A.A. 2012/2013
Corso di Analisi Matematica I

Stampato integrale delle lezioni

Volume 1

Massimo Gobbino

Indice

ANALISI MATEMATICA I – LEZIONE 001

Titolo nota 26/09/2012

INSIEMI Che cos'è un insieme? Non ve lo dico formalmente.

Come si presenta un insieme:

* PER ELENCO $A = \{3, 7, 12, a, \bigstar, \square\}$

Oss. 1 : l'ordine non è importante

Oss. 2 : gli elementi ripetuti contano una sola volta

$A = \{3, 12, \bigstar, \square, a, 7\} = \{12, 3, \bigstar, \bigstar, \square, a, 7, \square, \square\}$

* PER PROPRIETÀ $A = \{\text{studenti che stanno seguendo questa lezione}\}$

NOTAZIONI $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{elemento}}}{a} \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{insieme}}}{A}$ $(A \ni a)$ "a appartiene ad A"

$a \notin A$ $(A \not\ni a)$ "a NON appartiene ad A"

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{insiemi}}}{A} \subseteq \underset{\substack{\uparrow \\ }}{B}$ $(B \supseteq A)$ "A è sottoinsieme di B" oppure "A è contenuto in B"

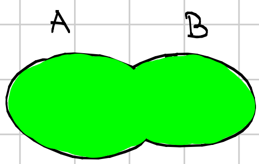
Ogni elemento di A è anche elemento di B

$\emptyset$: insieme vuoto : non contiene nessun elemento

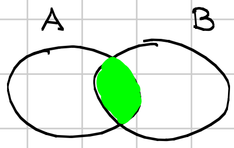
OPERAZIONI $A \cup B$ unione

$A \cap B$ intersezione

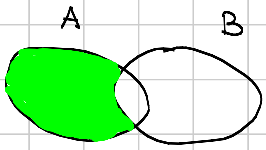
$A \setminus B$ differenza



$A \cup B$



$A \cap B$



$A \setminus B$

x tali che $x \in A$ oppure $x \in B$ (OR, VEL, $\vee$)

x tali che $x \in A$ e $x \in B$ ($\wedge$ (AND))

x tali che $x \in A$ e $x \notin B$

Esempi $A = \{2, 7, \square, \star, 19\}$

$B = \{$ interi positivi dispari $\}$

$2 \in A \cup B$	$2 \in A \cap B$	$2 \in A \setminus B$	$19 \in A \cap B$	
Vero	Falso	Vero	Vero	
$A \cap B \subseteq A$	$2 \subseteq A$			
Vero	Falsa (a dx e sx dovrebbero esserci insiemi)			
$2 \in A$	$\{2\} \subseteq A$	$\{2\} \in A$	$\emptyset \subseteq A$	$\emptyset \in A$
Vera	Vera	Falsa	Vera	Falsa

Achtung! $2012 \geq 37$ Vera

$2012 \geq 2012$ Vera

Analogamente: $A \supseteq B$ ammette come possibilità sia che $A = B$ ma anche che B sia più piccolo di A

—o—o—

$\boxed{\text{PRODOTTO CARTESIANO}}$ Dati due insiemi A e B, si definisce il loro prod. cartesiano $A \times B$ come l'insieme delle coppie (a,b) con $a \in A$ e $b \in B$

Esempio $A = \{1, d\}$ $B = \{2, \square, £\}$

$$A \times B = \{(1,2), (1,\square), (1,£), (d,2), (d,\square), (d,£)\}$$

Osservazione Nelle coppie l'ordine è importante !!!

$$A \times A = \{(1,1), \underbrace{(1,d), (d,1)}_{\text{sono diversi !!!}}, (d,d)\}$$

Se A ha a elementi e B ha b elementi, allora $A \times B$ ha ab elementi.

NOTAZIONE Si indica con $|A|$ la cardinalità dell'insieme A, cioè il numero di elementi di A.

Quindi $$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

—o—o—

INSIEME DELLE PARTI

Dato un insieme A, si indica con $\mathcal{P}(A)$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A, cioè

$$\mathcal{P}(A) = \{ \text{insiemi } B \overset{\text{tale che}}{:} B \subseteq A \}$$

Esempi $A = \{1, d\}$
$\mathcal{P}(A) = \{ \emptyset, \{1\}, \{d\}, \{1, d\}\}$

$B = \{2, \star, \pounds\}$

$\mathcal{P}(B) = \{ \emptyset, \{2\}, \{\star\}, \{\pounds\}, \{2, \star\}, \{2, \pounds\}, \{\star, \pounds\}, \{2, \star, \pounds\}\}$

Quanti sono gli elementi di $\mathcal{P}(A)$? Sono

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

Perché? Per ogni elemento di A io posso decidere ↗ SI
↘ NO

Nel costruire un sottoinsieme di A, per ogni el. di A decido se metterlo o no nel sottoinsieme... Le scelte sono $2^{|A|}$

—o—o—

Esercizio (Hard) Calcolare $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))|$

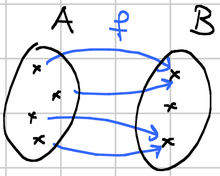
ANALISI MATEMATICA – LEZIONE 002

Titolo nota 26/09/2012

FUNZIONI Cos'è una funzione? Non ve lo dico.

Operativamente una funzione sono 3 cose:

1) Un insieme di partenza A,
2) " " " arrivo B,
3) Una serie di regole che ad ogni elemento $a \in A$ associa un unico elemento $f(a) \in B$



Come si presenta: $f : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{insieme} \\ \text{partenza}}}{A} \longrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{insieme} \\ \text{arrivo}}}{B}$

Grafico di una funzione

$$\text{Grafico di } f : \{(a,b) \in A \times B : b = f(a)\}$$

Oss. Il grafico di una funzione è un sottoinsieme del prodotto cart. $A \times B$.

Funzioni INIETTIVE e SURGETTIVE Sia $f : A \to B$ una funzione

- Si dice che f è INIETTIVA se manda elementi distinti di A in elementi distinti di B. "Formalmente"

$$a_1 \in A, \ a_2 \in A, \ a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

oppure, che è lo stesso, se

$$f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$$

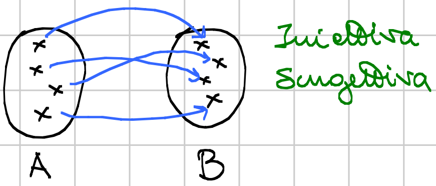
Brutalmente: frecce che partono da p.ti diversi arrivano in p.ti diversi

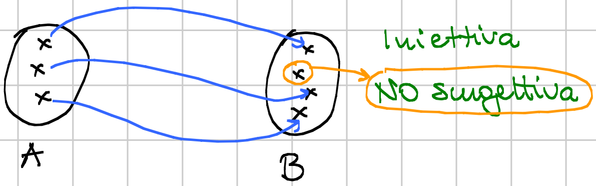
- Si dice che f è SURGETTIVA se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A. Formalmente

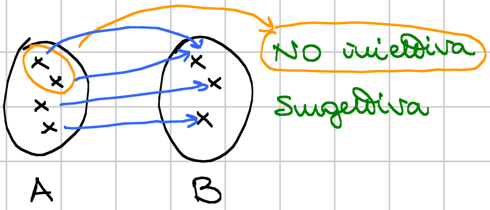
$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{per ogni}}}{\forall} b \in B \ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{esiste almeno un}}}{\exists} a \in A \ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tale che}}}{:} \ b = f(a)$$

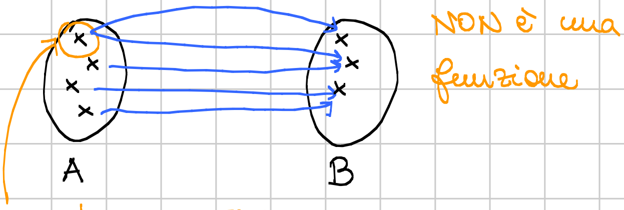
Brutalmente: ogni p.to in arrivo è raggiunto da almeno una freccia.

