\frac{1}{2}$

$$\text{da cui } \frac{7\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{11\pi}{6}.$$

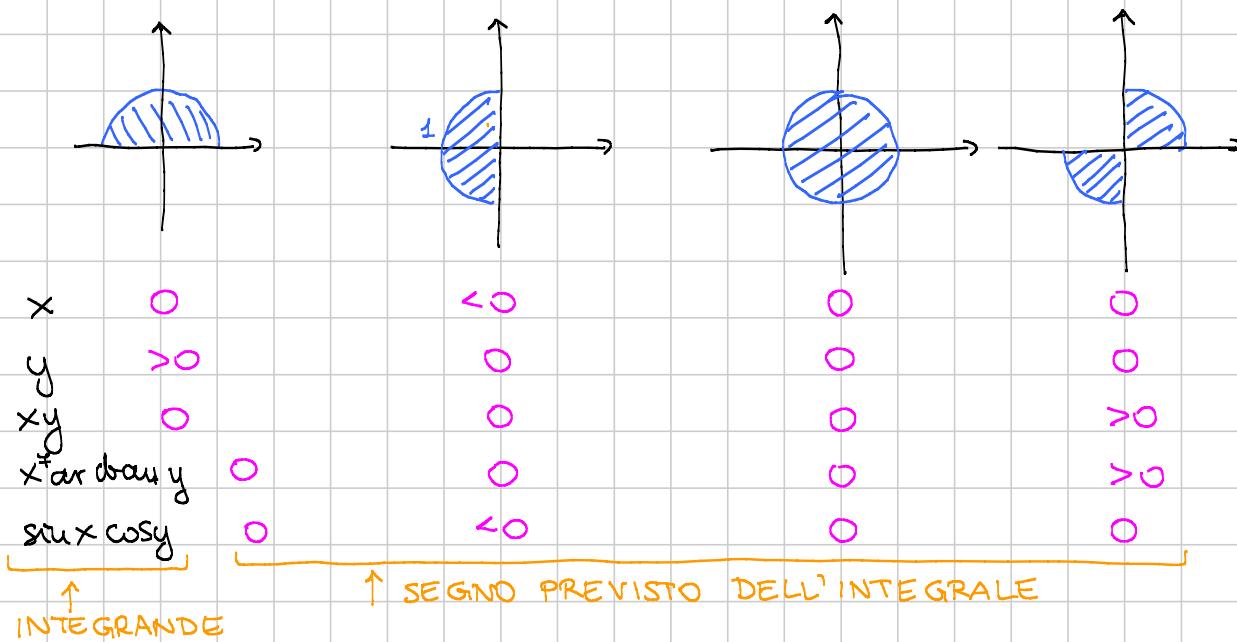
L'insieme A in coord. polari è

$$\boxed{\frac{7\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{11\pi}{6}, \quad 1 \leq \rho \leq -2\sin \theta}$$

$$\begin{aligned} \iint_A y \, dx \, dy &= \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} d\theta \int_1^{-2\sin \theta} \rho \sin \theta \, \rho \, d\rho \\ &= \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \sin \theta \, d\theta \int_1^{-2\sin \theta} \rho^2 \, d\rho = \text{conti analisi 1.} \end{aligned}$$

— o — o —

Oss. Spesso le simmetrie posso semplificare dei calcoli mostrando che certi integrali sono nulli.



ANALISI 2 - LEZIONE 033

Titolo nota

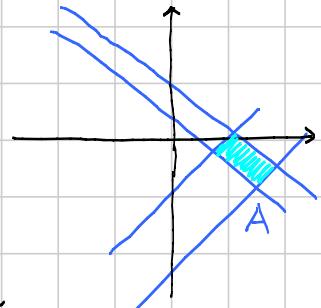
30/10/2015

FORMULA DI CAMBIO DI VARIABILI IN GENERALE

$$\iint_A (x^2 - y^2) dx dy$$

$$(x^2 - y^2) = u \cdot v$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x+y \leq 3, 7 \leq x-y \leq 11\}$$



Si può fare come insieme normale, ma richiede vari spezzamenti

Mi piacerebbe tanto scrivere $\iint_A (x^2 - y^2) dx dy = \int_2^3 \int_7^{11} (uv) J(u, v) du dv$

Domanda: come calcolare $J(u, v)$
 \uparrow
 JACOBIANO

$J(u, v)$
 pagamento

Formula: $\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B g(u, v) |J(u, v)| du dv$

\iint_A \iint_B
 ciò che voglio calcolare \uparrow A descritto nelle variabili u e v $f(x, y)$ nelle nuove variabili u e v

- Ricetta per ottenere J :
- ① ricavare x e y in funzione di u e v
 - ② scrivere la matrice jacobiana della trasformazione
 - ③ $J(u, v) = |\text{Det}|$

Nell'esempio: ① $u = x+y$ $v = x-y$

$$\Rightarrow x = \frac{u+v}{2} \quad y = \frac{u-v}{2}$$

② Matrice jacobiana $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\textcircled{3} \quad J(u, v) = |\text{Det}| = \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}$$

Quindi nell'esempio $\iint_A (x^2 - y^2) dx dy = \int_2^3 du \int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} (uv) \frac{1}{2} J(u, v) du dv$

$\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$

\uparrow
 $J(u, v)$

$= \text{banalità}$

Verifica: cosa succederebbe nel caso delle coord. polari

$$\textcircled{1} \quad x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta$$

2 Matrice

$$\begin{pmatrix} x_p & x_\theta \\ y_p & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \quad |\text{Det}| = \rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta = \rho$$

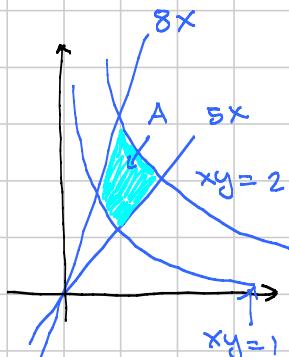
$\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$

Esempio $\iint_A y dx dy$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq xy \leq 2, 5x \leq y \leq 8x\}$$

$$5 \leq \frac{y}{x} \leq 8$$

In cartesiane si farebbe



Nelle nuove coordinate l'insieme è

$$1 \leq u \leq 2 \quad 5 \leq v \leq 8$$

$$\textcircled{1} \quad \text{Ricavo } x \text{ e } y : \quad u = xy \quad v = \frac{y}{x}$$

$$y = \sqrt{uv} \quad x = \sqrt{\frac{u}{v}}$$

$f(x, y)$ è diventata \sqrt{uv}

2 Matrice

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \quad J(u,v) = |\det| = \left| \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{v}} + \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{v}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{v}}$$

In conclusione

$$\iint_A y \, dx \, dy = \underbrace{\int_1^2 du \int_5^8 dv}_{\substack{\text{insieme A nelle} \\ \text{coord. u e v}}} \underbrace{\sqrt{v}}_y \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{v}}}_{J(u,v)} = \text{facile.}$$

Procedura alla rovescia per calcolare $J(u,v)$

① Scrivo u e v in funzione di x e y : $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$

② Faccio la matrice in questa direzione

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

③ Calcolo $|\det| = \frac{2y}{x} = 2v$

④ Faccio l'inverso $J(u,v) = \frac{1}{2v}$ come prima.

Oss. È come se partissi dall'integrale in (u,v) e volessi trasformarlo in (x,y) .

— o — o —

Casi speciali utili

① Traslazioni : $u = x+a$, $v = y+b \rightsquigarrow J(u,v) = 1$

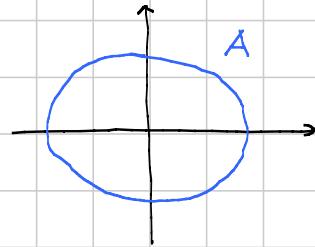
② Dilatazioni lungo gli assi : $u = ax$, $v = by \rightsquigarrow J(u,v) = (ab)^{-1}$

③ Affinità : $(x,y) = A(u,v) + (a,b) \rightsquigarrow J(u,v) = |\det A|^{-1}$

Esempio 1 $\iint_A y^2 dx dy$ $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 \leq 5\}$

Risolviamo il' insieme

$$(\underbrace{\sqrt{2}x}_u)^2 + (\underbrace{\sqrt{3}y}_v)^2 \leq 5 \quad u^2 + v^2 \leq 5$$



$$\textcircled{1} \quad x = \frac{u}{\sqrt{2}} \quad \textcircled{2} \quad \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \quad J(u, v) = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Conclusione $\iint_A y^2 dx dy = \iint_{u^2 + v^2 \leq 5} \underbrace{\frac{v^2}{3}}_{y^2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}}}_{J(u, v)} du dv$

$$= \frac{1}{3\sqrt{6}} \iint_{u^2 + v^2 \leq 5} v^2 du dv = \frac{1}{3\sqrt{6}} \int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin^2 \theta \rho d\theta d\rho$$

coord. polari

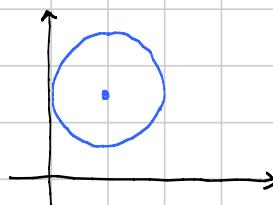
$$= \frac{1}{3\sqrt{6}} \int_0^{\sqrt{5}} \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{3\sqrt{6}} \cdot \frac{25}{4} \cdot \pi$$

Esempio 2 $\iint_A x dx dy$

$A =$ cerchio con centro in $(2, 3)$ e raggio 2

Dove venire positivo

$$(\underbrace{x-2}_u)^2 + (\underbrace{y-3}_v)^2 \leq 4$$



Traslazione $\Rightarrow J(u, v) = 1$

Quindi

$$\iint_A x \, dx \, dy = \iint_{u^2+r^2 \leq 4} (u+2) \cdot 1 \, du \, dr$$

$$= \iint_{u^2+r^2 \leq 4} u \, du \, dr + 2 \iint_{u^2+r^2 \leq 4} 1 \, du \, dr = 8\pi$$

" " " " Area cerchio = 4π

per simmetria

Oss 1 In generale $\iint_A f \, dx \, dy = \text{Area}(A)$

Oss. 2 Il discorso delle simmetrie si dimostra con un cambio di variabili usando la simmetria stessa.

Giustificazione ULTRA-BRUTALE della procedura

- se vale per i rettangoli, vale per tutte le funzioni
 - se la trasformazione è una affinità, allora rettangolo \rightsquigarrow parallelogrammo, la cui area è un determinante
 - se il rettangolo è abbastanza piccolo, posso approssimare la trasformazione al 1° ordine con Taylor, quindi con una affinità.
- o — o —

Titolo nota

03/11/2015

INTEGRALI TRIPLOI

① Notazione

② Significato geometrico / fisico

③ Definizione

④ Tecniche di calcolo

② Notazione

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

A $\subseteq \mathbb{R}^3$
 zona di integraz.

integranda

Si intende : $\rightarrow A$ è limitato $\rightarrow f$ è limitata

② Significato fisico

 $A \subseteq \mathbb{R}^3$ limitato pensato come un solido $f(x, y, z) \geq 0$ pensata come densità del materiale di cui è fatto il solido

Supponiamo di voler definire il peso totale del solido.

Idea: pensare di scomporre il solido in tanti "mattocini" piccoli in ciascuno dei quali la densità è circa costante.

Bassa approssimazione il peso del solido con la somma dei pesi dei mattocini che si calcolano facendo

$$\text{peso mattone} = \frac{\text{densità nel mattone}}{\text{supposta costante}} \cdot \frac{\text{Volume}}{\text{parallelepipedo.}}$$

Matematicamente ho costruito una somma di Riemann.

③ Definizione

Audiamo a definire $\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz$

→ Caso banale

$f = \text{costante}$ in un parallelepipedo

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

$e = 0$ fuori

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = \lambda \prod_{i=1}^3 (b_i - a_i)$$

→ Caso semi-banale $f = \text{comb. Lineare di casi banali}$

L'integrale è def. come comb. Lineare degli integrali

→ Caso generale : integrale inf. e sup. come sempre e poi se coincidono -.

Valgono le solite prop. di sempre (linearietà, monotonia, valore assoluto, prodotto) con le solite dimostrazioni.

Oss. Che nel procedimento di approx le step functions "sfanno" rispetto ai bordi dell' insieme in cui $f \neq 0$.

④ Tecniche di calcolo Formule di riduzione

$$3 = 1+1+1$$

$$3 = 2+1$$

$$3 = 1+2$$

$$\text{Formula } 3 = 1+1+1$$

$$A = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$$

= parallelepipedo

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz f(x, y, z)$$

Oss. Cambiamo i nomi alle variabili ottengo 6 formule diverse
1° ordine

Lezione 034

$$\underline{\text{Ejemplo}} \quad A = [0,1] \times [0,2] \times [1,3] \quad f(x,y,z) = x + yz$$

$$\begin{aligned}
 \iiint_A (x+yz) dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_1^3 (x+yz) dz = (\text{primit. in } z) \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \left[xz + \frac{1}{2}yz^2 \right]_{z=1}^{z=3} \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy [2x + 4y] \quad (\text{primitiva in } y) \\
 &= \int_0^1 dx \left[2xy + 2y^2 \right]_{y=0}^{y=2} = \int_0^1 dx (4x + 8) \\
 &= [2x^2 + 8x]_{x=0}^{x=1} = 10.
 \end{aligned}$$

Stesso esercizio, in modo forse più pratico

$$\iiint_A x \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_1^3 dz \quad \text{Area } [0, 2] \times [1, 3]$$

$\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_1^3 dz$

$$= \int_0^1 x \, dx \int_0^2 dy \int_1^3 dz$$

$\int_0^1 x \, dx$

$$= \int_0^1 4x \, dx = [2x^2]_0^1 = 2$$

quinto 4

$$\iiint_A yz \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 dy \int_1^3 dz \int_0^1 yz \, dx = \int_0^2 y \, dy \int_1^3 z \, dz \int_0^1 \, dx$$

$$\left[\frac{1}{2}y^2 \right]_0^2 \left[\frac{1}{2}z^2 \right]_1^3 \left[x \right]_0^1$$

$$= 8 \quad (+2 \text{ di prima} = 10)$$

Formula 3 = 2+1 INTEGRALE PER COLONNE

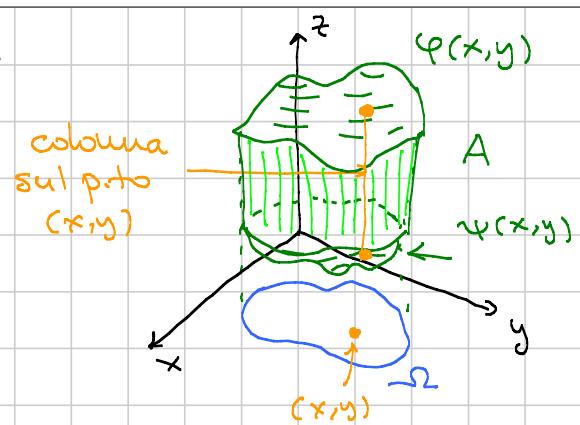
Definizione Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice NORMALE rispetto al piano xy se è della forma

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, \psi(x, y) \leq z \leq \varphi(x, y) \}$$

La formula di integrazione diventa

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_{\varphi(x, y)}^{\varphi(x, y)} f(x, y, z) dz$$

integrale in una variabile (z)
tra $\varphi(x, y)$ e $\varphi(x, y)$



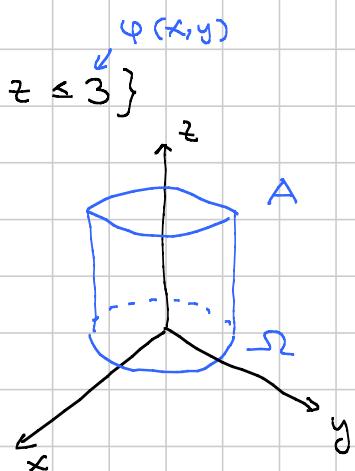
Esempio $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$

$$f(x, y, z) = z$$

A è normale rispetto al piano xy con
base $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$

$$\iiint_A z dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_0^3 dz \cdot z$$

colonna

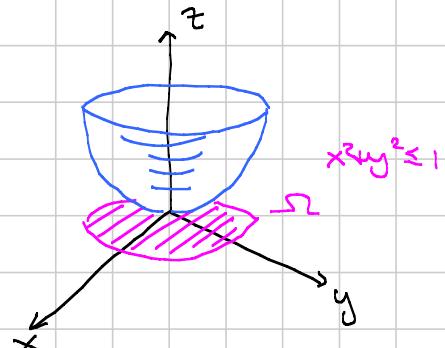


$$\begin{aligned} \text{(primitiva in } z\text{)} &= \iint_{\Omega} dx dy \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=0}^{z=3} = \frac{9}{2} \iint_{\Omega} dx dy \\ &= \frac{9}{2} \text{ Area } (\Omega) = \frac{9}{2} \cdot 2\pi = 9\pi \end{aligned}$$