Esempi









Da un p.to non possono partire 2 FRECCE

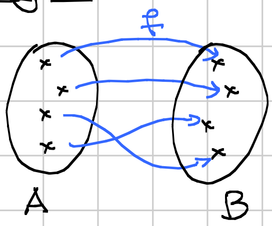
- Si dice che f è BIGETTIVA se è sia INIETTIVA sia SURGETTIVA

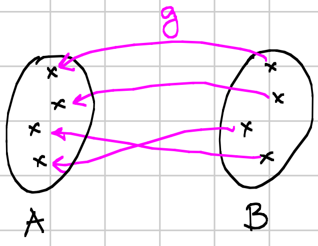
Teorema / definizione Una funzione $f : A \to B$ è bigettiva se e solo se è invertibile, cioè se e solo se esiste una funzione $g : B \to A$ tale che

$$\boxed{\begin{array}{ll} g(f(a)) = a & \forall a \in A \\ f(g(b)) = b & \forall b \in B. \end{array}}$$

Brutalmente: la funzione g, detta inversa di f, è la funzione che "torna indietro" rispetto alle frecce di f.

Disegno:





$g(f(a)) = a$ $\forall a \in A$: parto da a, seguo f, poi seguo g, e torno in a

$f(g(b)) = b$ $\forall b \in B$: parto da B, seguo g, poi seguo f, e torno in b

È sempre garantito che esiste la g? NO!

Posso farlo se e solo se in ogni p.to di B arriva una ed una sola freccia in partenza di A.

Questo accade se e solo se f è iniettiva e surgettiva.

Altra interpretazione:

- f è iniettiva se e solo se in ogni $b \in B$ arrivano 0 o 1 freccia
- f è surgettiva " " " " 1 o più frecce

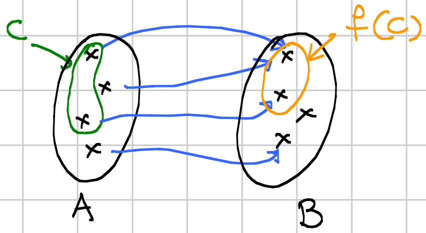
Quindi

f è bigettiva " " " 1 e 1 sola freccia, che dunque posso invertire.

—o—o—

IMMAGINE E CONTROIMMAGINE Sia $f : A \to B$ una funzione.

Sia $C \subseteq A$ un sottoinsieme.



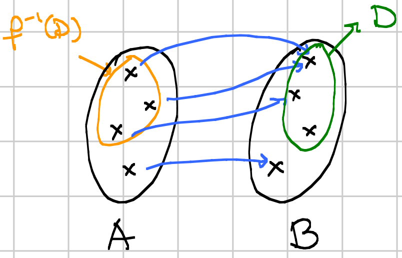
Si dice immagine di C l'insieme dei p.ti di B raggiunti da frecce che partono da elementi di C:

$$f(C) = \{ f(a) : a \in C \} \subseteq B$$

In particolare si dice immagine di A l'insieme

$$f(A) = \{ f(a) : a \in A \} = \text{tutti gli el. di B raggiunti}$$

PER ELENCO



Sia $D \subseteq B$ un sottoinsieme. Si dice controimmagine di D l'insieme di tutti i p.ti di A da cui partono frecce che arrivano in D. Formalmente

$$\underbrace{f^{-1}(D)}_{\text{controimmagine di D}} = \{ a \in A : f(a) \in D \}$$ ← PER PROPRIETÀ

Oss. 1 f è surgettiva se e solo se $f(A) = B$, cioè ogni p.to di B è raggiunto da frecce

Oss. 2 Per definire $f^{-1}(D)$ non serve che f sia invertibile

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 003

Titolo nota 27/09/2012

PRINCIPIO DI INDUZIONE

$\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali $= \{\boxed{0}, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

P_n = affermazione che contiene al suo interno un parametro $n \in \mathbb{N}$ e che a seconda dei valori di n può essere vera o falsa.

Esempi
$n^2 = n+6$ (vera per $n=3$, falsa per $n=4$ ...)
$2^n \geqslant n+6$ (vera per $n=4$, falsa per $n=3, \dots$)
Se un insieme A ha n elementi, allora $\mathcal{P}(A)$ ha 2^n elementi

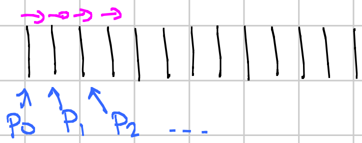
Obiettivo: stabilire per quali valori $n \in \mathbb{N}$ si ha che P_n è vera.

Principio di induzione Sia P_n come sopra.
Supponiamo che:
(i) P_0 è vera (sostituendo $n=0$ ottengo un'aff. vera)
(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, se P_n è vera, allora anche P_{n+1} è vera. (se è vera una, è vera la successiva)
Allora P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

"Dim." P_0 è vera per il p.to (i)
Uso il p.to (ii) con $n=0$. Essendo P_0 vera, sarà vera pure P_1
" " " " $n=1$. " P_1 " " " " P_2
" $n=2$ " P_2 " P_3
e così via...

Nomenclatura Il p.to (i) si dice PASSO BASE
Il p.to (ii) si dice PASSO INDUTTIVO, ed è quello che permette il passaggio da n ad $n+1$.

Brutalmente: l'induzione è come la caduta delle tessere del domino



Il p.to (i) è come dire che P_0 cade
Il p.to (ii) è come dire che c'è il meccanismo di caduta, cioè SE cade una tessera, allora cade la successiva.

Operativamente Voglio dimostrare che P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Allora dimostro 2 cose:

* PASSO BASE: sostituisco $n=0$ e vedo se P_0 è vera
* PASSO INDUTTIVO: assumo per ipotesi che P_n sia vera, ed usando questa info. dim. che anche P_{n+1} è vera.

Se mi riescono questi due p.ti, ho finito, cioè P_n è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Variante Supponiamo che
(i) P_{77} è vera,
(ii) Se P_n è vera, allora P_{n+1} è vera.
Allora P_n è vera per ogni $n \geq 77$ (per gli n precedenti non posso dire nulla, dovrei provare "a mano").

Esempio 1 Dimostrare che $0+1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Notazione: $0+1+2+\dots+n = \sum_{i=0}^{n} i$

sommatoria di i per i che va da 0 a n.

Dim. per induzione

$\boxed{\text{PASSO BASE}}$ Sostituisco $n=0$. Viene $0 = \frac{0 \cdot 1}{2} = 0$ ok

$\boxed{\text{PASSO INDUTTIVO}}$ Ipotesi: $0+1+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ con $n+1$ al posto di n

Tesi: $0+1+\dots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Dim. passo induttivo: $\underbrace{0+1+\dots+n}_{\text{uso ipotesi}}+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \overset{\text{somma delle frazioni}}{=}$

$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Uguagliando primo e ultimo ho la tesi.

Oss. Ho usato una catena di uguaglianze:

$$A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_k$$

In questi casi $A_1 = A_k$.

Oss.2 L'induzione insegna a dimostrare una data formula, ma non insegna a ricavare quella formula.

In questo esempio c'è il trucco di GAUSS:

$$\begin{array}{rcl} \boxed{0} + \boxed{1} + \boxed{2} + \dots + n & = & S \\ \boxed{n} + \boxed{(n-1)} + \boxed{(n-2)} + \dots + 0 & = & S \\ \underbrace{n + n + n + \dots + n}_{n(n+1)} & = & 2S \end{array}$$

$$2S = n(n+1) \Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$$

* * *

Esempio 2 $\quad 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\sum_{i=0}^{n} i^2$$

Dim. $\boxed{\text{PASSO BASE}}$ $n = 0$: $\quad 0^2 = \frac{0 \cdot 1 \cdot 1}{6} = 0 \quad$ ok

$\boxed{\text{PASSO INDUTTIVO}}$ Ipotesi: $\quad 0^2 + 1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Tesi: $\quad 0^2 + 1^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Dim. passaggio induttivo: cerco di fare una catena di uguaglianze

$$\underbrace{0^2 + 1^2 + \dots + n^2}_{\text{conosco}} + (n+1)^2 \underset{\boxed{\text{UsoIp}}}{\overset{}{=}} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

Tutte le uguaglianze dopo la 1ª sono PRECORSO.