Esempio $f(x, y, z) = z$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 \leq z \leq 1}_{\varphi(x, y) \leq z \leq \varphi(x, y)}\}$

"Sopra il paraboloid $z = x^2 + y^2$,
sotto il piano $z = 1$ "

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 \leq z \leq 1}_{\text{colonna}}\}$$



A questo punto

integrale sulla colonna

$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz = \iint_{\Omega} dx \, dy \int_{x^2+y^2}^z dz = z \quad (\text{primitiva in } z)$$

$$= \iint_{\Omega} dx \, dy \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=x^2+y^2}^{z=1}$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [1 - (x^2+y^2)^2] dx \, dy$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} 1 dx \, dy - \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (x^2+y^2)^2 dx \, dy$$

$$= \frac{1}{2} \text{Area}(\Omega) - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^4 \cdot \rho \, d\theta \, d\rho$$

$$= \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \cdot 2\pi \int_0^1 \rho^5 d\rho$$

$$= \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{6} \pi = \boxed{\frac{1}{3} \pi}$$

ANALISI 2

-

LEZIONE 035

Titolo nota

03/11/2015

Formula di riduzione $3 = 1+2$

Integrazione per SEZIONI

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{S_z} f(x, y, z) dx dy$$

dove

 $\rightarrow [a, b]$ è l'insieme in cui varia z in A $\rightarrow S_z$ è la sezione di A ad altezza z , cioè

$$S_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in A\}$$

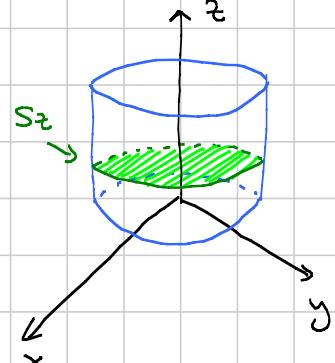
Esempio 1 Esercizio della lezione precedente con $f(x, y, z) = z$
 e $A = \text{cilindro} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$

$$\iiint_A z dx dy dz = \int_0^3 dz \iint_{S_z} dx dy$$

$$= \int_0^3 z dz \iint_{S_z} dx dy$$

$$= \int_0^3 dz z \cdot \text{Area}(S_z)$$

$$= 2\pi \int_0^3 z dz = \pi [z^2]_{z=0}^{z=3} = 9\pi$$

Esempio 2 $f(x, y, z) = \sin x + z^2$ $A = \text{cono con base } x^2 + y^2 = 36 \text{ e vertice in } (0, 0, 1)$

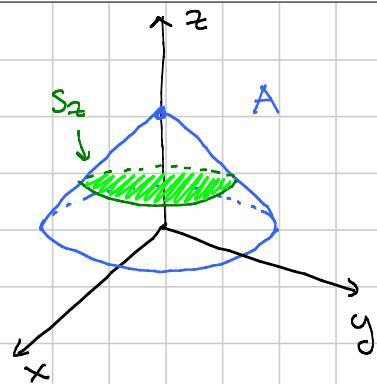
Abbiamo almeno 2 opzioni

→ normale rispetto al piano (x, y)

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 36 \leftarrow \text{base } \Omega$$

$$0 \leq z \leq 1 - \frac{1}{6} \sqrt{x^2 + y^2} \}$$

colonna sul pto (x, y) in cui
uso eq. del cono per il "tappo a tto"



$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_0^{1 - \frac{1}{6} \sqrt{x^2 + y^2}} (\sin x + z) dz$$

per colonna = (fare ...)

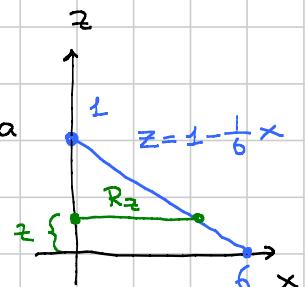
→ per sezioni

$$\iiint_A \dots = \int_0^1 dz \iint_{S_z} dx dy (\sin x + z)$$

Bisogna capire di che è S_z = cerchio di raggio R_z
che dipende dall'altezza

$$z = 1 - \frac{1}{6} R_z, \quad 6z = 6 - R_z, \quad R_z = 6(1-z)$$

(controllo per $z=0, z=1$
viene sensato)



$$\begin{aligned} \iiint_A z dx dy dz &= \int_0^1 dz \iint_{S_z} dx dy z = \int_0^1 dz \cdot z \cdot \text{Area}(S_z) = \\ &= \int_0^1 z \cdot 6^2 (1-z)^2 \pi dz = \text{Analisi 1} \end{aligned}$$

$$\iiint_A \sin x dx dy dz = 0 \text{ per simmetria !!!}$$

Utilizzo delle simmetrie per semplificare alcuni calcoli

Caso degli integrali di Analisi 1:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad \text{se } f \text{ dispari}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad \text{se } f \text{ è pari}$$

Slogan: f dispari in x , insieme simmetrico (cioè $[-a, a]$)
 $\Rightarrow \int_A f = 0$.

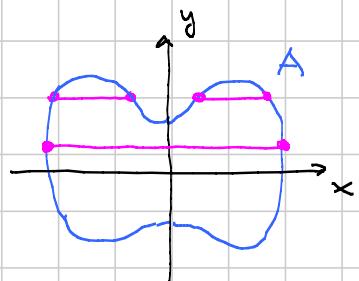
Caso degli integrali doppi

Slogan: $\rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^2$ simmetrico rispetto all'asse y , cioè
 $(x, y) \in A \Leftrightarrow (-x, y) \in A$

$\rightarrow f(x, y)$ dispari in x , cioè
 $f(-x, y) = -f(x, y) \quad \forall (x, y) \in A$

Allora $\iint_A f(x, y) dx dy = 0$

[Dim. quando integro in dx sono
nella stessa situazione di Analisi 1]



Se invece $f(-x, y) = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in A$ simmetrico come
allora

$$\iint_A f(x, y) dx dy = 2 \iint_{A^+} f(x, y) dx dy$$

↑ metà destra di A
(costruita)

Gli stessi discorsi valgono, con la stessa dim., in 3 o più
variabili

Tornando all'esempio $\iiint_A \sin x \, dx \, dy \, dz = 0$

perché: $\rightarrow \sin x$ è dispari in x

\rightarrow l'insieme A è simmetrico nel senso che

$$(x, y, z) \in A \Leftrightarrow (-x, y, z) \in A.$$

— o — o —

Analogamente, sullo stesso A , sarebbero nulli gli integrali di

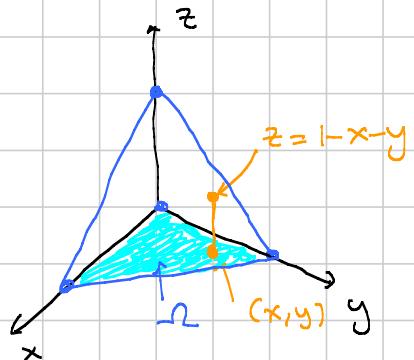
$$xy, \underbrace{x^2 \arctan y}_{\text{dispari in } y}, \underbrace{\sin(xz)}_{\text{dispari in } x}, \text{ ma non } x^2 y^2$$

Esempio (Esercizio della tenuta) $f(x, y, z) = x$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$$

$x+y+z=1 \rightsquigarrow$ piano per i 3 vettori
della base canonico

A è un tetraedro particolare.



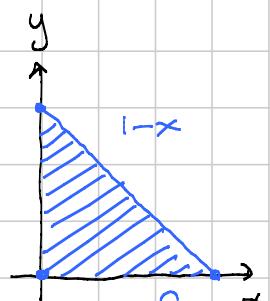
Per colonna l'integrale diventa

$$\iint_A x \, dx \, dy \, dz = \iint_{\Omega} dx \, dy \int_0^{1-x-y} dz \, x$$

colonna su (x, y)

$$= \iint_{\Omega} x \, dx \, dy \int_0^{1-x-y} dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \, x = \int_0^1 x \, dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz$$



Avessi voluto procedere per sezioni

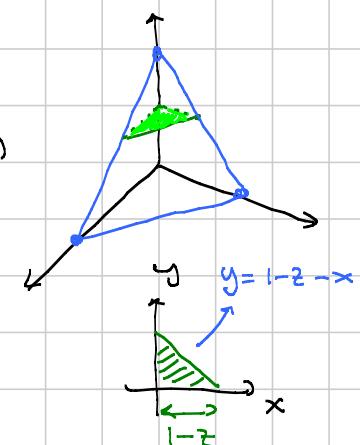
$$\iiint_A x \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 dz \iint_{S_z} x \, dx \, dy = (\star)$$

Ora S_z è un triangolo descritto da

$$S_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1 - z\}$$

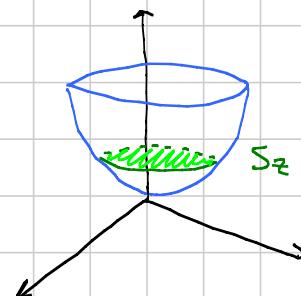
$$(\star) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \int_0^{1-z-x} dy \, x$$

triangolo S_z come insieme limitato risp. asse x



Esempio Rifacciamo l'esempio con

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 1 \quad \text{e} \quad f(x, y, z) = z$$



Per sezioni diventa:

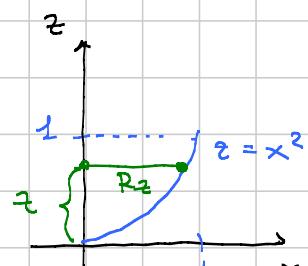
$$\begin{aligned} \iiint_A z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 dz \iint_{S_z} z \, dx \, dy = (\star) \\ &= \int_0^1 z \, dz \iint_{S_z} dx \, dy = \int_0^1 z \cdot \text{Area}(S_z) \, dz = (\star) \end{aligned}$$

S_z = cerchio di raggio R_z , quindi

$$z = R_z^2, \text{ cioè } R_z = \sqrt{z}$$

$$= \int_0^1 z \cdot \pi z \, dz = \pi \int_0^1 z^2 \, dz = \frac{1}{3} \pi.$$

— o — o —



ANALISI 2

LEZIONE 036

Titolo nota

04/11/2015

COORDINATE CILINDRICHE (in \mathbb{R}^3) (x, y, z) cartesiane

(ρ, θ, z) cilindriche
 ↓ polari corrispondenti a x e y

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta \quad z = z$$

Esempio $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 3, |z| \leq 4\}$
 in coord. cilindriche diventa

$$0 \leq \rho \leq \sqrt{3} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad -4 \leq z \leq 4$$

Negli integrali

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz$$

↑
 Descrizione di A
 in coord. cilindriche

↓
 J = pagamento

— o — o —

COORDINATE SFERICHE

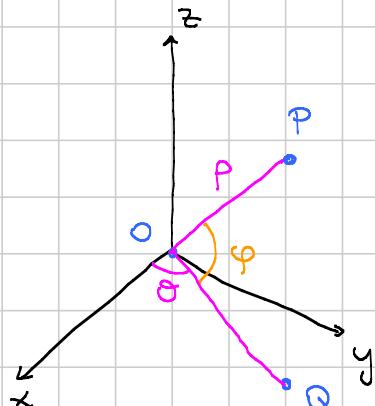
Coord. sferiche (alla moda dei geografi).

Dato $P \in \mathbb{R}^3$, si definisce Q come la proiezione di P sul piano xy e poi si definisce

→ $\rho = \text{lunghezza di } OP \quad (\rho \geq 0)$

→ $\varphi = \text{angolo tra } OP \text{ e } OQ \text{ (angolo tra } OP \text{ e piano } xy) \quad (\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$

→ $\theta = "s \text{ di } Q" = \text{angolo tra } OQ \text{ e semiasse } x > 0 \quad (\theta \in [0, 2\pi])$



Interpretazione geografica:

→ φ è la LATITUDINE di P

$$\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

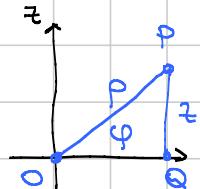
→ θ è la LONGITUDINE di P

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

Casi particolari:

→ L'origine ha $\rho=0$ e $\theta = \varphi$ con senso

→ i p.ti dell'asse z che hanno $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oppure $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ e θ non definito.



Formule di passaggio:

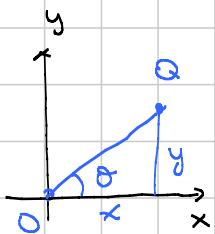
$$z = \rho \sin \varphi$$

$$x = \rho \cos \varphi \cos \theta$$

$$z = OP = \rho \sin \varphi$$

$$x = OQ \cdot \cos \theta = \rho \cos \varphi \cos \theta$$

$$y = OQ \cdot \sin \theta = \rho \cos \varphi \sin \theta$$



In conclusione

$$x = \rho \cos \varphi \cos \theta$$

$$y = \rho \cos \varphi \sin \theta$$

$$z = \rho \sin \varphi$$

Viceversa

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Determinante J da usare negli integrali.

Si parte dalla matrice

$$\begin{pmatrix} x_P & y_P & z_P \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \end{pmatrix}$$

esercizio

$$\Rightarrow \text{Det} = \downarrow \boxed{\rho^2 \cos \varphi}$$

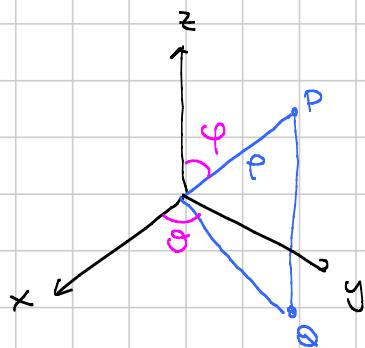
Formula per gli integrali

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B f(\rho \cos \varphi \cos \theta, \dots, \dots) \rho^2 \cos \varphi d\rho d\theta d\varphi$$

B
↑
Descrizione di A in coord. sferiche

Achtung! Molti (in particolare i fisici) usano un'altra convenzione per le sferiche con

→ φ = angolo tra OP e semiasse positivo delle z



Conseguenze

→ φ varia da $[0, \pi]$

→ nelle formule si scambiano $\sin \varphi$ e $\cos \varphi$

Esempio 1 $\iiint_S z^2 dx dy dz$ $S =$ sfera con centro in 0 e raggio 2

$$= \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \underbrace{\rho^2 \sin^2 \varphi}_{z^2} \underbrace{\rho^2 \cos \varphi}_J$$

sfera in coordinate sferiche

$$= \underbrace{\int_0^2 \rho^4 d\rho}_{\frac{32}{5}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi}_{\left[\frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{128}{15} \pi$$

Esempio 2 $\iiint_S x^2 dx dy dz$ è uguale per simmetria, ma il calcolo con la formula sarebbe più complicato (c'è anche θ)

Cambio di variabili in generale: funziona come in \mathbb{R}^2 solo che il Det del Jone è 3×3 .