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Esempio 3 $0^3+1^3+2^3+\dots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ [Esercizio]

Esempio 4 $1+a+a^2+\dots+a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ $\sum_{i=0}^{n} a^i$ (se $a \neq 1$)

Dim. per induzione $\boxed{\text{PASSO BASE}}$ $n=0$; $1 = \frac{a-1}{a-1} = 1$ (se $a \neq 1$)

$\boxed{\text{PASSO INDUTTIVO}}$ Ipotesi: $1+a+\dots+a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

Tesi: $1+a+\dots+a^{n+1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$

Dim. passo induttivo : catena di uguaglianze

$$\underbrace{1+a+\dots+a^n}_{\text{conosco}}+a^{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Uso Hp}}}}{=} \frac{a^{n+1}-1}{a-1}+a^{n+1} \underset{\text{Precorso}}{\textcircled{=}} \frac{\cancel{a^{n+1}}-1+a^{n+2}-\cancel{a^{n+1}}}{a-1}$$

$$\textcircled{=} \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$$

Uguagliando 1° e ultimo ho la tesi

Oss. Questa formula raccoglie le classiche scomposizioni

$n=2$ $1+a+a^2 = \frac{a^3-1}{a-1}$ $(a^3-1) = (a-1)(1+a+a^2)$

$n=3$ $1+a+a^2+a^3 = \frac{a^4-1}{a-1}$ $a^4-1 = (a-1)(1+a+a^2+a^3)$

$n=6$ $\sim$ $a^7-1 = (a-1)(a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)$.

— o — o —

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 004

Titolo nota 27/09/2012

Esempio 1 Se A è un insieme e $|A| = n$, allora $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$

Dim per induzione $\boxed{\text{PASSO BASE}}$ $n=0$. Se $|A|=0$, allora $A=\emptyset$, ma allora $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, quindi $|\mathcal{P}(A)| = 1$.

$\boxed{\text{Caso } n=1}$ Se $|A| = 1$, allora $A = \{a_1\}$, ma allora $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a_1\}\}$, quindi $|\mathcal{P}(A)| = 2 = 2^1 =$ Ok

$\boxed{\text{PASSO INDUTTIVO}}$ Ipotesi: se $|A| = n$, allora $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$
Tesi: se $|A| = n+1$, allora $|\mathcal{P}(A)| = 2^{n+1}$

Dim. passo induttivo Considero un insieme A con $n+1$ elementi
$$A = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\}$$
I sottoinsiemi di A sono di 2 tipi

* sottoinsiemi che non contengono a_{n+1}. Questi sono tanti quanti i sottoinsiemi di $\{a_1, \dots, a_n\}$, e questi per ipotesi sono 2^n

* sottoinsiemi che contengono a_{n+1}. Questi si ottengono aggiungendo a_{n+1} ad un qualunque sottoinsieme di $\{a_1, \dots, a_n\}$, quindi sono a loro volta 2^n.

In totale i sottoinsiemi di A sono $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$

— o — o —

Esempio 2 Dimostrare che $2^n \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Dim. per induzione $\boxed{\text{PASSO BASE}}$ $n=0$: $2^0 \geq 0$ $1 \geq 0$ Ok

$\boxed{\text{PASSO INDUTTIVO}}$ Ipotesi: $2^n \geq n$ Tesi: $2^{n+1} \geq n+1$

Dim. passo induttivo; punto a costruire una catena di disuguaglianze
$$A_1 \geq A_2 \geq \dots \geq A_k$$

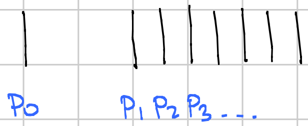
in modo da dedurre che $A_1 \geq A_k$ (voglio che $A_1 = 2^{n+1}$ e $A_k = n+1$)

$$2^{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{precorso}}}{=} 2\cdot 2^{n} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Hp. 2}}}}{\geq} 2\cdot n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{speranza}}}{\geq} n+1$$

Se la speranza è vera, allora 1° termine ≥ ultimo, che è la tesi che volevo dimostrare.

Ora la speranza è vera se e solo se $2n \overset{?}{\geq} n+1$, cioè se e solo se $n \geq 1$. Occhio: la speranza è vera, quindi ho dim. il passo induttivo, solo per $n \geq 1$.

Pensando al domino, la situazione è così: il meccanismo di caduta funziona (lo l'ho dimostrato) solo per $n \geq 1$.



Per completare la dimostrazione devo fare "a mano" il caso $n=1$

$\boxed{\text{PASSO BASE} \quad n=1}$ $\quad 2^1 \overset{?}{\geq} 1 \qquad 2 \geq 1 \quad$ ok.

—o—o—

Esempio 3 DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \boxed{\forall x \geq -1}$$

vedi oss. dopo dim.

Dim. per induzione $\boxed{\text{PASSO BASE}}$ $\quad n=0 : (1+x)^0 \overset{?}{\geq} 1+0\cdot x$

$$1 \geq 1 \qquad \text{ok}$$

$\boxed{\text{PASSO INDUTTIVO}}$ Ipotesi: $(1+x)^n \geq 1+nx$

Tesi : $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

Dim. passo induttivo: tento la catena di uguaglianze e disuguaglianze

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &\overset{\substack{\text{precorso} \\ \downarrow}}{=} (1+x)\cdot(1+x)^n \overset{\substack{\text{Hp. }(1+x) \\ \downarrow}}{\geq} (1+x)(1+nx) \\ &= 1+nx+x+nx^2 \\ &= 1+(n+1)x+\boxed{nx^2} \\ &\geq 1+(n+1)x\end{aligned}$$

≥0, quindi se lo tolgo la somma può solo calare

Confrontando 1° e ultimo ho la tesi.

Oss. Va bene per ogni x la dimostrazione? Per $n=2$ e $x=-100$ la disuguaglianza è falsa...

Per ipotesi avevo che $(1+x)^n \geq 1+nx$, ma ho usato che

$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+nx)(1+x)$$

cioè ho moltiplicato per $(1+x)$ conservando i versi.

Questo si può fare $\iff 1+x \geq 0$, cioè $\iff x \geq -1$

—o—o—

Oss. Applicando Bernoulli con $x=1$ si ha che

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

$2^n \geq 1+n \geq n$, quindi $2^n \geq n$ che è l'esempio precedente.

—o—o—

Esempio 4 Determinare per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ si ha che $n! \geq 2^n$

($n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ con la convenzione che $0! = 1$)

Esperimenti:

$0! \overset{?}{\geq} 2^0$	$1 \geq 1$	Ok	
$1! \overset{?}{\geq} 2^1$	$1 \geq 2$	NO	
$2! \geq 2^2$	$2 \geq 4$	NO	
$3! \geq 2^3$	$1\cdot 2\cdot 3 \geq 8$	$6 \geq 8$	NO
$4! \geq 2^4$	$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \geq 16$	$24 \geq 16$	SI
$5! \geq 2^5$	$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 \geq 32$	$120 \geq 32$	SI

Idea: $n! \geq 2^n$ per $n=0$ e poi per $n \geq 4$

Dim. per induzione $\boxed{\text{PASSO BASE}}$ $n=4$ fatto sopra

$\boxed{\text{PASSO INDUTTIVO}}$ Ipotesi $n! \geq 2^n$ Tesi: $(n+1)! \geq 2^{n+1}$

Dim passo induttivo: catena di uguaglianze e disuguaglianze

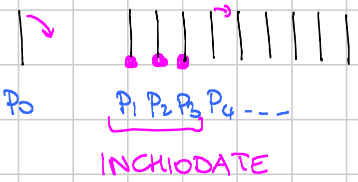
$$(n+1)! \overset{\text{def. fattoriale}}{=} (n+1)\cdot n! \underset{\boxed{\text{Hp}\cdot(n+1)}}{\geq} (n+1)\cdot 2^n \underset{\text{speranza}}{\geq} 2^{n+1}$$

Controllo la speranza: $(n+1)\cdot 2^n \overset{?}{\geq} 2^{n+1}$

$$(n+1)\cdot \cancel{2^n} \geq 2\cdot \cancel{2^n} \qquad (2^n>0)$$
$$n+1 \geq 2$$
$$n \geq 1$$

Quindi il passo induttivo è dimostrato per ogni $n \geq 1$.

Le tessere del domino sono messe così:



La caduta sarebbe possibile per $n \geq 1$, ma solo P_4 cade innescando il meccanismo.