Esempio 3 $\iiint_S y^2 dx dy dz$ $S =$ sfera di raggio 2 e centro in $(5, 3, 4)$

Equazione sfera: $\underbrace{(x-5)^2}_u + \underbrace{(y-3)^2}_v + \underbrace{(z-4)^2}_w \leq 4$

$$\iiint_S y^2 dx dy dz = \iiint_{S'} (v+3)^2 du dv dw$$

\downarrow S' J=1 perché è una trasformazione
sfera $u^2 + v^2 + w^2 \leq 4$

$$= \iiint_{S'} (v^2 + 6v + 9) du dv dw = \frac{128}{15} \pi + \frac{9 \cdot 32}{3} \pi$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $\frac{128}{15} \pi \quad 0 \quad 9 \cdot \text{Vol}(S') = 9 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3$

Esempio 4 Volume della sfera di raggio $R = \iiint_S 1 dx dy dz$

1° modo Coord. sferiche

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R \rho^2 \cos\varphi \cdot 1 \cdot \rho^2 \cos\varphi d\rho d\varphi d\theta d\varphi d\rho = \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi d\theta d\rho$$

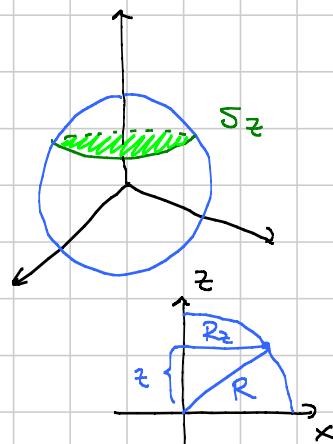
$\frac{4}{3} \pi R^3$ $\frac{1}{2} R^3$ 2π 2

2° modo Per sezioni

$$\int_{-R}^R dz \iint_{S_z} 1 dx dy = \int_{-R}^R \text{Area}(S_z) dz$$

Area(S_z) $= \int_{-R}^R \pi R_z^2 dz$

$$= \pi \int_{-R}^R (R^2 - z^2) dz = \text{si conclude}$$



3^o modo Proviamo per colonna.

$$\text{Base} = \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\}$$

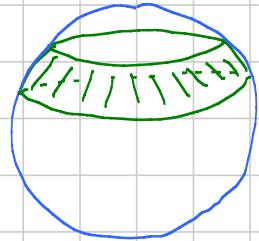
Quindi

$$\begin{aligned} \iiint_S z \, dx \, dy \, dz &= \iint_{\Omega} dx \, dy \int_{-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} z \, dz = 2 \iint_{\Omega} dx \, dy \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \\ &= 2 \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho = 4\pi \int_0^R \rho \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho \\ &= 4\pi \left[\frac{2}{3} [R^2 - \rho^2]^{3/2} \left(-\frac{1}{2} \right) \right]_0^R \\ &= \frac{4\pi}{3} R^3 \end{aligned}$$

Esempio 5 Segmento sferico $\{(x, y, z) \in S : a \leq z \leq b\} = S_{a,b}$

Per settori promette bene

$$\begin{aligned} \iiint_{S_{a,b}} z \, dx \, dy \, dz &= \int_a^b dz \iint_{S_z} z \, dx \, dy \\ &= \pi \int_a^b R_z^2 dz \\ &= \pi \int_a^b (R^2 - z^2) dz \\ &= \pi \left\{ R^2(b-a) - \frac{1}{3}(b^3 - a^3) \right\} \end{aligned}$$



Casi speciali : $a=0$ e $b=R \Rightarrow \pi \left\{ R^3 - \frac{1}{3} R^3 \right\} = \frac{2\pi}{3} R^3$
 $a=-R$ e $b=R \Rightarrow$ tutta la sfera.

ANALISI 2

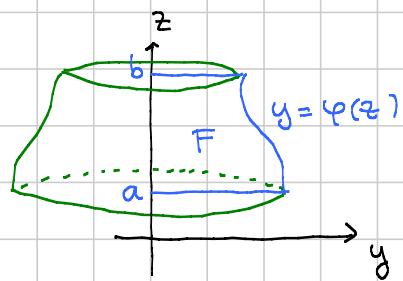
LEZIONE 037

Titolo nota

04/11/2015

SOLIDI DI ROTAZIONE

Figura F nel piano yz che ruotando intorno all'asse z descrive un solido S .



Nel caso nel disegno

$$F = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : a \leq z \leq b, 0 \leq y \leq \underline{\varphi(z)}\}$$

descrive il profilo della figura F

Descrizione del solido S :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b, 0 \leq \underline{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \varphi(z)\}$$

distanza
dall'asse z

In coordinate cilindriche diventa

$$a \leq z \leq b \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 0 \leq \rho \leq \underline{\varphi(z)}$$

Se mi interessa solo la sup. laterale, l'eq. è $\sqrt{x^2 + y^2} = \varphi(z)$

Esempio

$$\underline{x^2 + y^2 + z^4 = 8}$$

$$x^2 + y^2 = 8 - z^4$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \underline{\sqrt{8 - z^4}}$$

$\varphi(z)$

Solido rot.
intorno asse z

$$\underline{x^2 + y^4 + z^2 = 8}$$

$$x^2 + z^2 = 8 - y^4$$

$$\sqrt{x^2 + z^2} = \underline{\sqrt{8 - y^4}}$$

Solido rotat.
intorno asse y

$$\underline{x^4 + y^4 + z^2 = 8}$$

NO solido

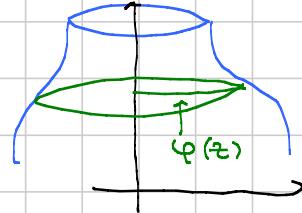
di rot.

Volume di un solido di rotazione

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b, 0 \leq x^2 + y^2 \leq \varphi^2(z)\}$$

1° modo Per sezioni

$$\begin{aligned} \iiint_S z \, dx \, dy \, dz &= \int_a^b dz \iint_{S_z} dx \, dy \\ &= \int_a^b \text{Area}(S_z) \, dz \\ &= \pi \int_a^b \varphi^2(z) \, dz \end{aligned}$$



$$\text{Vol}(S) = \pi \int_a^b \varphi^2(z) \, dz$$

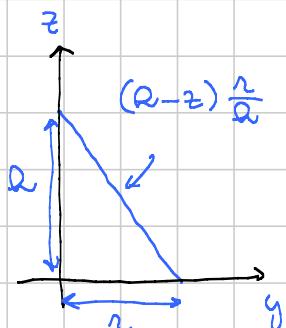
2° modo Coord. cilindriche

$$\begin{aligned} \int_a^b dz \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\varphi(z)} d\rho \rho &= \int_a^b dz \int_0^{\pi} d\theta \left[\frac{1}{2} \rho^2 \right]_{\rho=0}^{\rho=\varphi(z)} \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b dz \int_0^{\pi} d\theta (\varphi^2(z)) \\ &= \pi \int_a^b \varphi^2(z) \, dz \end{aligned}$$

Esempio Volume cono $\varphi(z) = \frac{R}{z} (R-z)$

$$\text{Vol}(\text{cono}) = \int_0^R \frac{R^2}{R^2} (R-z)^2 dz \cdot \pi$$

$$= \text{controllare che venga } \frac{1}{3} \pi R^2 R$$



BARICENTRI E MOMENTI D'INERZIA

Def. Dato un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$, si dice **BARICENTRO** di A il punto $G = (x_G, y_G)$ dove

$$x_G = \frac{1}{\text{Area}(A)} \iint_A x \, dx \, dy$$

valor medio della coordinate
 x in A

$$y_G = \frac{1}{\text{Area}(A)} \iint_A y \, dx \, dy$$

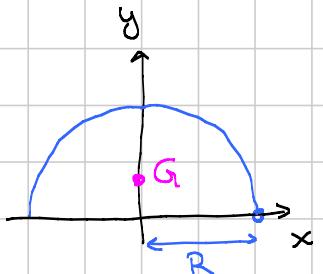
valor medio di y in A

Oss. Se approssimo una figura con tanti quadratini e faccio il baricentro dei centri dei quadratini, sto costituendo le somme di Riemann per i 2 integrali.

Def In \mathbb{R}^3 è analogo, solo che ho 3 coordinate e divido per il Volume

Esempio 1 Baricentro di una semicirconferenza

$$\text{Area} = \frac{\pi}{2} R^2 \quad x_G = 0 \text{ per simmetria}$$



$$\begin{aligned} \iint_A y \, dx \, dy &= \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \rho \sin\theta \cdot \rho \\ &= \underbrace{\int_0^R \rho^2 \, d\rho}_{\frac{1}{3} R^3} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta}_{2} = \frac{2}{3} R^3 \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } y_G = \frac{\iint_A y \, dx \, dy}{\text{Area}} = \frac{2}{3} R^3 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{R^2} = \frac{4}{3\pi} R$$

Oss. Se ho densità $\rho(x, y)$ variabile, allora

$$x_G := \frac{\iint_A \rho(x) \cdot x \, dx \, dy}{\iint_A \rho(x) \, dx \, dy}$$

y_G := stessa cosa

Esempio 2 Baricentro della semisfera $x_G = y_G = 0$

$$\text{Volume} = \frac{2}{3} \pi R^3$$

$$\begin{aligned} \iiint_S z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \, d\varphi \frac{\rho \sin \varphi}{z} \frac{\rho^2 \cos \varphi}{J} \\ &= \int_0^R \rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{4} R^4 \\ &\quad \left[\frac{1}{4} R^4 \right] \left[\frac{3}{8} \right] \left[-\frac{1}{4} \cos(2\varphi) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } z_G = \frac{\frac{\pi}{4} R^4}{\frac{3}{8} \pi R^3} = \frac{3}{8} R$$

$$\text{Confronto con semicerchio } \frac{3}{8} < \frac{4}{3\pi} \Leftrightarrow 9\pi < 32$$

Il baricentro della semisfera sta sotto quello della semicirc.

TEOREMA GULDINO 1

Il volume di un solido di rotazione è uguale all'area della figura che ruota moltiplicata per la lung. della circ. descritta dal baricentro della figura durante la rotazione.

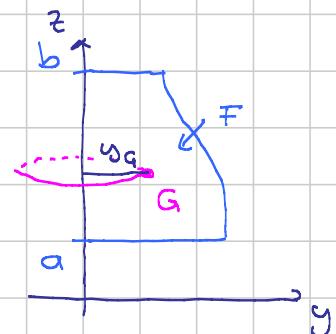
Dim. Dico dimostrare che

$$\text{Vol}(S) = \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G$$

$$\text{Calcolo } y_G = \frac{1}{\text{Area}(F)} \cdot \iint_F y \, dy \, dz$$

quindi devo dimostrare che

$$\text{Vol}(S) = 2\pi \iint_F y \, dy \, dz$$



Ma

$$\iint_F y \, dy \, dz = \int_a^b dz \int_0^{\varphi(z)} y \, dy = \int_a^b dz \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{\varphi(z)} = \frac{1}{2} \int_a^b \varphi^2(z) \, dz$$

Quindi mi sono ridotto a

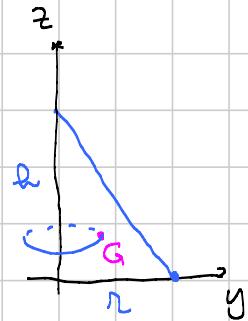
$$\text{Vol}(S) = \pi \int_a^b \varphi^2(z) \, dz$$

che è la formula trovata all'inizio.

— o — o —

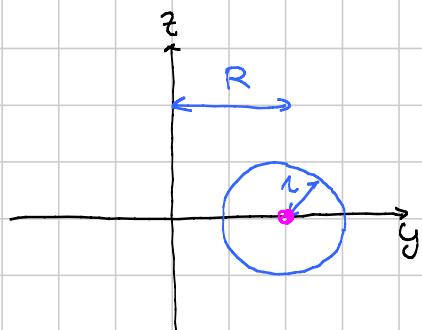
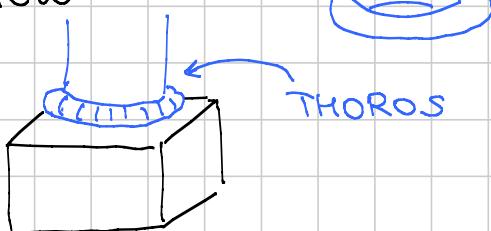
Esempi① Cono : $\text{Area}(F) = \frac{1}{2} R r$ Baricentro : $G = \left(\underbrace{\frac{1}{3} r}_{\text{Area}}, \frac{1}{3} R \right)$

$$\text{Volume} = \underbrace{\frac{1}{2} R r}_{\text{Area}} \cdot 2\pi \underbrace{\frac{1}{3} r}_{\text{Altura}} = \frac{1}{3} \pi r^2 R$$



② Sfera e cilindro vengono facili.

③ Toro



$$\text{Vol}(\text{Toro}) = \underbrace{\pi r^2}_{\text{area}} \underbrace{2\pi R}_{2\pi y_G} = 2\pi^2 r^2 R$$

Oss. Guidino 1 vale per qualunque figura F contenuta nel semipiano $y \geq 0$

— o — o —

ANALISI 2 - LEZIONE 038

Titolo nota

06/11/2015

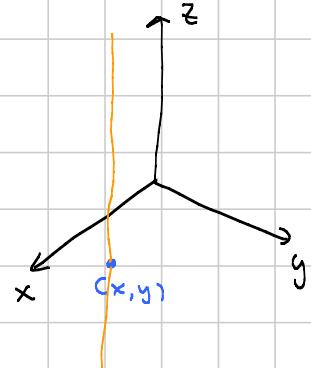
Piccolo commento sulle formule di riduzionePer esempio prendiamo la $3 = 2 + 1$

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z) dx dy dz &\leq \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy \int_{\mathbb{R}} f(x,y,z) dz \\ &\leq \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy \int_{\mathbb{R}}^* f(x,y,z) dz \leq \iiint_{\mathbb{R}^3}^* f(x,y,z) dx dy dz \end{aligned}$$

Vogliendo potrei definire

$$c_*(x,y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y,z) dz$$

$$c^*(x,y) = \int_{\mathbb{R}}^* f(x,y,z) dz$$



Con queste notazioni posso riscrivere

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f \leq \iint_{\mathbb{R}^2} c_*(x,y) \leq \iint_{\mathbb{R}^2} c^*(x,y) \leq \iiint_{\mathbb{R}^3}^* f$$

Questa formula vale per ogni $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e nulla fuori da un limitato.

Se suppongo che per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ valga $c_*(x,y) = c^*(x,y)$, e che $f(x,y,z)$ sia integrabile su \mathbb{R}^3 , allora

- la funzione $c(x,y)$ è integrabile su \mathbb{R}^2
- valgono tutti gli = nella formula.

La formula generale si dimostra come in \mathbb{R}^2 , cioè

- si osserva che è banale per i parallelepipedi con lati \parallel assi
- si estende per linearità alle SF
- nel caso generale si considera $SF \geq f$ e $\leq f$ e si fa sup e inf.

La formula per regioni è la stessa cosa

$$\iint_{\mathbb{R}^3} f \leq \int_{\mathbb{R}} S_*(z) dz \leq \int_{\mathbb{R}} S^*(z) dz \leq \iint_{\mathbb{R}^3} f$$

dove

$$S_*(z) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y, z) dx dy \quad S^*(z) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y, z) dx dy$$

Quando abbiamo integrali su \mathbb{R}^n abbiamo formule analoghe del tipo $m = k + (n-k)$.

— o — o —

Teorema della media integrale

chiusa

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sia $r > 0$, e sia $f: \overline{B}_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo f continua in tutto l'insieme.

Allora esiste almeno un p.t.o $c \in \overline{B}_r(x_0)$ t.c.

$$\begin{aligned} \iint_{\overline{B}_r(x_0)} f(x) &= f(c) \cdot \text{meas}(\overline{B}_r(x_0)) \\ &= \int_{\overline{B}_r(x_0)} 1 \end{aligned}$$

Dim. (stessa di Analisi 1) Sia m ed M il min e max di f nella palla (esistono per W.). Allora

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in \overline{B}_r(x_0)$$

Per monotonia e linearietà dell'integrale

$$m \int_B 1 \leq \int_B f \leq M \int_B 1 = \text{meas}(B)$$

Ma allora $m \leq \frac{1}{\text{meas}(B)} \int_B f \leq M$. Visto che f è

continua e B è connessa esiste un p.t.o t.c. $f(c) =$

Oss. Non è importante essere in $\overline{B}_R(x_0)$, ma basta un compatto, connesso, misurabile.

Oss. La media integrale è il valore che dovrebbe avere una funzione costante per avere lo stesso integrale di $f(x)$.

MOMENTO D'INERZIA (di una figura piana / solida rispetto ad un asse)

Per definizione è

doppio o
triplo a
seconda dei casi

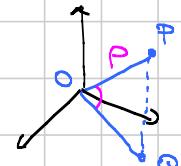
$$\int_F \text{dist}^2(x, \text{asse}) dx$$

assumendo
densità
costante

$$\int_F \rho(x) \cdot \text{dist}^2(x, \text{asse}) dx$$

Esempio 1 Calcolare momento d'inerzia di una sfera rispetto ad un asse passante per il centro.

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\} \quad \text{Asse } z$$



$$\iiint_S (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \underbrace{\rho^2 \cos^2 \varphi \cdot \rho \cos \varphi}_{x^2 + y^2} J$$

dist² dall'asse z

$$= \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos^3 \varphi$$

$\frac{R^4}{4}$ 2π $\frac{\pi}{2}$

un passaggio per parti

Esempio 2 Momento d'inerzia di un cilindro rispetto all'asse.

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2, 0 \leq z \leq R\} \quad \text{asse } z$$

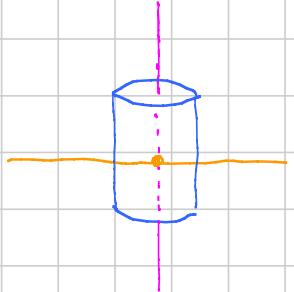
$$\iiint_C (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dz \rho^2 \cdot \rho =$$

cilindrico

$$= \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{\pi} d\theta \int_0^R dz = \frac{1}{2} \pi R^4 R$$

$\frac{1}{4} R^4$ 2π R

Esempio 3 Momento di un cilindro rispetto ad un asse passante per il centro e perpendicolare all'asse del cilindro stesso.



$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2, -\frac{R}{2} \leq z \leq \frac{R}{2}\}$$

Così il centro è nell'origine e posso usare l'asse x

$$\iiint_C (y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^R \int_0^{\pi} \int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} (y^2 + z^2) \rho^2 \sin^2 \theta + z^2 \rho d\rho d\theta dz$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 distanza² del generico
 punto (x, y, z) dall'asse x

Lo sperimentalo in 2 integrali

$$\int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} dz = \frac{\pi}{4} R^4 R$$

$\frac{1}{4} R^4$ π R

$$\int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} z^2 dz = \frac{\pi}{12} R^2 R^3$$

$\frac{1}{2} R^2$ 2π $\frac{1}{3} 2 \frac{R^3}{8}$

— o — o —

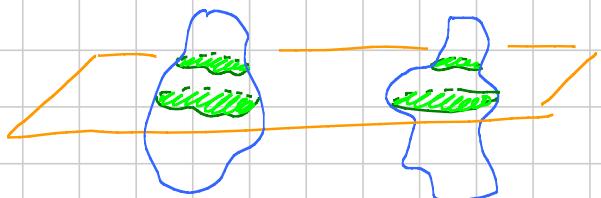
PRINCIPIO DI CAVALIERI

In versione \mathbb{R}^3 : due figure solide che determinano sezioni di area uguale rispetto ad una stessa famiglia di piani paralleli hanno lo stesso volume.

[Dim: calcolo del volume per sezioni]

$$\text{Vol}(S) = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \text{Area}(S_z) dz$$

se le aree sono uguali,
i volumi sono uguali



Preliminarmente, ho sistemato gli assi in modo che i piani paralleli siano quelli $z = \lambda$]

In \mathbb{R}^2 vale lo stesso discorso, solo con la lunghezza delle sezioni.

Esempio



Tutte le sezioni con rette \parallel asse x hanno la stessa lunghezza.

Oss. È importante che sia la STESSA famiglia di piani o rette parallele.



$a > b$ per ogni punto della diagonale

INTEGRALI CON VALORI ASSOLUTI

Strategie : → cavarsela con le simmetrie
 → spezzare la zona di integrazione

$$\text{Esempio 1} \quad \iint_A |y| dx dy = \iint_A y dx dy$$



$$= 2 \iint_B y dx dy = 2 \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \rho \sin \theta \cdot \rho d\theta$$

$$= 2 \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \frac{2}{3}$$

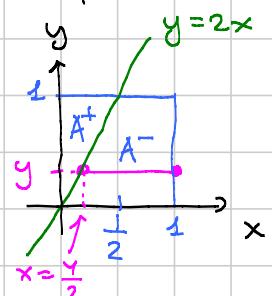
1 " 1

$$\text{Esempio 2} \quad \iint_A |x| dx dy \quad A = \text{semicerchio di prima}$$

$$= 2 \iint_B |x| dx dy = 2 \iint_B x dx dy = \frac{2}{3} \text{ come prima}$$

$$\text{Esempio 3} \quad \iint_A |y-2x| dx dy \quad A = [0,1] \times [0,1]$$

$$|y-2x| = \begin{cases} y-2x & \text{in } A^+ \\ -y+2x & \text{in } A^- \end{cases}$$



$$\iint_A |y-2x| dx dy = \iint_{A^+} (y-2x) dx dy + \iint_{A^-} (2x-y) dx dy$$

$$- \iint_{A^-} (y-2x) dx dy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{2x}^1 dy (y-2x) + \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{2x} dy (2x-y) + \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_0^1 dy (2x-y)$$

1 " 1

= conti

$$\int_0^1 dy \int_{\frac{1}{2}}^1 dx (2x-y)$$

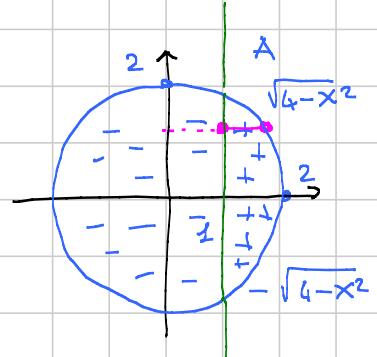
Oss. Si poteva fare

$$\iint_A |y-2x| dx dy = \underbrace{\iint_A (2x-y) dx dy}_{\text{quadrato}} + 2 \underbrace{\iint_{A^+} (y-2x) dx dy}_{\text{triangolo}}$$

$$\iint_{A^+} (2x-y) + \iint_{A^-} (2x-y)$$

Esempio 4 $\iint_A |x-1| dx dy$

$$= \iint_{A^+} (x-1) dx dy - \iint_{A^-} (x-1) dx dy$$



Oppure come nell' osservazione precedente

$$\underbrace{\iint_A (1-x) dx dy}_{\text{Bianale: Area}} + 2 \iint_{A^+} (x-1) dx dy$$

$$= 4\pi$$

Resta da calcolare $\iint_{A^+} (x-1) dx dy$. Tre strategie possibili

1° modo Normale asse x :

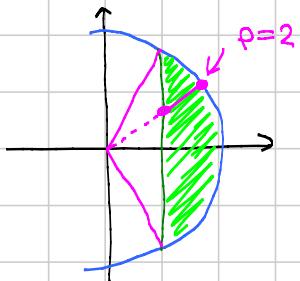
$$\int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x-1) dy = \int_1^2 (x-1) \cdot 2\sqrt{4-x^2} dx = \text{analisi 1 seccante}$$

2° modo Normale asse y : $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dy \int_1^{\sqrt{4-y^2}} (x-1) dx = \text{si fa}$

3° modo Polari dirette $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right]$

$$x = 1 \quad \rho \cos \theta = 1 \quad \rho = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\frac{1}{\cos \theta} \leq \rho \leq 2$$



L'integrale diventa

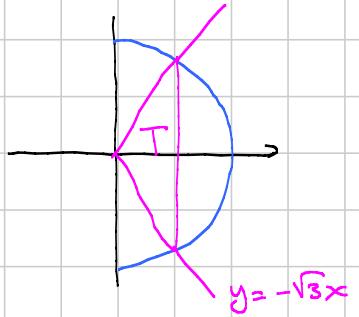
$$\begin{aligned}
 & \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^1 d\rho [\rho \cos\theta - 1] \rho \\
 & = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^1 d\rho [\rho^2 \cos\theta - \rho] = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \left[\frac{1}{3} \rho^3 \cos\theta - \frac{1}{2} \rho^2 \right] \\
 & = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \left(\frac{1}{3} \cos\theta - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2\theta} \right) = \text{analisi 1 facile}
 \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2\theta} = \tan\theta$$

$$y = \sqrt{3}x$$

4° modo Settore - triangolo

settore



$$\iint_{A^+} = \int_0^2 d\rho \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta (\rho \cos\theta - 1) \rho - \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{3}x}^{\sqrt{3}x} dy (x-1)$$

triangolo



$$\begin{aligned}
 \text{Esempio 5} \quad & \iiint_S |x-1| dx dy dz \\
 & S
 \end{aligned}$$

$S =$ sfera con centro nell'origine
e raggio 2

Osservo che è uguale a $\iiint_S |z-1| dx dy dz$ e questo lo faccio per settori lungo asse z.

$$\begin{aligned}
 \iiint_S |z-1| dx dy dz & = \int_{-2}^2 dz |z-1| \cdot \text{Area}(S_z) \\
 & = \int_{-2}^2 dz |z-1| \cdot \pi R_z^2 = \pi \int_{-2}^2 |z-1| (4-z^2) dz \\
 & = \text{analisi 1 con valore assoluto.}
 \end{aligned}$$

Esempio 6 $\iint_Q \sqrt{x^2+y^2} dx dy$ $Q = [0,1] \times [0,1]$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \sqrt{x^2+y^2}$$

si fa con la comoda sostituzione

$$y = x \sin \theta$$

Provo in polari. Per simmetria

$$\begin{aligned} \iint_Q \sqrt{x^2+y^2} dx dy &= 2 \iint_T \sqrt{x^2+y^2} dx dy & \rho \cos \theta = 1 & \theta = \frac{1}{\cos \theta} \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} \rho \cdot \rho d\rho & \sqrt{x^2+y^2} & \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \left[\rho^3 \right]_0^{\frac{1}{\cos \theta}} = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta &= \int \frac{\cos \theta}{\cos^4 \theta} d\theta = \int \frac{\cos \theta}{(1-\sin^2 \theta)^2} d\theta = \int \frac{dt}{(1-t^2)^2} \\ &= \text{si fa.} \end{aligned}$$

Esempio 7 $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underline{x^2+z^2 \leq 1}, \underline{y^2+z^2 \leq 1}\}$

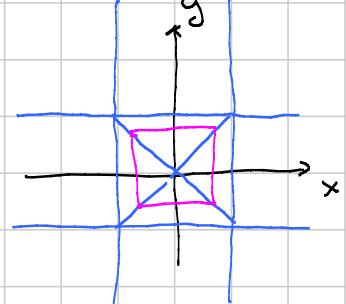
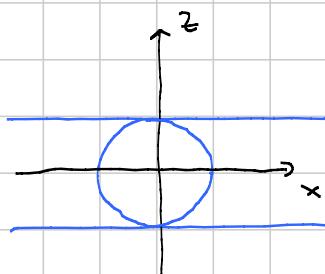
cilindro
asse y

cilindro
asse x

$$\text{Vol}(S) =$$

$$= \int_{-1}^1 dz \text{ Area}(S_z)$$

Chi è S_z ?



Fisso z , e voglio capire dove variano x e y : dalle equazioni

$$x^2 \leq 1-z^2, y^2 \leq 1-z^2, \text{ cioè } |x| \leq \sqrt{1-z^2}, |y| \leq \sqrt{1-z^2}$$

La sezione è un quadrato di lato $2\sqrt{1-z^2}$

In conclusione

$$\int_{-1}^1 \text{Area}(S_z) dz = 4 \int_{-1}^1 (1-z^2) dz = \text{s' fa banale}$$

Oss. L'area $4(1-z^2)$ è, a meno di fattori π , la stessa che si ottiene sezionando una sfera.

Quindi per il principio di Cavalieri

$$\text{Vol}(S) = \frac{4}{\pi} \text{Vol}(\text{sfera di } R=1) = \frac{4}{\pi} \frac{4}{3} \pi = \frac{16}{3}$$

Esercizio vero : aggiungere il terzo cilindro lungo asse z
e trovare

→ volume

→ numero di "farce"

→ superficie (in futuro)

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 040

Titolo nota

10/11/2015

CAMBIO DI VARIABILI NEGLI INTEGRALI MULTIPLI

Def. Siano A e B due aperti di \mathbb{R}^n . Si dice DIFFEOMORFISMO tra A e B una qualunque funzione $\varphi: A \rightarrow B$ di classe C^1 con inversa $\varphi^{-1}: B \rightarrow A$ pure lei di classe C^1 .

Oss. La matrice jacobiana $J_\varphi(x)$ è invertibile in ogni p.t. $x \in A$ e idem per $J_{\varphi^{-1}}(x)$ per $x \in B$. Inoltre per il teo. delle funzioni composte

$$J_{\varphi^{-1}}(\varphi(x)) \cdot J_\varphi(x) = \text{Id} \quad \forall x \in A$$

$$J_\varphi(\varphi(x)) \cdot J_{\varphi^{-1}}(x) = \text{Id} \quad \forall x \in B$$

Teorema Sia $\varphi: A \rightarrow B$ un diffeomorfismo.

Sia $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata con supporto compatto $K \subseteq B$ (cioè $f(x) = 0$ per ogni $x \notin K$).

Allora

$$\int_B^* f(y) dy = \int_A^* f(\varphi(x)) \cdot |\det J_\varphi(x)| dx$$

e idem per gli integrali inferiori.

Oss. In un certo senso generalizza il cambio di variabili di analisi 1:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy = \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx \quad y = \varphi(x)$$

$$\varphi: [a, b] \rightarrow [\varphi(a), \varphi(b)]$$

Non c'è il valore assoluto, ma gli estremi possono venire "scambiati". Ad analisi 1 φ non era per forza invertibile.

Oss. visto che abbiamo usato \int^* e \int_* la formula vale sempre.

Inoltre la funzione al LHS è integrabile \Leftrightarrow lo è quella al RHS ed in tal caso vale tutto con integrali veri.

— o — o —

ROAD MAP

- (1.1) La formula si comporta bene per composizione
- (1.2) Se vale per i rettangoli (cioè f è la funzione caratt. di un rett. $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$), e vale con integrali veri, allora vale sempre
- (2.1) La formula vale se $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una trasformazione affine speciale
- (2.2) Vale per le trasformazioni affini in generale

FINE PRIMA PARTE

1.1 Siano $\varphi_1: A \rightarrow B$ e $\varphi_2: B \rightarrow C$. Se vale per φ_1 e φ_2 , allora vale per $\varphi_3: A \rightarrow C$ definita da $\varphi_3(x) = \varphi_2(\varphi_1(x))$

Dim. Sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ ammmissibile. Allora

$$\begin{aligned}
 \int_C^* f(z) dz &= \int_B^* f(\varphi_2(y)) \cdot |\text{Det } J_{\varphi_2}(y)| dy \\
 &\quad \uparrow B \quad \text{f su } B \\
 &\quad \text{vale per } \varphi_2 \\
 &= \int_A^* f(\varphi_2(\varphi_1(x))) \cdot |\text{Det } J_{\varphi_2}(\varphi_1(x))| \cdot |\text{Det } J_{\varphi_1}(x)| dx \\
 &\quad \uparrow A \\
 &\quad \text{vale per } \varphi_1 \\
 &= \int_A^* f(\varphi_3(x)) \underbrace{|\text{Det } J_{\varphi_3}(x)|}_{\text{Funzione composta}} dx
 \end{aligned}$$

e idem per gli integrali inferiori.

— o — o —

\nearrow con int. veri

1.2 Se vale per i rettangoli per ogni φ appartenente ad una classe di trasformazioni chiusa rispetto al passaggio all' inversa, allora vale per tutte le f per tutte le trasformazioni della classe.

Dico: Step 1 Se vale per i rettangoli con integrali veri, allora vale per le step functions, sempre con integrali veri.

$$\int_B f_R(y) dy = \int_A f_R(\varphi(x)) |\operatorname{Det} J_{\varphi}(x)| dx$$

$$f_R(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \in R \\ 0 & \text{se } y \notin R \end{cases}$$

$I_1(f) = \text{LHS}$, $I_2(f) = \text{RHS}$ sono applicazioni lineari definite su SF e coincidono in una base, quindi coincidono ovunque. Qui serve che siano integrali veri.