—o —o —

Def. ricorsiva di fattoriale Si può definire $n!$ per induzione ponendo

(i) $0! = 1$

(ii) $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$

Cioè so calcolare $(n+1)!$ nel momento in cui so calcolare $n!$

—o —o —

Esempio 5 Trovare per quali $n \in \mathbb{N}$ si ha che $6^n \geq 4^n + 5^n$

Esperimenti $n=0$ NO, $n=1$ NO, $n=2$ NO, $n=3$ SI

Idea: Vero per ogni $n \geq 3$

Induzione ...., [Esercizio]

Passo induttivo Ipotesi: $6^n \geq 4^n + 5^n$

Tesi: $6^{n+1} \geq 4^{n+1} + 5^{n+1}$

Dim passo induttivo:

$$6^{n+1} = 6\cdot 6^n \geq 6\cdot(4^n+5^n) = 6\cdot 4^n + 6\cdot 5^n$$
$$\geq 4\cdot 4^n + 5\cdot 5^n$$
$$= 4^{n+1} + 5^{n+1}$$

[Giustificare i passaggi!].

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 005

Titolo nota 28/09/2012

FUNZIONI REALI $f : \underset{\nwarrow}{\mathbb{R}} \to \underset{\nearrow}{\mathbb{R}}$ $\quad f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dove $A \subseteq \mathbb{R}$

insieme numeri reali

Grafico di $f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \; : \; y = f(x) \}$

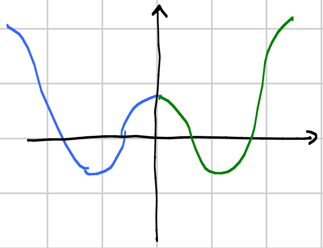
Proprietà di simmetria Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- Si dice che f è PARI se $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
- " " DISPARI se $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
- Si dice che f è PERIODICA se esiste un $T > 0$ tale che

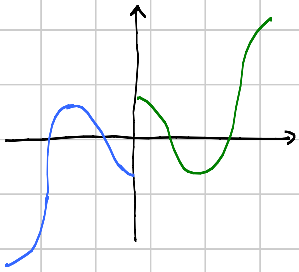
$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Graficamente Si ha che

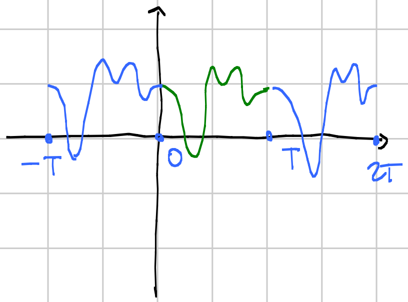
- f è pari se e solo se il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y
- f è dispari " " rispetto all'origine
- f è periodica se e solo se il tratto di grafico tra 0 e T si ripete poi tra T e $2T$, tra $2T$ e $3T$, e così via (idem sui negativi)



PARI



DISPARI



Oss. Se una funzione è periodica e T è un suo periodo, allora anche $2T, 3T, \ldots$ e in generale kT (con $k \geq 1$ intero) sono periodi della funzione.

Si dice minimo periodo il più piccolo T (se esiste) per cui si ha che $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

— o — o —

Proprietà di MONOTONIA Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si dice che f è

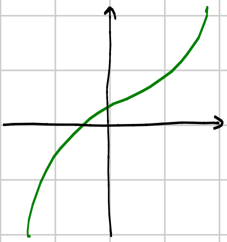
- **strettamente crescente** se
  $$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$
- **debolmente crescente** se
  $$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$
- **strettamente decrescente** se
  $$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$
- **debolmente decrescente** se
  $$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Una funzione si dice MONOTÓNA se rientra in una delle 4 tipologie precedenti (strettamente monotona se...).

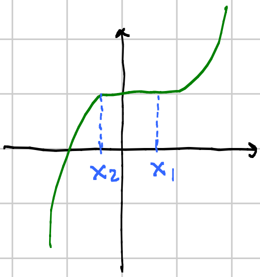
Achtung! Non utilizzare mai crescente o decrescente senza specificare debolmente o strettamente (per evitare confusione).

Achtung! f strettamente crescente $\Rightarrow$ f debolmente crescente
" decrescente $\Rightarrow$ " " decrescente

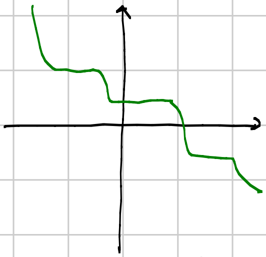
Esempi



strettamente crescente
debolmente crescente



debolmente crescente
NON strett. crescente

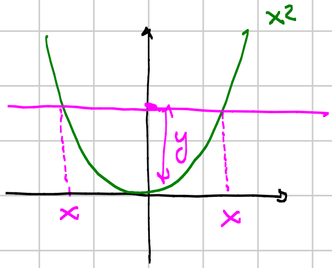


debolmente decr.
NON strett. decr.

Oss. Le uniche funzioni che sono contemporaneamente debol. cresc. e debolm. decrescenti sono le funzioni costanti.

debol. cresc.
debolm. decrescente.

PARENTESI Iniettività, surgettività, grafico



$f(x)$ è surgettiva se $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}$ t.c. $y = f(x)$
Detto altrimenti: una funzione è surgettiva se e solo se il grafico interseca ogni retta parallela all'asse x.

Una funzione è iniettiva se e solo se ogni retta parallela all'asse x incontra il grafico al più una volta.

Riassumendo Per funzioni $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si ha che

- f è INIETTIVA se e solo se per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione
$$f(x) = \lambda$$
ha 0 o 1 soluzione, cioè se e solo se per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ il grafico di $f(x)$ incontra la retta $y = \lambda$ 0 o 1 volta.

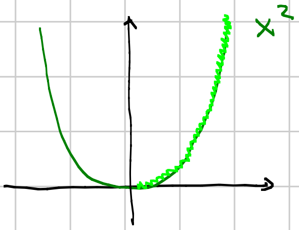
- f è SURGETTIVA se e solo se per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione
$$f(x) = \lambda$$
ha 1 o più soluzioni, cioè se e solo se per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ il grafico di $f(x)$ incontra la retta $y = \lambda$ 1 o più volte
- f è BIGETTIVA ... esattamente 1 soluzione ... esatt. 1 intersezione.

Osservazione Se una funzione è PARI, di sicuro non è iniettiva
" " " " PERIODICA " " "

Oss. 2 Se una funzione è STRETTAMENTE CRESCENTE, allora di sicuro è iniettiva
(se $a_1 \neq a_2$, allora diciamo $a_1 < a_2$ e quindi $f(a_1) < f(a_2)$, quindi $f(a_1) \neq f(a_2)$)
Stessa cosa se la funzione è STRETTAMENTE DECRESCENTE

Quindi $\boxed{\text{STRETTAMENTE MONOTONA} \Rightarrow \text{INIETTIVA}}$

PRESENTAZIONE FUNZIONI E FUNZIONI INVERSE ELEMENTARI



POTENZE $f(x) = x^2$

Vista come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è pari

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

È iniettiva ? È surgettiva ?

NO NO

Ora cambio l' insieme di partenza e arrivo, cioè considero

$f(x) = x^2$ come $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

Così considero solo il tratto di grafico contenuto nel 1° quadrante.

Ora f è iniettiva e surgettiva.