Step 2 Se vale sulle SF, allora prendo una f qualunque e prendo una qualunque SF $g \geq f$ in B (g nulla fuori da B)
Allora

$$\int_B g(y) dy = \int_A \underbrace{g(\varphi(x))}_{\geq f(\varphi(x))} \cdot |\operatorname{Det} J_{\varphi}(x)| dx$$

$$\geq \int_A^* f(\varphi(x)) \cdot |\operatorname{Det} J_{\varphi}(x)| dx$$

\uparrow

Fatto generale: se $g_1 \geq g_2$ e g_1 è integrabile, allora $\int_B g_1 \geq \int_B^* g_2$

Facendo l'inf. su tutte le $g \geq f$ ottengo

$$\int_B^* f(y) dy \geq \int_A^* f(\varphi(x)) \cdot |\operatorname{Det} J_{\varphi}(x)| dx = (\star)$$

Step 3 Ora abbiamo assunto che tutto ciò valga non solo per φ , ma anche per la sua inversa $\varphi: B \rightarrow A$. Ma allora

$$(\star) \geq \int_B^* f(\varphi(\varphi(x))) \underbrace{|\operatorname{Det} J_{\varphi}(\varphi(x))|}_{x} \cdot \underbrace{|\operatorname{Det} J_{\varphi}(x)|}_{1} dx = \int_B^* f(x) dx$$

Quindi sono tutte ugualigiane. Idee per gli integrali definiti

— o — o —

[2.1] Trasf. affini speciali

(A) Traslazioni : è banale che vale per i rettangoli, sono stabili per inversa, quindi vale per le traslazioni

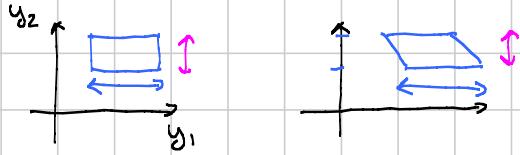
(B) Scambi di coordinate : $M_{ij}(x_1, \dots, x_m) = \text{scambiare } x_i \text{ e } x_j$
 Per queste vale banalmente sui rettangoli, ognuna è l'inversa di se stessa, quindi per queste vale

(C) Dilatazione sulla prima coord : $M_\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, x_2, \dots, x_n)$

Vale per i rettangoli perché il $|\det| = |\lambda|$ compensa il cambio di "volume" del rettangolo. La classe è chiusa per inversa, quindi anche qui vale per ogni funzione.

(D) Somma prime due coordinate $S(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n)$
 $|\det S| = 1$. L'effetto su un rettangolo

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_R(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f_R(\varphi(x)) dx$$



Ancora una vale per i rettangoli, dunque vale in generale perché l'inversa è dello stesso tipo.

[2.2] Trasformazioni affini generali

Ogni trasformazione affine è composizione di trasformazioni di tipo (A), (B), (C), (D) (Lemma di algebra lineare).

Grazie al pto [1.1] se vale per le singole trasformazioni vale anche per la composizione.

Corollario Sia $\varphi(x) = Lx$ una trasformazione lineare.

Sia $S \subseteq B$ un insieme misurabile

Allora

$$\int_B f_S(y) dy = \int_A f_S(\varphi(x)) |\text{Det } L| dx$$

$$\text{meas}(S) = |\text{Det } L| \text{ meas}(\varphi(S))$$

$$\varphi: A \rightarrow B$$

$$\varphi: B \rightarrow A$$

Questo dice come si trasforma la misura degli insiemi.

Analogamente, dato un insieme $K \subseteq A$ misurabile

$$\text{meas}(\varphi(K)) = |\text{Det } L| \text{ meas}(K)$$

Dim. Basterà usare la riga di sopra con $S = \varphi(K)$

— o — o —

Titolo nota

10/11/2015

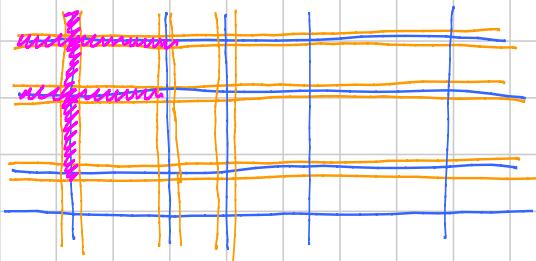
CAMBIO DI VARIABILI IN GENERALE

- ROAD MAP :
- ① Se vale per i cubi con integrali veni per una classe di trasformazioni chiusa rispetto all'inversa, allora vale in generale
 - ② Se vale per i cubi piccoli a meno di ϵ (da specificare), allora vale per i cubi
 - punto verso \rightarrow ③ Vale per i cubi piccoli a meno di ϵ

1 La teoria degli integrali con SF costruite usando i rettangoli coincide con la teoria fatta a partire dai cubi.

"Dim" 1° passo Posso fare la teoria usando solo rettangoli ad estremi razionali

estremi reali

estremi in \mathbb{Q} 

Nelle zone "interne" non modifica la step function.

Nelle zone "ai bordi" la posso $\pm M$, dove M è la costante che limita la funzione.

In termini di integrale la diff può essere una piccola.

2° passo I rettangoli ad estremi razionali sono unione di cubi.

— o — o —

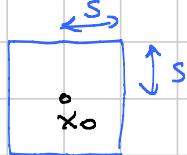
2 Notazione

$$\|x\| := \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|$$

Si definisce

$$C(x_0, s) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - x_0\| \leq s\}$$

↑
cubo con centro in x_0
e semilato s



Supponiamo che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. il cubo $C(y_0, s) \subseteq B$
con $s \leq \delta$ vale la formula

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^{m+1}} \int_A \dots \leq \int_B f_C(y) dy \leq (1+\varepsilon)^{m+1} \int_A f_C(\varphi(x)) |\det J_\varphi(x)| dx$$

↑ vale a meno di ε sui cubi piccoli (di semilato $s \leq \delta$)

Allora vale su tutti i cubi senza l'epsilon.

Dim. Preso un cubo C grande, fissi $\varepsilon > 0$ e scrivo C come unione di cubi piccoli (rispetto ad ε) essenzialmente disgiunti (senza punti comuni in comune)

$$C = \bigcup_{i=1}^k C_i$$



$$\text{Ma allora } f_C(y) = \sum_{i=1}^k f_{C_i}(y)$$

Uso la linearità a LHS, RHS e ottengo

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^{m+1}} \int_A \dots \leq \int_B f_C(y) dy \leq (1+\varepsilon)^{m+1} \int_A f_C(\varphi(x)) |\det J_\varphi(x)| dx$$

Poiché vale per ogni $\varepsilon > 0$ facendo tendere $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ho la tesi.

— o — o —

Cubi e diffeomorfismi Sia $R: U \rightarrow V$ un diffeomorfismo.

Sia

$R^{-1}: V \rightarrow U$ la sua inversa.

Come posso stimare $\|R(u_1) - R(u_2)\|$?

Uso Lagrange sulle singole componenti

$$|R_i(u_1) - R_i(u_2)| = \langle \nabla R_i(\theta_i), u_1 - u_2 \rangle = \langle \text{vettore}, \text{vettore} \rangle$$

$$|\langle v, w \rangle| = |v_1 w_1 + \dots + v_m w_m| \leq |v_1| \cdot |w_1| + \dots + |v_m| \cdot |w_m| \leq (|v_1| + \dots + |v_m|) \|w\|$$

Quindi

$$|R_i(u_1) - R_i(u_2)| \leq \|u_1 - u_2\| \cdot \text{Somma elementi della riga } i\text{-esima di } J_R$$

Questa vale per ogni i , quindi

$$\|R(u_1) - R(u_2)\| \leq \max_{u \in U} \|J_R(u)\| \cdot \|u_1 - u_2\|$$

$$\text{dove } \|J\| = \max_{1 \leq i \leq m} \|\text{riga } i\text{-esima}\|$$

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{pmatrix} \rightarrow R_1 \\ \begin{pmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{pmatrix} \rightarrow R_2 \\ \begin{pmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{pmatrix} \rightarrow R_3 \\ \downarrow \max \\ \|J\| \end{array}$$

Data una matrice J :

$$\|Jx\| \leq \|J\| \cdot \|x\|$$

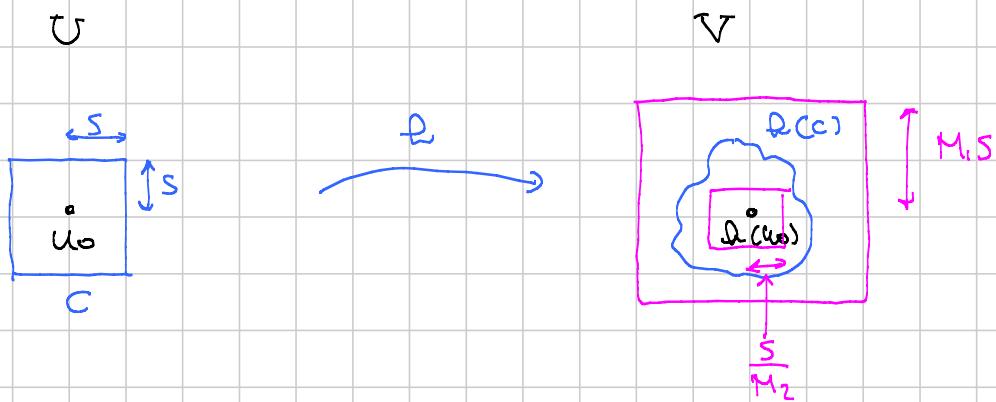
\uparrow max comp. \uparrow max comp.
 max somma riga

Aggiunto dopo video: da qui in poi
 è fatto forse meglio alla LEZ successiva

Lemma dei cubetti

Se $R: U \rightarrow V$ è un diffeomorfismo,
 allora esistono 2 costanti M_1 ed M_2 t.c.

$$C(R(u_0), \frac{s}{M_2}) \subseteq R(C(u_0, s)) \subseteq C(R(u_0), M_1 s)$$



La cosa non ovvia è che M_1 ed M_2 non dipendono dal cubo in panteura, ma solo da R .

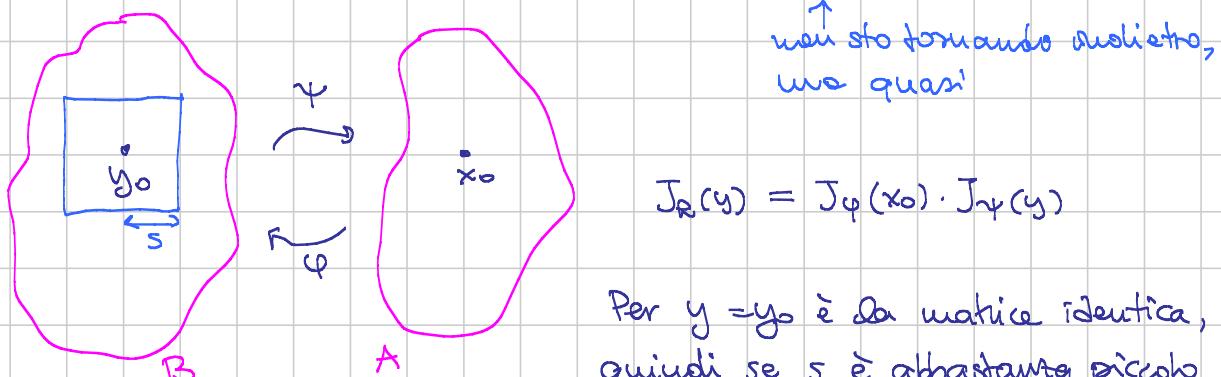
In particolare posso prendere

$$M_1 := \sup \{ \|J_\theta(u)\| : u \in M \}$$

$$M_2 := \sup_{-\infty} \{ \|J_{\theta^{-1}}(v)\| : v \in U\}$$

Dato per buono il Lemma, dimostriamo che la formula vale a meno di ε per i cubi piccoli.

Dim. Usando o lema usando $\varphi(y) = J_\varphi(x) (\psi(y))$



Per $y = y_0$ è da matrice identica, quindi se s è abbastanza piccolo $J_{\alpha}(y)$ è vicina all'identità, quindi $\|J_{\alpha}(y)\|$ e $\|J_{\alpha^{-1}}(y)\|$ sono vicine a 1.

Pseudotorsa ha piccola in modo che H_2 ed H_3 siano $\leq 14^\circ$.

Allora

$R(C(y_0, s)) \subseteq C(R(y_0), (1+\varepsilon)s)$ quindi

$$\begin{aligned} \text{meas}(R(C(y_0, s))) &\leq \text{meas}(C(R(y_0), (1+\varepsilon)s)) \\ &= 2^m \cdot (1+\varepsilon)^m s^m \end{aligned}$$

$\text{meas}(J_\varphi(x_0) \cap C(y_0, s))$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{"}}{\leftarrow} \text{ho usato come le trasformazioni lineari cambiano} \\ &|\text{Det } J_\varphi(x_0)| \cdot \text{meas}(\cap C(y_0, s)) \quad \text{la misura} \end{aligned}$$

A questo punto

$$\begin{aligned} \int_A f_C(\varphi(x)) |\text{Det } J_\varphi(x)| dx &= \int_{\varphi(C)} |\text{Det } J_\varphi(x)| dx \\ &\stackrel{\text{?}}{=} \int_{\varphi(C)} |\text{Det } J_\varphi(x_0)| dx \\ &= |\text{Det } J_\varphi(x_0)| \cdot \text{meas}(\varphi(C)) \\ &\leq (1+\varepsilon)^m \cdot 2^m \cdot s^m \\ &= (1+\varepsilon)^m \cdot \text{meas}(C) \\ &= (1+\varepsilon)^m \cdot \int_B f_C(y) dy \end{aligned}$$

Preciso il passaggio \sim . Voglio dire che $|\text{Det } J_\varphi(x)| \sim |\text{Det } J_\varphi(x_0)|$ se x è vicino a x_0 . Per scegliere il cubo iniziale abbastanza piccolo, avremo che

$$|\text{Det } J_\varphi(x)| \leq |\text{Det } J_\varphi(x_0)| \cdot (1+\varepsilon)$$

e questo sostituito porta alla formula

$$\int_A f_C(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J_\varphi(x)| dx \leq (1+\varepsilon)^{m+1} \int_B f_C(y) dy$$

che è una delle 2 che vogliamo.

ANALISI 2

-

LEZIONE 042

Titolo nota

11/11/2015

Back to cambio variabili

In modo standard si arriva al punto

"se vale la formula a meno di ϵ sui cubi piccoli, allora vale in generale"Brutale: perché è vero sui cubi piccoli?

$$\int_A f_\psi(\psi(x)) |\text{Det } J_\psi(x)| dx =$$

$$= \int_{\psi(C)} |\text{Det } J_\psi(x)| dx$$

$$\sim \int_{\psi(C)} |\text{Det } J_\psi(x_0)| dx$$

$$= |\text{Det } J_\psi(x_0)| \text{meas} \underbrace{\psi(C)}_S$$

$$= \text{meas}(J_\psi(x_0)(\psi(C)))$$

$$= \text{meas}(Q(C)) \text{ dove } Q = J_\psi(x_0) \circ \psi$$

$$\stackrel{(*)}{\sim} \text{meas}(C) = \int_B f_\psi(y) dy$$

$$J_Q(y) = J_\psi(x_0) \cdot J_\psi(y)$$

Se $y = y_0$ allora $J_\psi(y) = \text{Id}$, ma allora se C è piccolo $J_\psi(y) \sim \text{Id}$, quindi Q moralmente è una trasformazione.

— o — o —

$$\text{Notazione: } \|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

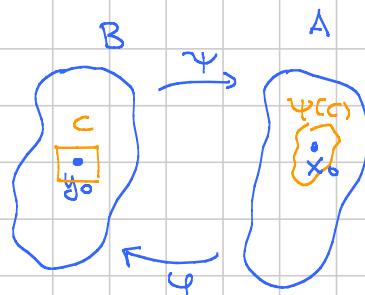
$$C(y_0, s) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - y_0\| \leq s\}$$

\uparrow cubo

Data una matrice M , si pone

$$\|M\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |M_{ij}|$$

\leftarrow somma sulla riga i -esima



LEMMA DEL CUBETTO ESTERNO

Dato un generico diffeomorfismo

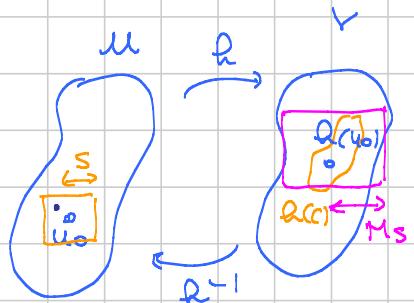
$$R: U \rightarrow V$$

(U e V sono aperti in \mathbb{R}^n)

e dato un cubo $C(u_0, s) \subseteq U$ vale la relazione

$$R(C(u_0, s)) \subseteq C(R(u_0), M_s)$$

dove $M = \max_{u \in C(u_0, s)} \|J_R(u)\|$.



Dim. Si tratta di far vedere che

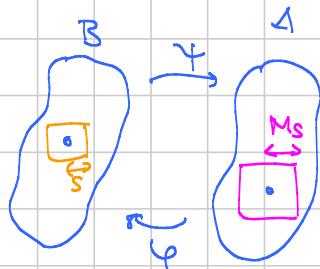
$$\|R(u) - R(u_0)\| \leq M \|u - u_0\| \text{ dove } M \text{ è definito come sopra} \\ \leq M_s$$

La diseguaglianza segue da Lagrange (ved. les. 41)

Conseguenza 1 Applico il lemma con $R = \psi: B \rightarrow A$

Posto $\hat{M} := \sup_{y \in B} \|J_\psi(y)\|$ che suppongo finito

avremo che



$$\psi(C(y_0, s)) \subseteq C(\psi(y_0), M_s)$$

indipendente dal cubo

[Abbiamo detto meglio: "se C è piccolo, allora $\psi(C)$ è piccolo"]

Conseguenza 2 Dalla conseguenza 1 segue che

$\downarrow S^* \text{ sull'insieme}$

$$\text{meas}^*(\psi(C(y_0, s))) \leq M^m \frac{\text{meas}(C(y_0, s))}{(2s)^m}$$

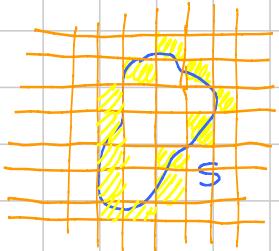
Dim.: basta da sopra

Conseguenza 3 Se $S \subseteq B$ è misurabile, allora $\gamma(S)$ è misurabile

↑ Esercizio

Dim. S è misurabile $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ posso ricoprire ∂S con cubetti di misura totale $< \varepsilon$, cioè

$$\partial S \subseteq \bigcup_{i=1}^k C_i$$



Ma allora $\partial \gamma(S) = \gamma(\partial S) \subseteq \bigcup_{i=1}^k \gamma(C_i)$

\uparrow

γ è differen.

\uparrow

a sua volta contenuti in cubi di semilato un po' più grande

Allora $\partial \gamma(S)$ è contenuta in cubi di misura totale $< M^m \varepsilon$, e quindi $\gamma(S)$ è misurabile.

— o — o —

Oss. Grazie alla conseguenza 3 posso risparmiare un po' di integrali inferiori e superiori

— o — o —

Scelta della piccolezza dei cubi Scelgo $\delta > 0$ abbastanza piccolo in maniera tale che valgano 2 proprietà ($\varepsilon > 0$ è dato)

$\rightarrow |\text{Det } J_\gamma(x_1)| \leq (1+\varepsilon) |\text{Det } J_\gamma(x_2)| \quad \forall x_1, x_2 \in A \text{ con } \|x_1 - x_2\| \leq \delta$

$\rightarrow \|\text{J}_\gamma(\gamma(y_1)) \text{J}_\gamma(\gamma(y_2))\| \leq (1+\varepsilon) \quad \forall y_1 \in B \quad \forall y_2 \in B \text{ con } \|y_1 - y_2\| \leq \delta$

Se $y_1 = y_2$ la matrice è l'identità e $\|\text{Id}\| = 1$

Queste due sono possibili se J_γ e J_γ sono unif. continue

$$|\text{Det } J_\gamma(x_1)| \leq |\text{Det } J_\gamma(x_2)| + |\text{Det } J_\gamma(x_1) - \text{Det } J_\gamma(x_2)|$$

Divido per $|\text{Det } J_\gamma(x_2)|$ e ottengo

$$\frac{|\text{Det } J_\varphi(x_1)|}{|\text{Det } J_\varphi(x_2)|} \leq 1 + \frac{|\text{Det } J_\varphi(x_1) - \text{Det } J_\varphi(x_2)|}{|\text{Det } J_\varphi(x_2)|}$$

piccolo quanto
 voglio se x_1 e
 x_2 sono opp. vicini
 ↗ assumo che in A
 questo \geq costante positiva
 fissa

Esercizio Dimostrare altrettanto per bene (o meglio) che anche la seconda richiesta è possibile.

— o — o —

Gran finale: giustificazione del brutale iniziale per cubi

$C(y_0, \delta)$ con $\delta \leq \delta$

$$\int_A^* f_C(\varphi(x)) |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

$$= \int_{\varphi(C)}^* |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$

$$\leq (1+\varepsilon) \int_{\varphi(C)}^* |\text{Det } J_\varphi(x_0)| dx$$

ho usato che $\|x - x_0\| \leq \hat{M}\delta \leq \hat{M}\delta$
 più la prima prop di δ ($x \in \varphi(C)$)

$$= (1+\varepsilon) |\text{Det } J_\varphi(x_0)| \text{meas}(\varphi(C))$$

$$= (1+\varepsilon) \text{meas}(J_\varphi(x_0)(\varphi(C)))$$

↗ proprietà appl. lineari

$$= (1+\varepsilon) \text{meas}(\varphi(C)) \quad \text{con } \varphi = J_\varphi(x_0) \circ \varphi$$

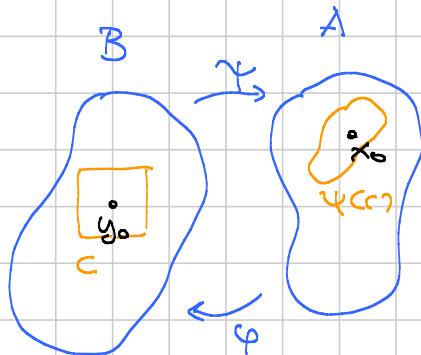
$$\leq (1+\varepsilon) \underbrace{\frac{(1+\varepsilon)^m}{m^m}}_{\sim \varphi(y_0)} \text{meas}(C)$$

Ho usato che $J_\varphi(y) = J_\varphi(x_0) J_\varphi(y)$
 più la seconda proprietà di δ

$$= (1+\varepsilon)^{m+1} \int_B^* f_C(y) dy$$

Mettendo insieme abbiamo ottenuto

$$\int_B^* f_C(y) dy \geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^{m+1}} \int_A^* f_C(\varphi(x)) |\text{Det } J_\varphi(x)| dx$$



Resterebbe da ottenere la diseguaglianza opposta.

Quella si fa allo stesso modo partendo dal

LEMMA DEL CUBETTO INTERNO

$R: M \rightarrow V$ diffeom.

$C(u_0, s) \subseteq M$

Allora

$$R(C(u_0, s)) \ni C(R(u_0), \frac{s}{\mu})$$

con M opportuna

Dim Esercizio (molto meno banale di quanto sembri).

Capire perché non posso fare R^{-1} a dx e sx , il che banalizzerebbe la cosa. \square

— o — o —

Oss. Abbiamo dimostrato il teorema

$$\int_B f(y) dy = \int_A f(\varphi(x)) \cdot |\text{Det } J\varphi(x)| dx$$

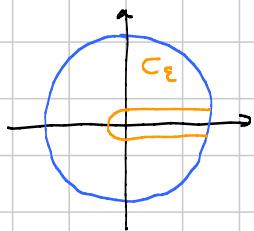
con integrali inferiori e superiori assumendo

- $\varphi: A \rightarrow B$ e $\varphi(B) \rightarrow A$ una l'inversa dell'altra
- $J\varphi$ e $J\varphi$ esistono e sono unif. continue su A/B
- $|\text{Det } J\varphi| \geq a_0 > 0$ in A e $|\text{Det } J\varphi| \geq b_0 > 0$ in B .

Quindi non vale per le polari :

- ① perché $J = \rho$ si può annullare
- ② $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ si rincollano

Come se ne esce?



C_ϵ = cerchio meno perzettivo

Su C_ϵ posso usare la formula e poi passo al limite per $\epsilon \rightarrow 0$

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 043

Titolo nota

11/11/2015

INTEGRALI MULTIPLI IMPROPRI

Un integrale multiplo si dice IMPROPRIO se la zona di integrazione è non limitata e/o la funzione è non limitata.

Grossa differenza con Analisi 1

Dato $A \subseteq \mathbb{R}^m$ e data $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ a segno qualunque se

$$\int_A |f(x)| dx = +\infty$$

allora per definizione si pone l'integrale indeterminato senza distinguere oltre (non è completamente vero).

In generale si pone $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ e si definisce
punte posit. punte neg.

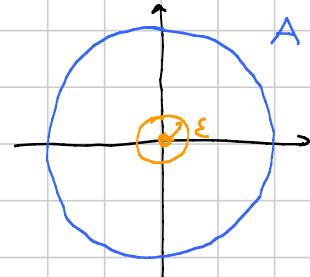
$$\int_A f(x) dx = \int_A f_+(x) dx - \int_A f_-(x) dx$$

e si sviluppa la teoria solo per integrande ≥ 0 in A .

Quindi d'ora in poi ci limitiamo al caso $f(x) \geq 0$ in A .

Esempio 1 $\iint_A \frac{|x|}{x^2+y^2} dx dy$ $A = \text{cerchio con centro in } (0,0)$
e raggio 1.

Per $(x,y) \rightarrow (0,0)$ la $f(x,y)$ ha $\liminf 0$
 e $\limsup +\infty$, dunque non è limitata
 e l'integrale è improprio.



Definizione ovvia ma non troppo (problema in un solo punto)

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{A_\varepsilon} f(x,y) dx dy$$

A_ε cerchio di raggio ε .

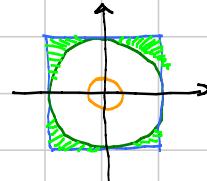
Per ogni $\varepsilon > 0$ l'integrale su A_ε ha senso (è proprio).

Tutto sta ad indagare l'esistenza del limite.

$$\iint_{A_\varepsilon} \frac{|x|}{x^2+y^2} dx dy = \int_{\varepsilon}^1 d\rho \int_0^{\pi} d\theta \frac{\rho |\cos\theta|}{\rho^2} \cdot \rho = 4 \int_{\varepsilon}^1 d\rho \rightarrow 4$$

Esempio 2 Stessa funzione su $Q = [-1,1] \times [-1,1]$

$Q_\varepsilon = Q \setminus$ cerchio e procediamo come prima



Osservazione comoda

$$\int_Q = \int_A + \int_{Q \setminus A}$$

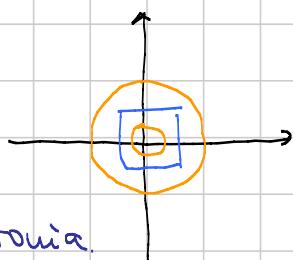
cerchio di prima integrale proprio, quindi un numero

$$\Rightarrow \int_Q \text{ converge a } \int_A \dots + \int_{Q \setminus A} \dots$$

Oss. feonica Se $f(x) \geq 0$ nella zona di integrazione, allora il limite fatto togliendo cerchi o quadrati o triangoli è lo stesso.

Idea: per ogni cerchio esiste un quadrato contenuto e viceversa.

Inoltre il $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+}$ esiste sempre per monotonia.



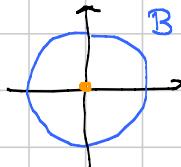
Esercizio: formalizzare il discorso.

Achtung! Se $f(x)$ ha segno variabile, posso ottenere risultati diversi togliendo figure diverse.
L'esempio si può fare.

Questo è il motivo per una teoria con integrandi ≥ 0 .

Esempio classico

$$\iint_B \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dx dy$$



Per quali α converge?

$$\begin{aligned} \iint_B \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dx dy &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{B_\varepsilon} \dots \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{\rho^{2\alpha}} \cdot \rho \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} = 2\pi \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}} \end{aligned}$$

Analisi 1: questo converge $\Leftrightarrow 2\alpha - 1 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 1$

Occhio che per $\alpha = 1$ il denominatore è quadratico.

Stesso esempio in \mathbb{R}^3

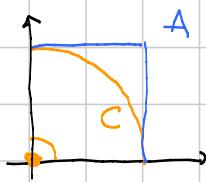
$$\begin{aligned} \iiint_S \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^\alpha} dx dy dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 d\rho \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{1}{\rho^\alpha} \rho^2 \cos\varphi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{d\rho}{\rho^{\alpha-2}} \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cos\varphi \\ &= \text{numero} \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{\alpha-2}} \end{aligned}$$

Numeri

e questo converge $\Leftrightarrow \alpha < 3$

Esempio $\iint_A \frac{1}{x+y} dx dy$

$$A = [0,1] \times [0,1]$$



Converge perché denom ~ p

$$\iint_A \text{converge} \Leftrightarrow \iint_e \text{converge} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{1}{\rho(\cos\theta + \sin\theta)} \cdot \rho = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} d\theta$$

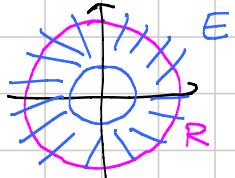
Questo è un integrale proprio; infatti $\exists m > 0$ t.c.

$$\cos\theta + \sin\theta \geq m \quad \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

(Infatti il LHS ha minimo per θ in un arco $\theta_0 \in \frac{\pi}{2}$ e inoltre non si possono annullare insieme $\cos\theta_0$ e $\sin\theta_0$)

Esempio (mti)

$$\iint_E \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha} dx dy$$



$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{\text{corna}} \dots$$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R d\rho \int_0^{\pi} d\theta \frac{1}{\rho^\alpha} \rho$$

$$= 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho^{\alpha-1}} \quad \text{e questo converge} \Leftrightarrow \alpha-1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$$

Esempio

$$\iint_Q \frac{\arctan x^3}{x^4+y^4} dx dy$$

$$Q := [0, +\infty) \times [0, +\infty)$$

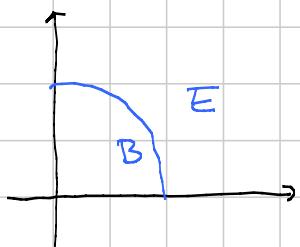
ha 2 problemi quiudi va spezzato

Su B ufficialmente $f(x,y) \sim \frac{1}{\rho}$ quiudi

l'integrale converge (esponente < dim.)

Su E ufficialmente $f(x,y) \sim \frac{1}{\rho^4}$ quiudi

converge



rigoroso: $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x,y) \leq \frac{M}{(x^2+y^2)^2} \quad \forall (x,y) \in E$

ANALISI 2

LEZIONE 044

Titolo nota

13/11/2015

INTEGRALI IMPROPRI

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua (ma basta meno) tale che $f(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

È ragionevole porre

esiste $\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{B_R} f(x,y) dx dy$$

dove $B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

Prop. Sia $\{A_k\}$ una successione di sottosinsiemi di \mathbb{R}^2 tali che

(i) A_k è limitato e misurabile per ogni $k \in \mathbb{N}$

(ii) A_k "invade \mathbb{R}^2 " nel senso che

$$\forall R > 0 \quad A_k \supseteq B_R \text{ definitivamente}$$

Allora

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \iint_{A_k} f(x,y) dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{B_R} f(x,y) dx dy$$

Brutalmente : $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy$ non dipende da come si invada \mathbb{R}^2 .