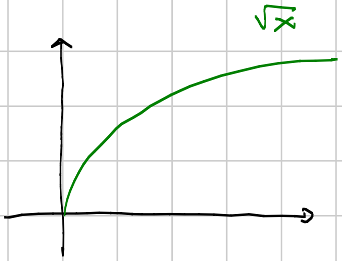
Essendo iniettiva e surgettiva, ammette una funzione inversa

$$g : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

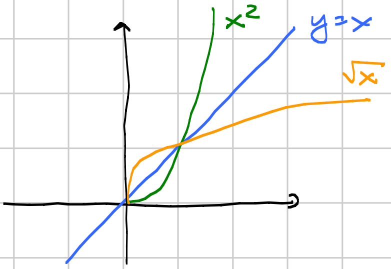
Questa funzione è $g(x) = \sqrt{x}$

Quindi $\sqrt{x}$

- prende in INPUT numeri reali ≥ 0
- fornisce in OUTPUT " " ≥ 0



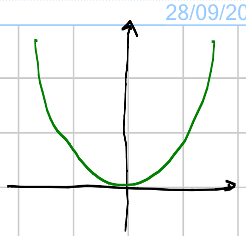
Osservazione Il grafico di una funzione e della sua inversa sono l' uno il simmetrico dell'altro risp. alla bisettrice $y = x$



ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 006

Titolo nota 28/09/2012

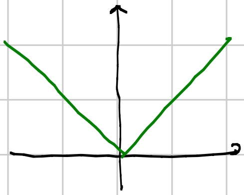
Ancora iniettività e surgettività. $f(x) = x^2$



In. e surg. dipendono DA DOVE A DOVE

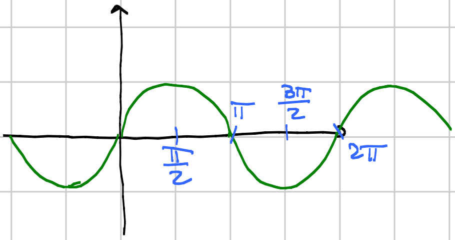
	Iniettività	Surgettività
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	NO	NO
$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$	SI	SI
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$	NO	SI
$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$	SI	NO

Esempio 2 $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$



Iniettività e surgettività come sopra.

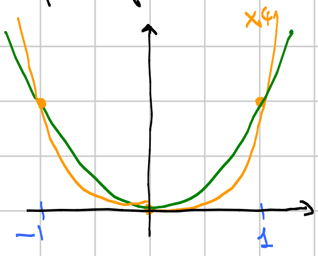
Esempio 3 $f(x) = \sin x$

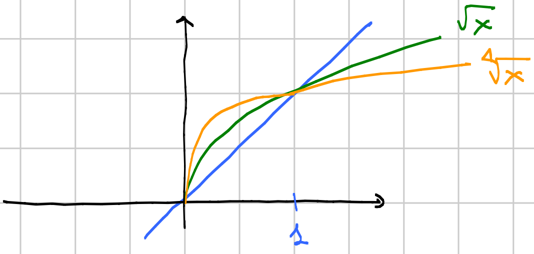


	Iniettiva	Surgettiva
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	NO	NO
$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$	NO	NO
$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$	così non va bene perchè non è vero che ogni elem. dell'insieme di partenza va a finire in un el. dell'insieme di arrivo. Ad esempio $x = \frac{3\pi}{2}$	
$f: [0, \pi] \to \mathbb{R}$	NO	NO
$f: [0, \pi] \to [0, 1]$	NO	SI
$f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$	NO	SI

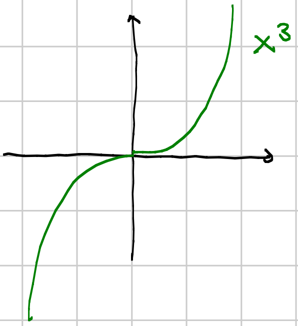
— o — o —

Tornando alle funzioni potenze, la stessa situazione di $f(x) = x^2$ vale per $f(x) = x^k$ con k intero positivo pari





$f(x) = x^3$ (e più in generale $f(x) = x^k$ con k intero positivo dispari)

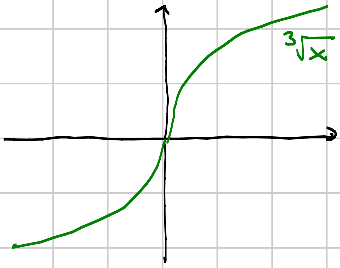


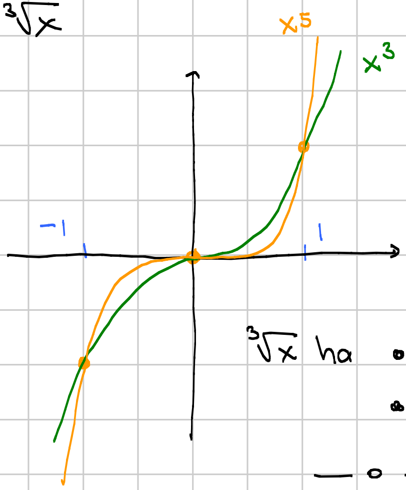
Funzione dispari

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è sia iniettiva, sia surgettiva, quindi è invertibile. La sua inversa è una $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che è

$g(x) = \sqrt[3]{x}$





[Ex: stessa cosa con $\sqrt[3]{x}$ e $\sqrt[5]{x}$]

$\sqrt[3]{x}$ ha
- in INPUT reali qualunque
- in OUTPUT reali qualunque dello stesso segno dell'input

—o—o—

FUNZIONI ESPONENZIALI

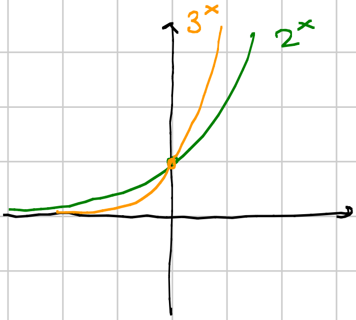
$f(x) = 2^x$

Potenze: x alla base

Esponenziali: x all'esponente

Se x e sia nella base, sia nell'esponente è esponenziale

Vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non ha particolari simmetrie è iniettiva, ma non surgettiva.



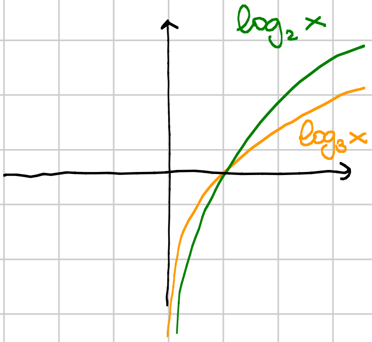
Vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0} = (0, +\infty)$ è iniettiva e surgettiva.

Quindi ammette una funzione inversa $g: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ che è

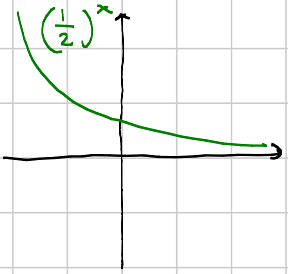
$$g(x) = \log_2 x$$

Quindi $\log_2$ ha
- in INPUT numeri reali >0
- in OUTPUT numeri reali qualunque.

Stessa cosa per $f(x) = a^x$ con $a > 1$



Gli esponenziali $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$ sono simili

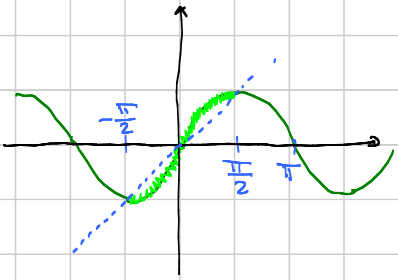


Esercizio: mettere sullo stesso grafico $(\frac{1}{3})^x$ e fare i grafici dei rispettivi logaritmi.

— o — o —

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

$f(x) = \sin x$



Vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è iniettiva, non è surgettiva

È dispari $\sin(-x) = -\sin x$ e periodica di periodo minimo 2π.

Vista come $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ è invertibile

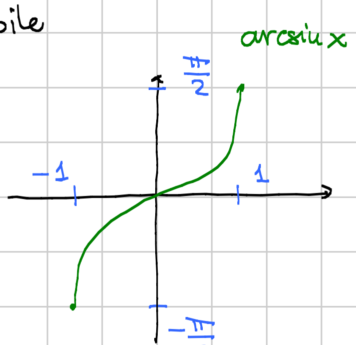
La funzione inversa è una

$$g: [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

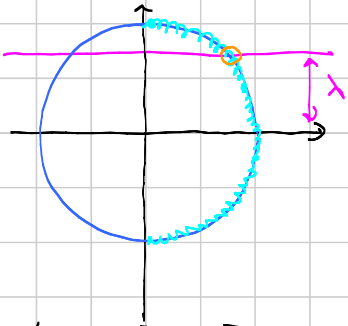
e si indica con $g(x) = \arcsin x$

Quindi arcsin

- prende in INPUT valori $x \in [-1,1]$
- restituisce in output valori in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



Interpretazione di arcsin x nella circonferenza trigonometrica



Se voglio calcolare arcsin λ, devo trovare i valori di x tali che $\sin x = \lambda$

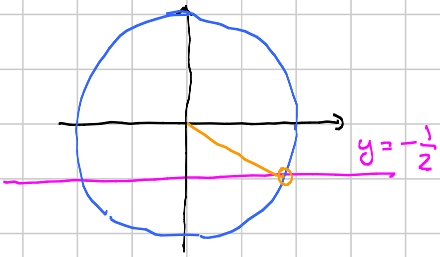
Quindi interseco la circonferenza con la retta $y = \lambda$ e ottengo 2 soluzioni (tranne per $\lambda = \pm 1$ che viene una sol. sola).

arcsin λ è la soluzione a destra, cioè quella tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$

Esempio $\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$

$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

$\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$



ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 007

Titolo nota 28/09/2012

Cos x e arccos x

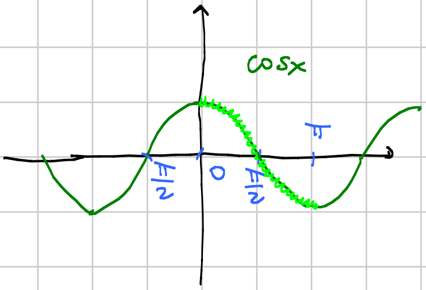
$f(x) = \cos x$

Vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è pari e periodica di periodo minimo 2π

$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$

$f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) = \cos x = f(x)$

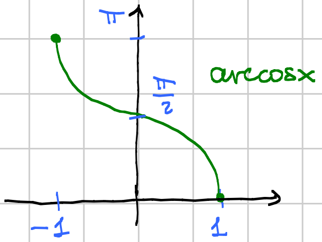
Non è né iniettiva, né surgettiva.



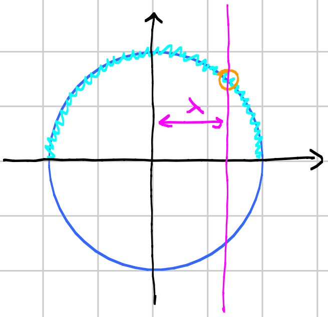
Vista come $f: [0,\pi] \to [-1,1]$ è iniettiva, surgettiva, strettamente decrescente. Quindi ammette una funzione inversa

$$g: [-1,1] \to [0,\pi]$$

che è $g(x) = \arccos x$. INPUT: valori $x \in [-1,1]$
OUTPUT: valori in $[0,\pi]$



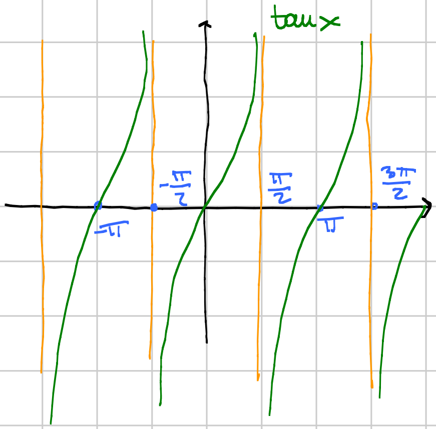
Nella circ. trigonometrica cerco arccos λ. Interseco la circ. con la retta $x = \lambda$. Se $\lambda \in [-1,1]$ ci sono intersezioni. Quella buona è quella tra 0 e π, quindi quella nella parte alta.



—o—o—

Tangente ed arctan

$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ t.c. $\cos x \neq 0$, cioè per ogni $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k intero)

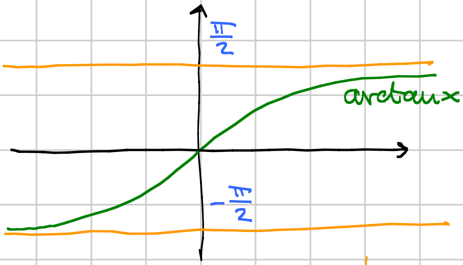


È dispari e periodica di periodo minimo π.

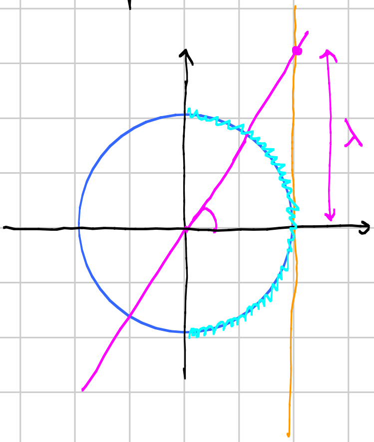
Vista come $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ è iniettiva, surgettiva, strett. crescente, quindi ammette una funzione inversa che è $g(x) = \arctan x$

$$g: \underset{\substack{\uparrow \\ \text{INPUT}}}{\mathbb{R}} \to \underset{\substack{\uparrow \\ \text{OUTPUT}}}{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}$$

$g(x) = \arctan x$, vista come $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è dispari, iniettiva, non surgettiva, strettamente crescente.



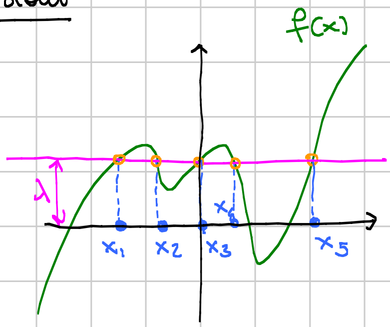
Interpretazione di arctan λ nella circ. trigonometrica. Devo trovare gli angoli la cui tangente è λ. Considero la retta che passa per (0,0) e per (1, λ). Tale retta interseca la circ. trig. in 2 p.ti. Quello buono è quello in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, cioè a dx



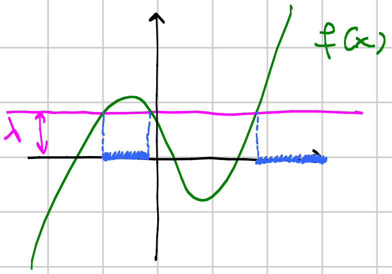
—o—o—

Interpretazione grafica di equazioni e disequazioni

- Cosa vuol dire risolvere $f(x) = \lambda$? Intersecare il grafico con la retta $y = \lambda$, ottenere un po' di punti e considerare le ascisse di tali punti



- Cosa vuol dire risolvere $f(x) > \lambda$? Cercare i p.ti x in cui il grafico sta sopra quota λ. La soluzione è sempre un sottoinsieme dell'asse x



$\boxed{\text{GRANDI TENTAZIONI}}$ Situazione classia

$\cancel{f}(2x+3) = \cancel{f}(5x+2)$ $\quad 2x+3 = 5x+2, \quad 3x = 1, \quad x = \frac{1}{3}$

Quando si può fare ? $\boxed{\text{Se e solo se } f \text{ è INIETTIVA}}$

$f(a_1) = f(a_2) \iff a_1 = a_2$

Esempi $7^{2x+3} = 7^{5x+2} \Rightarrow 2x+3 = 5x+2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

↑ ok perché 7^x è iniettiva

$(2x+3)^{2013} = (5x+2)^{2013} \Rightarrow 2x+3 = 5x+2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

↑ ok perché $f(x) = x^{2013}$ è iniettiva

$\arctan(x^2) = \arctan x \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x = 0$ opp. $x = 1$

↑ ok perché $\arctan x$ è iniettiva

$\sin(2x+3) = \sin(5x+2) \Rightarrow 2x+3 = 5x+2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

↑ **NO** $f(x) = \sin x$ non è iniettiva

Con le disequazioni: $\cancel{f}(2x+3) > \cancel{f}(5x+2) \Rightarrow 2x+3 > 5x+2$

Si può fare se e solo se f è $\boxed{\text{STRETTAMENTE CRESCENTE}}$

Perché? Ipotesi: $f(a_1) > f(a_2)$ Tesi: $a_1 > a_2$

Cosa potrebbe succedere?

- $a_1 > a_2$, e mi va bene
- $a_1 = a_2$, ma non può essere perché avrei che $f(a_1) = f(a_2)$, il che è contro l'ipotesi
- $a_1 < a_2$, ma avrei che $f(a_1) < f(a_2)$, il che è ancora assurdo.

Fatto generale: $f(a_1) > f(a_2) \Leftrightarrow a_1 > a_2$ VERO se f è str. cresc.

Se invece f è strettamente decrescente, posso comunque fare l'eliminazione, ma devo $\boxed{\text{girare i versi}}$.