Dim. Ci sono due casi a seconda che il limite al RHS sia $\in \mathbb{R}$ oppure $+\infty$. Faccio solo il caso in cui è $L \in \mathbb{R}$ (l'altro è più semplice). Fisso $\varepsilon > 0$ e dimostro che

$$L - \varepsilon \leq \iint_{A_k} \dots \leq L \quad \text{definitivamente}$$

La disug. di destra vale per ogni $k \in \mathbb{N}$. Infatti ogni A_k per l'ipotesi (i) è contenuto in una certa B_{R_k} con R_k opportuno quindi

$$\iint_{A_k} \dots \leq \iint_{B_{R_k}} \dots \leq L \quad \text{perché il limite a RHS è il sup}$$

Per la disug. di sx so che esiste $R_\varepsilon > 0$ t.c.

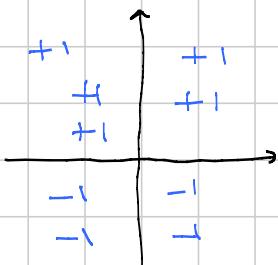
$$\iint_{B_{R_\varepsilon}} f(x,y) dx dy \geq L - \varepsilon \quad \forall R \geq R_\varepsilon$$

Ma definitivamente $A_k \supseteq B_{R_\varepsilon}$ e quindi $\iint_{A_k} \dots \geq \iint_{B_{R_\varepsilon}} \geq L - \varepsilon$.

— o — o —

Achtung! Il discorso non vale se $f(x,y)$ ha segno variabile, anche se è limitata.

Esempio $f(x,y) = \begin{cases} +1 & \text{nel 1^o e 2^o quadrante} \\ -1 & \text{nel 3^o e 4^o} \end{cases}$



$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{B_R} f(x,y) dx dy = 0$$

$$A_k = [-k, k] \times [-k, k+1]$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{A_k} \dots = +\infty$ Posso fare in modo che il limite sia un qualunque $L \in \mathbb{R}$ oppure anche che non esista.

Domanda C'è un esempio in cui il limite su B_R oppure su $[-k, k] \times [-k, k]$ è diverso?

— o — o —

Oss. Il discorso è lo stesso per qualunque integrale improprio in più variabili.

— o — o —

Esercizio Calcolare l'integrale su \mathbb{R}^2 di $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{B_R} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\theta e^{-\rho^2} \rho = 2\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \rho e^{-\rho^2} d\rho$$

$$= \pi \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-e^{-\rho^2} \right]_0^R = \pi \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-e^{-R^2} + 1 \right] = \pi$$

Lo stesso limite lo posso calcolare con $A_k = [-k, k] \times [-k, k]$

$$\iint_{A_k} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-k}^k dx \int_{-k}^k dy e^{-x^2-y^2}$$

$$= \int_{-k}^k e^{-x^2} dx \underbrace{\int_{-k}^k e^{-y^2} dy}_{I_k} = I_k^2$$

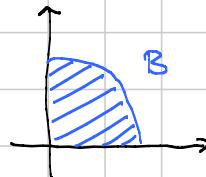
Confrontando con il precedente $\lim_{k \rightarrow \infty} I_k^2 = \pi$, quindi ($I_k > 0$)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_k = \sqrt{\pi} \quad \text{MA} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Questo dimostra l'integrale gaussiano

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}}$$

Esercizio 1 $\iint_B \frac{1}{x^2+y^4} dx dy$



Caso fortunato

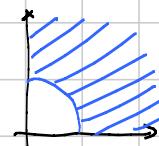
$$\frac{1}{x^2+y^4} \geq \frac{1}{x^2+y^2} \quad \text{appena } y \leq 1$$

quindi

$$\iint_B \frac{1}{x^2+y^4} dx dy \geq \iint_B \frac{1}{x^2+y^2} dx dy \stackrel{\uparrow \frac{1}{r^2}}{=} +\infty$$

Vale anche se il raggio è ≥ 1 : basta spezzare in 2.

Esercizio 2 $\iint_E \frac{1}{x^2+y^4} dx dy$



Ora la disug. non ai aiuta

Slogau: cambiare variabile per PAREGGIARE GLI ESPONENTI

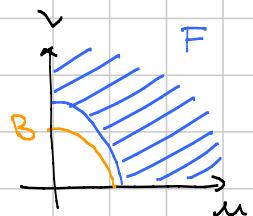
Pongo $x = u^2$, $y = v$. Devo calcolare J

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2u = J$$

$$\text{Allora } \iint_E \frac{1}{x^2+y^4} dx dy = \iint_F \frac{1}{u^4+v^4} \cdot 2u du dv$$

$$\text{Chi è } F? \quad E = x^2+y^2 \geq 1 \quad F = u^4+v^4 \geq 1$$

$$v \geq \sqrt{1-u^4}$$



$$\iint_F \frac{2u}{u^4+v^4} du dv \text{ converge} \Leftrightarrow \iint_B \frac{2u}{u^4+v^4} du dv \text{ converge}$$

e converge perché è del tipo $\frac{1}{\rho^3}$

$$\text{Detto rigorosamente: } \iint_B \frac{u}{u^4+v^4} du dv = \int_1^{+\infty} d\rho \int_0^{\pi} d\theta \frac{\rho \cos \theta \cdot \rho}{\rho^4(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)}$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^2} d\rho \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta} d\theta$$

converge numero perché è un integrale proprio perché

$$\cos^4 \theta + \sin^4 \theta \geq m_0 > 0 \quad \forall \theta \in [0, \pi]$$

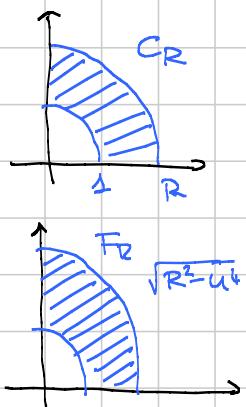
(funzione continua, ammette minimi, bla bla bla)

Oss. Ho fatto il cambio di variabili direttamente sull'integrale improprio. Il tutto avrebbe giustificato.

Il modo di farlo è standard

$$\begin{aligned} \iint_E \frac{1}{x^2+y^4} dx dy &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{C_R} \frac{1}{x^2+y^4} dx dy \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{F_R} \frac{2u}{u^4+v^4} du dv \\ &= \iint_F \frac{2u}{u^4+v^4} du dv \end{aligned}$$

(Ho usato l'equivalenza del "modus inversus").



Esempio 3 $\iint_E \frac{x^\alpha}{x^2+y^4} dx dy$ per quali α converge

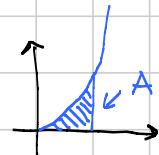


Pareggio gli esponenti $x = u^2, y = v \Rightarrow J = 2u$

Diventa $\iint_F \frac{u^{2\alpha}}{u^4+v^4} \cdot 2u du dv \Rightarrow$ come prima $\frac{p^{1+2\alpha}}{p^4} = \frac{1}{p^{3-2\alpha}}$

Converge $\Leftrightarrow 3-2\alpha > 2 \Leftrightarrow 2\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{2}$

Esempio 4 $\iint_A \frac{1}{x^2+y^4} dx dy$



dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$

$$\leq \frac{1}{x^2+y^4} \leq \frac{1}{x^2}$$

Lo riporto in cartesiano

$$\iint_A \frac{1}{x^2+y^4} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \frac{1}{x^2+y^4} \leq \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \frac{1}{x^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx \int_0^{x^2} dy = \int_0^1 \frac{1}{x^2} \cdot x^2 dx = 1$$

ANALISI 2

LEZIONE 045

Titolo nota

13/11/2015

Oss. Proviamo a fare $\iint_E \frac{1}{x^2+y^4} dx dy$ direttamente in polari

$$= \int_1^{+\infty} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\rho}{\rho^2 \cos^2\theta + \rho^4 \sin^4\theta} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho} d\rho \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2\theta + \rho^2 \sin^4\theta} d\theta$$

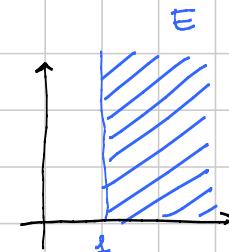
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{+\infty} d\rho \frac{1}{\rho \cos^2\theta + \rho^3 \sin^4\theta}$$

per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$
converge, ma ad un
valore dipendente da ρ
in modo misterioso

converge per quasi ogni valore
 $d\theta$, meglio per $\theta \neq 0, \pi, 2\pi$,
ma il valore dipende da
 θ in modo misterioso

Altra via (perversa?)

$$\begin{aligned} \iint_E \frac{1}{x^2+y^4} dx dy &= \int_1^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy \frac{1}{x^2+y^4} \\ &= \int_1^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy \frac{1}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{y^4}{x^2}} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{y^4}{x^2}} dy \end{aligned} \quad = (\star)$$



Pongo $\frac{y^2}{x} = z$, quindi $y^2 = xz$, quindi $y = \sqrt{xz}$ $\sim dy = \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz$

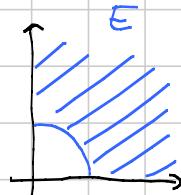
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{y^4}{x^2}} dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + z^2} \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz = \frac{1}{2} \sqrt{x} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{z} (1+z^2)} dz$$

Numero

$$(\star) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \frac{1}{2} \text{ Fx. numero} = \frac{\text{numero}}{2} \cdot \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \in +\infty$$

$$\iint_E \frac{1}{x^2+y^2+x^2y^2} dx dy$$

$\underbrace{f(x,y)}$



$f(x,y) \leq \frac{1}{\rho^2}$, ma questo non aiuta --.

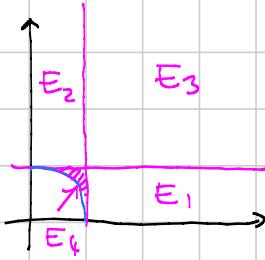
Brunale: x^2y^2 non può dare una mano, essendo un \mathbb{P}^4 ,
ma solo lontano dagli assi.

Idea: separo le zone (DIVIDE ET IMPERA)

zona E_4 : no problem

le zone E_1 ed E_2 sono simmetriche, quindi
posso studiare solo E_1

$$\begin{aligned} \iint_{E_1} f(x,y) dx dy &= \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{x^2+y^2+x^2y^2} \\ &\leq \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{x^2} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty \end{aligned}$$

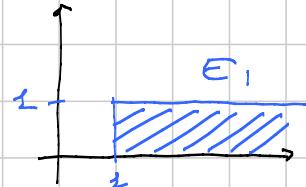


Resta la zona E_3

$$\begin{aligned} \iint_{E_3} f(x,y) dx dy &= \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} dy f(x,y) \leq \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} dy \frac{1}{x^2y^2} \\ &= \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx}_{I} \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy}_{I} < +\infty \end{aligned}$$

Esempio E_1 di prima

$$\iint_{E_1} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dx dy \quad \text{Per quali } \alpha \text{ converge}$$



$$= \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} \leq \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{x^{2\alpha}} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2\alpha}} dx$$

converge se $\alpha > \frac{1}{2}$. Ho dimostrato che l'integrale iniziale
converge per $\alpha > \frac{1}{2}$.

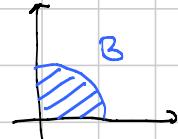
Per gli altri $\alpha \leq \frac{1}{2}$ non posso dire nulla.

Per studiare i valori $\alpha \leq \frac{1}{2}$ serve disegn. dall'altra parte

$$\int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{(x^2+y^2)^a} \geq \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{(x^2+1)^a} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^a}$$

e questo diverge per $a \leq \frac{1}{2}$ completando la risposta.

Esempio $\iint_B \frac{\log(1+x) \sinh y}{(x^2+y^2)^a} dx dy$



per quali a converge?

Brutale: $f(x,y) \sim \frac{xy}{(x^2+y^2)^a} \sim \frac{r^2}{r^{2a}} = \frac{1}{r^{2a-2}}$ quindi converge
 $\Leftrightarrow 2a-2 < 2$
 $\Leftrightarrow a < 2$

Diseguaglianza dall'alto

Esistono 2 costanti M_1 ed M_2 tali che

$$\begin{aligned} \log(1+x) &\leq M_1 x & \forall x \in [0,1] \\ \sinh y &\leq M_2 y & \forall y \in [0,1] \end{aligned} \quad] \text{ Banale Analisi 1 dopo aver diviso e fatto il limite}$$

quindi $f(x,y) \leq M_1 M_2 \frac{xy}{(x^2+y^2)^a}$

Questo faccio in polari e vedo che converge per $a < 2$.

Diseguaglianza dal basso Esistono M_3 ed M_4 strettamente positive tali che

$$\begin{aligned} \log(1+x) &\geq M_3 x & \sinh y &\geq M_4 y \\ \forall x \in [0,1] & & \forall y \in [0,1] & \end{aligned}$$

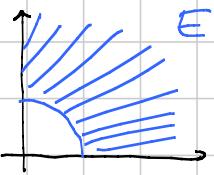
$f(x,y) \geq M_3 M_4 \frac{xy}{(x^2+y^2)^a}$ in polari

$$\int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\cos \theta \sin \theta \rho^2}{\rho^{2a}} \cdot \rho = \int_0^1 \frac{1}{\rho^{2a-3}} d\rho \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta$$

$\neq 0$

Esempio $\iint_E \frac{xy}{(x^2+y^4)^a} dx dy$

$$x = u^2, y = v \Rightarrow J = 2u$$



$$\iint_E \dots = \iint_F \frac{u^2 \cdot v}{(u^4+v^4)^a} \cdot 2u \, du \, dv \sim \frac{u^4}{u^{4a}} = \frac{1}{u^{4a-4}}$$

zona simile

qui solo l'idea è che converge

$$\Leftrightarrow 4a-4 > 2 \Leftrightarrow a > \frac{3}{2}$$

Occhio a fare bene la parte dal basso

Esempio $\iiint_E \frac{x y^a z}{x^2+y^4+z^6} dx dy dz$ $E: x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$
 $x^2+y^2+z^2 \geq 1$

Poneggio gli esponenti ponendo: $x = u^6, y = v^3, z = w^2$

$$\begin{pmatrix} 6u^5 & 0 & 0 \\ 0 & 3v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2w \end{pmatrix} \rightsquigarrow J = 36 u^5 v^2 w$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_F \frac{u^6 v^{3a} w^2}{u^{12} + v^{12} + w^{12}} u^5 v^2 w \, du \, dv \, dw$$

dello stesso tipo
di $E: u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0, u^{12} + v^6 + w^4 \geq 1$

Brutale: funzione $\sim \frac{P^{16+3a}}{P^{12}} = \frac{1}{P^{-4-3a}}$

e questo converge $\Leftrightarrow -4-3a > 3$

$$3a < -7 \quad a < -\frac{7}{3}$$

Nella dimostrazione

→ la disug. dall'alto è facile

→ quella dal basso un po' più delicata, bisogna passare per sferiche

Domanda: come posso controllare il termine $u^{12} + v^{12} + w^{12}$?

Usata rapida: esistono 2 costanti positive k_1 e k_2 t.c.

$$k_2(u^2+v^2+w^2)^6 \leq u^{12} + v^{12} + w^{12} \leq k_1(u^2+v^2+w^2)^6$$

per ogni $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$. Tutto si riduce a

$$k_2 \leq \frac{u^{12} + v^{12} + w^{12}}{(u^2 + v^2 + w^2)^6} \leq k_1$$

per ogni (u, v, w) t sfera $(u^2 + v^2 + w^2) = 1$

e sulla sfera max e min esistono per w.

Achtung! Se pareggio gli esponenti per fare un limite, non devo mettere j. Per gli integrali sì.