$f(a_1) > f(a_2) \Leftrightarrow a_1 < a_2$ VERO se f è strett. decr.

[Ex. fare la dimostrazione in questo]

[Ex.2: vedere cosa si salva di queste implicazioni quando la monotonia è solo debole].

Esercizio

$\arcsin(\sin 4) = 4$ NO $\arccos(\cos 4) = 4$ NO

$\arcsin(\sin 3) = 3$ NO $\arccos(\cos 3) = 3$ SI

" $2 = 2$ NO " $2 = 2$ SI

" $1 = 1$ SI " $1 = 1$ SI

corretto dopo video

$\sin(\arcsin \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ $\cos(\arccos \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$\sin(\arcsin \underset{\substack{\uparrow \\ \text{no possibile}}}{2}) = 2$ NO $\cos(\arccos \underset{\substack{\uparrow \\ \text{no possibile}}}{2}) = 2$ NO

[Capire i SI e NO: esercizio medio]

Esercizio Hard: capire cosa viene nei casi NO.

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 008

Titolo nota 29/09/2012

INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ = numeri naturali

$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, \dots\}$ = numeri interi

↑ zahlen

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$ = numeri razionali

↑ quozienti

$\mathbb{R}$ = numeri reali = "quelli in corrispondenza con una retta"

$\mathbb{C}$ = numeri complessi

—o—o—

<u>Oss.</u> $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, quindi $7 \in \mathbb{Q}$, $12 \in \mathbb{R}$

—o—o—

<u>Proprietà dei numeri reali</u>
→ algebriche
→ ordinamento
→ assioma di continuità

<u>Proprietà algebriche</u> Sui numeri reali sono definite 2 operazioni: somma e prodotto, con queste proprietà

(S1) $a+b = b+a$ per ogni $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ COMMUTATIVA

(S2) $(a+b)+c = a+(b+c)$ " " $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ ASSOCIATIVA

(S3) $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ t.c. $a+0 = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ ELEMENTO NEUTRO SOMMA

(S4) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists\, b \in \mathbb{R}$ t.c. $a+b=0$. ESISTENZA OPPOSTO (inverso rispetto alla somma)
Questo b si indica con $(-a)$

(P1) $a \cdot b = b \cdot a$ per ogni... COMMUTATIVA

(P2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ " " ASSOCIATIVA

(P3) $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ t.c. $a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ EL. NEUTRO RISP. PRODOTTO

(P4) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists\, b \in \mathbb{R}$ t.c. $a \cdot b = 1$ ESISTENZA RECIPROCO (inverso rispetto al prodotto)
Questo b si indica con $\frac{1}{a}$

(D) $a(b+c) = ab+ac$ per ogni $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ DISTRIBUTIVA

In quali altri insiemi numerici valgono

(D)	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$		
(S1)	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	(P1)	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
(S2)	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	(P2)	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
(S3)	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	(P3)	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
(S4)	$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	(P4)	$\mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Proprietà di ordinamento Dati due numeri reali x e y si ha sempre che $x \geq y$ oppure $y \geq x$. Le proprietà dell'ordinamento sono

(O1) $x \geq x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ RIFLESSIVA

(O2) se $x \geq y$ e $y \geq x$, allora $x = y$ ANTISIMMETRICA

(O3) se $x \geq y$ e $y \geq z$, allora $x \geq z$ TRANSITIVA

Ci sono poi delle proprietà che legano l'ordinamento alle operazioni algebriche. Sono

(OA1) Se $x \geq y$, allora $x+z \geq y+z$ per ogni $z \in \mathbb{R}$

(OA2) Se $x \geq y$, allora $x \cdot z \geq y \cdot z$ per ogni $\boxed{z \geq 0}$

Da queste si potrebbe dedurre l'ulteriore proprietà

(OA2') Se $x \geq y$, allora $x \cdot z \leq y \cdot z$ per ogni $\boxed{z \leq 0}$

Oss. Le proprietà di ordinamento valgono in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ (non varranno in $\mathbb{C}$)

Esempi Risolvendo equazioni e disequazioni, si usano (inconsapevolmente) le proprietà algebriche e di ordinamento.

$3x+2 \geq 7$ Aggiungo a dx e sx (-2) senza cambiare versi (OA1)

$(3x+2)+(-2) \geq 7+(-2)$

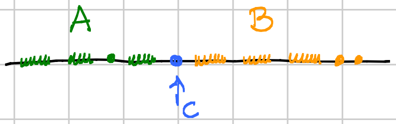
$\underset{\substack{\uparrow \\ (S2)}}{=} 3x + (2+(-2)) \underset{\substack{\uparrow \\ (S4)}}{=} 3x+0 \underset{\substack{\uparrow \\ (S3)}}{=} 3x$ $3x \geq 5$

$3x \cdot \frac{1}{3} \geq 5 \cdot \frac{1}{3}$

Moltiplico a dx e sx per $\frac{1}{3}$ conservando i versi (OA2) $\rightsquigarrow x \geq \frac{5}{3}$

Fino ad ora nulla distingue $\mathbb{Q}$ da $\mathbb{R}$.

Assioma di continuità



Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ due sottoinsiemi diversi da $\emptyset$. Supponiamo che A stia tutto a sinistra di B, cioè

$$a \leq b \qquad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$

L'assioma di continuità dice che esiste almeno un elemento $c \in \mathbb{R}$ tale che "sta in mezzo", cioè

$$c \geq a \qquad \forall a \in A$$
$$c \leq b \qquad \forall b \in B$$

Oss.
- Il c non è obbligato ad essere unico (se c'è "un buco" tra A e B, tutti i c "nel buco" vanno bene)
- Il c può appartenere ad A, a B, e anche ad entrambi (in questo caso è l'unico elemento separatore).

* * *

Fatto: l'assioma di continuità vale in $\mathbb{R}$, ma non vale in $\mathbb{Q}$, cioè in $\mathbb{Q}$ esistono degli insiemi A e B, con A a sx di B, che non ammettono un separatore $c \in \mathbb{Q}$.

Esempio
$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ e } x^2 > 2\}$$

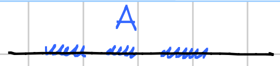
È semplice dimostrare che A sta tutto a sx di B.
Se ci fosse un $c \in \mathbb{Q}$ che sta tra A e B, allora ragionevolmente dovrebbe essere $c^2 = 2$, ma in $\mathbb{Q}$ non esiste un elemento il cui quadrato è 2. Quindi in $\mathbb{Q}$ non esiste il separatore.

Conclusione: sui numeri reali si definisce $\sqrt{2}$ come "il tizio che sta in mezzo tra A e B" che in $\mathbb{R}$ esiste.

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 009

Titolo nota 29/09/2012

Setting: sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto



Def. Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di A se

$$a \leq M \qquad \forall a \in A$$

Si dice che $m \in \mathbb{R}$ è un minorante di A se

$$a \geq m \qquad \forall a \in A$$

Oss.
- Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, non è detto che esistano dei maggioranti (o dei minoranti). Ad esempio $\mathbb{N} = A$ non ammette maggioranti.
- Se esiste un maggiorante M, questo di sicuro non è unico (tutti i numeri $\geq M$ sono a loro volta maggioranti). Idem per i minoranti.

Def. Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è il massimo di A e si scrive $M = \max A$ se

(i) $a \leq M \quad \forall a \in A$ (cioè M è un maggiorante di A)

(ii) $M \in A$.

Si dice che $m \in \mathbb{R}$ è il minimo di A e si scrive $m = \min A$ se

(i) $a \geq m \quad \forall a \in A$ (cioè m è un minorante di A)

(ii) $m \in A$.

Def. Si dice che $A \subseteq \mathbb{R}$ è
- superiormente limitato se esiste almeno un maggiorante di A
- inferiormente limitato " " " " minorante " "
- limitato se è contemporaneamente superiormente limitato e inferiormente limitato.

Oss.
- Massimo e minimo non sono obbligati ad esistere, nemmeno se A è limitato (ad esempio $A = (0,1)$ è lim., ma non ha max/min)
- Se esistono, allora sono per forza unici

Estremo superiore ed estremo inferiore. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$.