ANALISI 2

-

LEZIONE 046

Titolo nota

17/11/2015

VOLUME PALLA m -DIMENSIONALEDato $R > 0$, consideriamo $B_R := \{x \in \mathbb{R}^m : x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq R^2\}$

Voglio calcolare

$$\text{meas}_m(B_R)$$

Ci aspettiamo che sia del tipo $\omega_m R^m$, con ω_m succ. opportuna1^o approccio Sessioni rispetto ad una variabile, ad esempio x_m

$$\text{meas}_m(B_R) = \int_{-R}^R dx_m \int_{S_{x_m}} 1 dx_1 \dots dx_{m-1}$$

la sezione è una palla in
dimensione $m-1$ di raggio
 $\sqrt{R^2 - x_m^2}$

$$x_1^2 + \dots + x_{m-1}^2 \leq R^2 - x_m^2 \leftarrow \text{descrive la sezione } S_{x_m}$$

$$= \int_{-R}^R dx_m \text{meas}_{m-1}(B_{\sqrt{R^2 - x_m^2}})$$

$$\text{ipotesi iniziat.} \rightarrow = \int_{-R}^R dx_m \omega_{m-1} (R^2 - x_m^2)^{\frac{m-1}{2}}$$

$$= \omega_{m-1} \int_{-R}^R R^{m-1} \left(1 - \left(\frac{x_m}{R}\right)^2\right)^{\frac{m-1}{2}} dx_m$$

$$x_m = Rz$$
$$dx_m = R dz$$

$$= \omega_{m-1} R^m \int_{-1}^1 (1 - z^2)^{\frac{m-1}{2}} dz$$

$$z = \sin t$$
$$dz = \cos t dt$$

$$= \omega_{m-1} R^m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t dt$$

c'è una formula
ricorrente che lega

Abbiamo ottenuto

$$\omega_m = \omega_{m-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t dt$$

\nearrow

2^o approccio Provare a scendere di due con la dimensione

$$\begin{aligned}
 \text{meas}_m(B_R) &= \iint dx_1 dx_2 \underbrace{\iint \dots \int dx_3 \dots dx_m}_{\substack{x_1^2 + x_2^2 \leq R^2 \\ x_3^2 + \dots + x_m^2 \leq R^2 - x_1^2 - x_2^2}} \\
 &= \iint_{\substack{x_1^2 + x_2^2 \leq R^2}} dx_1 dx_2 \underbrace{\text{meas}_{m-2}(B_{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}})}_{\text{ipotesi induktiva}} \\
 &= \omega_{m-2} \iint_{\substack{x_1^2 + x_2^2 \leq R^2}} (R^2 - x_1^2 - x_2^2)^{\frac{m-2}{2}} dx_1 dx_2 \\
 &= \omega_{m-2} \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\theta (R^2 - \rho^2)^{\frac{m}{2}-1} \cdot \rho \\
 &= \pi \omega_{m-2} \int_0^R 2\rho (R^2 - \rho^2)^{\frac{m}{2}-1} d\rho \\
 &= \pi \omega_{m-2} \left[- (R^2 - \rho^2)^{\frac{m}{2}} \frac{2}{m} \right]_{\rho=0}^{\rho=R} \\
 &= \frac{2\pi}{m} \omega_{m-2} R^m
 \end{aligned}$$

Da qui ricaviamo

$$\omega_m = \frac{2\pi}{m} \omega_{m-2}$$

Visto che $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = \pi$, da qui si ricavano ricorsivamente tutti gli ω_m . Si ottiene

$$\omega_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}$$

$$\omega_{2k+2} = \frac{2\pi}{2k+2} \omega_{2k} = \frac{\pi}{k+1} \frac{\pi^k}{k!} = \frac{\pi^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$\omega_{2k+1} = 2 \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{2\pi}{5} \cdot \frac{2\pi}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2\pi}{2k+1} = \frac{2(2\pi)^k}{(2k+1)!!} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k}$$

$$\omega_{2k+1} = \frac{2(4\pi)^k \cdot k!}{(2k+1)!}$$

fatto solo sui disponi

Oss. C'è una formula che le contiene entrambe ed è

$$\omega_m = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)}$$

dove Γ è la funzione Gamma di Eulero

Per verificare l'uguaglianza basta ricordare che

- $\Gamma(k) = (k-1)!$ per k intero ≥ 1
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (integrale gaussiano)
- $\Gamma(x) = x \Gamma(x-1)$ per ogni $x > 0$

INTEGRALI IMPROPRI IN DIM m

Caso con pblm. in 0

$$\int_{B_R} \frac{1}{|x|^\alpha} dx \begin{cases} \rightarrow \text{converge} & \alpha < m \\ \rightarrow \text{diverge} & \alpha \geq m \end{cases}$$

Caso con pblm. all' ∞

$$\int_{R^m \setminus B_R} \frac{1}{|x|^\alpha} dx \begin{cases} \rightarrow \text{converge} & \alpha > m \\ \rightarrow \text{diverge} & \alpha \leq m \end{cases}$$

Per dimostrarlo ci sono 2 modi

- ① Introdurre coordinate "sferiche" in \mathbb{R}^m : ad esempio in \mathbb{R}^4 userei 2 latitudini φ_1 e φ_2 .
Indicate le cartesiane con x, y, z, w si può pone

$$\begin{aligned} w &= \rho \sin \varphi_2 & x &= \rho \cos \varphi_2 \cdot \begin{bmatrix} \text{coordinate sferiche} \\ \text{classiche in } \mathbb{R}^3 \end{bmatrix} & \cos \varphi_1, \cos \varphi_2 \\ y &= \rho \cos \varphi_2 \cdot & & & \cos \varphi_1, \sin \varphi_2 \\ z &= \rho \cos \varphi_2 \cdot & & & \sin \varphi_1 \end{aligned}$$

Si tratta ora di dim. per induz. che $J = \rho^{m-1}$. roba trigonometrica.

② Procedere direttamente per induzione. Facciamo il pass. in o
Integro sul cubo

$$C_m := \{x \in \mathbb{R}^m : |x_i| \leq 1 \text{ per ogni } i=1, \dots, m\}$$

$$\begin{aligned} \int_{C_m} \frac{1}{|x|^\alpha} dx &= \int_{C_{m-1}} dx_1 \dots dx_{m-1} \int_{-1}^1 dx_m \frac{1}{\underbrace{(x_1^2 + \dots + x_{m-1}^2 + x_m^2)}_{b^2}^{\alpha/2}} \\ &= \int_{C_{m-1}} dx_1 \dots dx_{m-1} \int_{-1}^1 \frac{1}{(b^2 + x_m^2)^{\alpha/2}} dx_m \end{aligned}$$

Parenthesis di analisi 1

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{(b^2 + t^2)^{\alpha/2}} dt &\quad t = bz \quad = \int_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}} \frac{b}{(b^2 + b^2 z^2)^{\alpha/2}} dz \\ &= \frac{b}{b^\alpha} \int_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}} \frac{dz}{(1+z^2)^{\alpha/2}} = \frac{1}{b^{\alpha-1}} \int_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}} \frac{dz}{(1+z^2)^{\alpha/2}} \end{aligned}$$

Due casi

• se $1 < \alpha < m$, allora $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^{\alpha/2}} < +\infty$, quindi

$$\text{int. iniziale} \leq \int_{C_{m-1}} dx_1 \dots dx_{m-1} \frac{1}{b^{\alpha-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^{\alpha/2}}$$

converge per ip
induttiva

numero

• se $\alpha \geq m$, allora $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^{\alpha/2}} < +\infty$, ma non ci serve
perché

$$\text{int. iniziale} \geq \int_{C_{m-1}} dx_1 \dots dx_{m-1} \frac{1}{b^{\alpha-1}} \int_{-\frac{1}{m-1}}^{\frac{1}{m-1}} \frac{dz}{(1+z^2)^{\alpha/2}}$$

Diverge per ip
induttiva

numero > 0

• se $\alpha \leq 1$ ho ancora convergenza perché

$$\frac{1}{|x|^\alpha} \leq \frac{1}{|x|^\beta} \quad \text{per ogni } |x| \leq 1 \text{ e ogni } \alpha < \beta \text{ e basta scegliere } \beta \in (1, m)$$

ANALISI

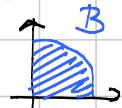
2

LEZIONE 047

Titolo nota

17/11/2015

Esercizio 1 $\iint_B \frac{\arctan(xy)}{(x^2+y^2)^\alpha} dx dy$ Per quali α converge



Brutale : $\frac{\arctan(xy)}{(x^2+y^2)^\alpha} \sim \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha} \sim \frac{\rho^2}{\rho^{2\alpha}} = \frac{1}{\rho^{2\alpha-2}}$

quindi converge $\Leftrightarrow 2\alpha-2 < 2 \Leftrightarrow \alpha < 2$

Dim. che per $\alpha < 2$ converge usando la disug. arctan t st per $t \geq 0$

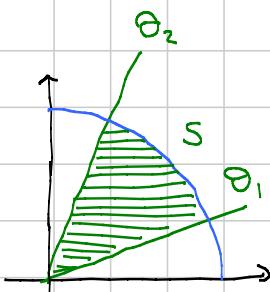
$f(x,y) \leq \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}$, quindi

$\iint_B f(x,y) dx dy \leq \iint_B \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha} dx dy$ e questo si calcola con le polari

Per dimostrare che diverge per $\alpha \geq 2$ posso usare la disug. opposta

$\arctan t \geq \frac{t}{2t}$ che vale per $t \in [0, t_0]$ per $t_0 > 0$ opportuno

In alternativa posso restringermi ad un settore circolare abbastanza stretto



$$\begin{aligned}
 \iint_B f(x,y) dx dy &\geq \iint_S f(x,y) dx dy \\
 &= \int_0^r d\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{\arctan(\rho^2 \sin \theta \cos \theta)}{\rho^{2\alpha}} \cdot \rho \\
 &\geq \int_0^r d\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{\arctan(m_0 \rho^2)}{\rho^{2\alpha}} \rho
 \end{aligned}$$

$\geq m_0 r^2 \text{ se } \theta \in [\theta_1, \theta_2]$

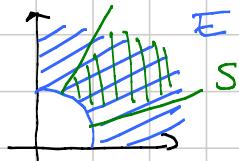
$$= (\theta_2 - \theta_1) \int_0^1 \frac{\arctan(m_0 \rho^2)}{\rho^{2a-1}} d\rho.$$

e questo si fa per confronto asintotico di analisi 1.
Quindi converge $\Leftrightarrow a < 2$.

Esercizio 1 bis Stessa cosa su tutto il cerchio.

- Per $a < 2$ converge e converge a 0
- Per $a \geq 2$ è indeterminato $\iint f_+ = +\infty = \iint f_-$
(buchi diversi producono limiti diversi)

Esercizio 2 $\iint_E \frac{\arctan(x,y)}{(x^2+y^2)^a} dx dy$



Facile: converge per $a > 1$

$$f(x,y) \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\rho^a} \text{ converge per } 2a > 2, \text{ cioè } a > 1$$

Voglio dim. che diverge per $a \leq 1$. Stimo con il settore come prima

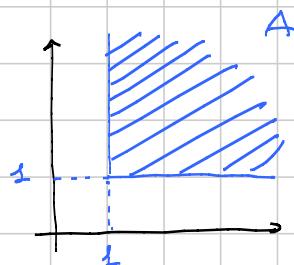
$$\begin{aligned} \iint_E f(x,y) dx dy &\geq \iint_S f(x,y) dx dy \\ &= \int_1^{+\infty} d\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\arctan(\rho \cos \theta \sin \theta)}{\rho^{2a}} \cdot \rho d\theta \end{aligned}$$

e conclude come prima

Esercizio 3 $\iint_A \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^a} dx dy$

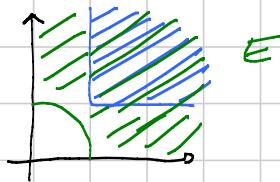
$$\text{Brutale: } f(x,y) = \frac{\rho^3}{\rho^{2a}} = \frac{1}{\rho^{2a-3}}$$

quindi converge $\Leftrightarrow 2a-3 > 2 \Leftrightarrow a > \frac{5}{2}$



- Dimostra che converge per $\alpha > \frac{5}{2}$

$$\iint_A f(x,y) dx dy \leq \iint_E f(x,y) dx dy$$



si $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n$ converge se $\alpha > \frac{5}{2}$

- Dimostra che diverge per $\alpha \leq \frac{5}{2}$

Scelgo un setore $0 < \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ e $R \geq R_0$

Se R_0 è abbastanza grande, allora $S \approx A$

$$\iint_A f(x, y) dx dy \geq \iint_S f(x, y) dx dy$$

↑
si fa in polari e diverge per $\alpha \leq \frac{5}{2}$

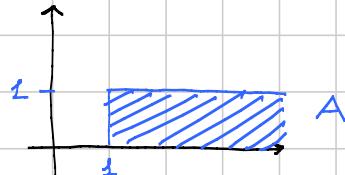
$$\int_{2a}^{\infty} dp \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{p^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{p^{2a}} \cdot p$$

Sei $\theta \in \mathbb{R}$ mit $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$. Dann ist $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \geq m_0 > 0$ für

$$\theta \in [\theta_1, \theta_2].$$

$$\underline{\text{Esempio 4}} \quad \iint_A \frac{xy}{x^6 + y^8} \, dx \, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{x^a y}{x^6 + y^8} = (\star)$$



Vediamo quando converge

$$(\star) \leq \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{x^\alpha}{x^6} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{6-\alpha}} \quad \text{the converge for } \alpha < 5$$

Veoliens se diverge per $a \geq 5$

$$(\star) \geq \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{0}{x^6 + 1} \quad \text{:(sad face)}$$

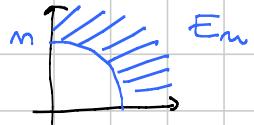
$$(\star) \geq \int_1^{+\infty} dx \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \frac{\frac{1}{2}x^a}{x^5 + 1} \quad \text{smiley face}$$



Oss. Anche senza restringere l'insieme, posso lasciare la y sopra e fare l'integrale in dy

— o — o —

Esempio 5 Consideriamo $I_m = \iint_{E_m} \frac{1}{x^4 + y^2} dx dy$



dove $E_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \geq m^2\}$

Dimostrare che I_m è ben definito, $I_m \rightarrow 0$ per $m \rightarrow +\infty$, e se riesce calcolare ordine di infinitesimo e parte principale.

Basta dim. che converge. Pareggio gli esponenti $x = u$, $y = v^2$

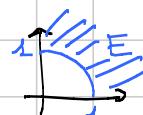
Calcolo J

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{pmatrix} \rightsquigarrow J = 2v$$

e mi riduco a $\iint_{F_m} \frac{1}{u^4 + v^4} \cdot 2v \, du \, dv$ e questo $\sim \frac{1}{v^3}$,
 insieme diverso, ma quindi formale
 "fatto allo stesso modo"

Perché $I_m \rightarrow 0$? Per un fatto generale!

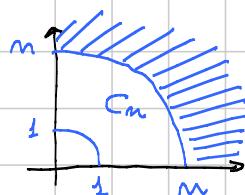
Se $\iint_E f(x,y) \, dx \, dy < +\infty$ con $E =$



allora $\lim_{m \rightarrow +\infty} \iint_{E_m} f(x,y) \, dx \, dy = 0$ per ogni successione E_m che invadere E

Sostanzialmente si usa che

$$\iint_E = \iint_{E_m} + \iint_{C_m} \rightarrow \iint_E \text{ per definizione}$$



quindi

$$\iint_{E_m} = \iint_E - \iint_{C_m}$$

↓

$$\iint_E$$

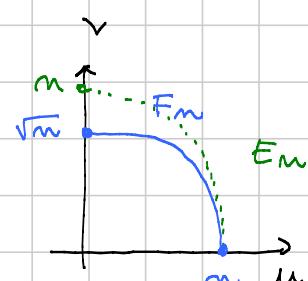
Come possiamo stimare l'integrale I_m ?

Prima idea: che raddica come $\int_m^{+\infty} \frac{1}{\rho^3} \cdot \rho \, d\rho \sim \frac{1}{m}$

Ma F_m non esattamente E_m , detto meglio

$$F_m = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^4 \geq m^2\}$$

$$v \geq \sqrt[4]{m^2 - u^2}$$



Per ora possiamo dire solo che $F_m \supseteq E_m$ per $u \geq 1$,
quindi posso dire solo che

$$\iint_{F_m} \frac{2v}{u^4 + v^4} \, du \, dv \geq \iint_{E_m} \frac{2v}{u^4 + v^4} \, du \, dv \sim \frac{1}{m}$$

Per avere una stima dall'altra parte per il momento ho solo

$$\iint_{F_m} \leq \iint_{E_m} \text{ che però va come } \frac{1}{m}.$$

Provare a vedere se si trova l'adattamento giusto!

— o — o —