- Si dice che $\sup A = +\infty$ se non esistono maggioranti, cioè se A non è superiormente limitato
- Si dice che $\inf A = -\infty$ se... minoranti, ... A non è infer. lim.

- Si dice che $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se A è superiormente limitato, dunque ammette dei maggioranti, ed L è il minimo fra tutti i maggioranti
- Si dice che $\inf A = l \in \mathbb{R}$, se A è limitato inferiormente e l è il massimo di tutti i minoranti.

Esempio $A = (0,1)$ questo è limitato superiormente (327 è un maggiorante). I maggioranti sono tutti i numeri $M \geq 1$. Il minimo dei maggioranti è 1, quindi $\sup A = 1$. Analogamente, i minoranti sono tutti i numeri $m \leq 0$, quindi $\inf A = 0$.

Domanda: sup e inf sono obbligati ad esistere? Sì!

Teorema Se A è limitato superiormente, allora il minimo dei maggioranti esiste per forza.

Dim.: Sia B l'insieme dei maggioranti di A (quindi $B \neq \emptyset$). Per definizione di maggiorante abbiamo che B sta tutto a dx di A. Ma allora per l'assioma di continuità esiste $c \in \mathbb{R}$ t.c.

(i) $a \leq c$ per ogni $a \in A$ (quindi c è un maggiorante)

(ii) $c \leq b$ per ogni $b \in B$ (quindi c è più piccolo degli altri maggioranti)

Quindi c è il minimo dei maggioranti, che quindi esiste ed è unico in quanto minimo.

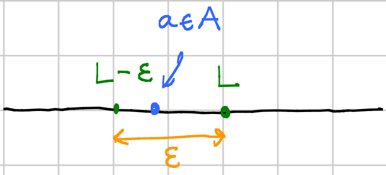
Esercizio Enunciare e dimostrare l'analogo per l'estremo inferiore.

—o—o—

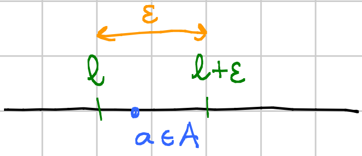
Caratterizzazione di inf e sup

① Si ha che $\sup A = +\infty$ se
$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists a \in A$ t.c. $a \geq M$
(ogni $M \in \mathbb{R}$ non è un maggiorante, perchè c'è qualcuno in A più grande di M)

② Si ha che $\inf A = -\infty$ se
$\underbrace{\forall M \in \mathbb{R}}\ \exists a \in A$ t.c. $a \leq M$
↑ anche enormemente negativo



③ Si ha che $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se
(i) $a \leq L \quad \forall a \in A$ (L è maggiorante)
(ii) $\underbrace{\forall \varepsilon > 0}\ \exists a \in A$ t.c. $a \geq L - \varepsilon$
↑ anche molto vicino a 0



④ Si ha che $\inf A = \ell \in \mathbb{R}$ se
(i) $a \geq \ell \quad \forall a \in A$
(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A$ t.c. $a \leq \ell + \varepsilon$.

—o—o—

Rapporti inf / sup / max / min

- Se esiste $M = \max A$, allora è anche $M = \sup A$
- Sup A non è obbligato ad appartenere ad A. Se ci appartiene, allora è anche il max A.

Achtung! Se $A \neq \emptyset$, allora sup A e inf A esistono PER FORZA.

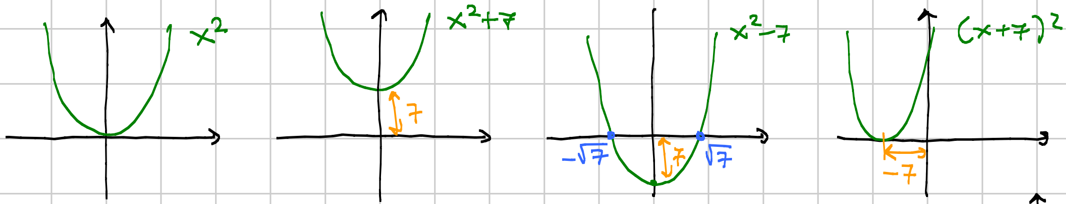
ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 010

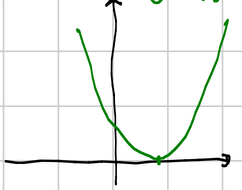
Titolo nota 29/09/2012

$\boxed{\text{OPERAZIONI SUI GRAFICI}}$ Come passare dal grafico di $f(x)$ al grafico di $f(x) \pm a$, $f(x \pm a)$, $|f(x)|$, $f(|x|)$, $-f(x)$, $f(-x)$, ...

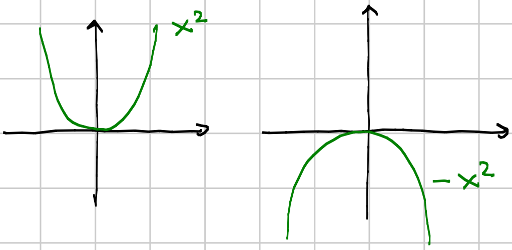
$\boxed{f(x) \rightsquigarrow f(x) \pm a}$ Spostamento SU – GIÙ di a (SU se +a)

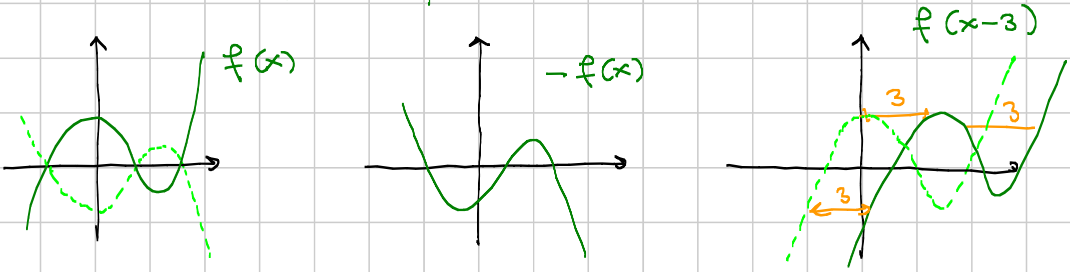
$\boxed{f(x) \rightsquigarrow f(x \pm a)}$ Spostamento DESTRA – SINISTRA (sx se c'è +a)



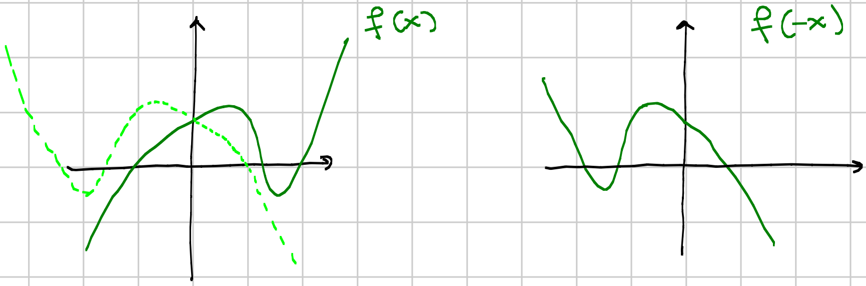


$\boxed{f(x) \rightsquigarrow -f(x)}$ Simmetria rispetto asse x





$\boxed{f(x) \rightsquigarrow f(-x)}$ Simmetria rispetto asse y

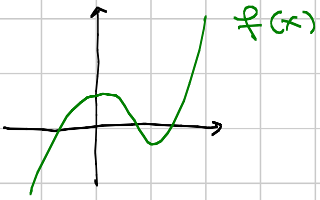


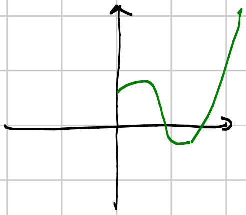
$\boxed{f(x) \rightsquigarrow |f(x)|}$

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

I tratti con $f(x) \geq 0$ (quindi I e II quadrante) non cambiano
" " " $f(x) < 0$ (" III e IV quadrante) vengono ribaltati

$\boxed{f(x) \rightsquigarrow f(|x|)}$ Per $x \geq 0$ (quindi I e IV quadrante) non cambia nulla. Poi basta osservare che $f(|x|)$ è una funzione pari, quindi una volta che è nota per $x \geq 0$ è nota per ogni $x \in \mathbb{R}$.





Non cambio nulla per $x \geq 0$

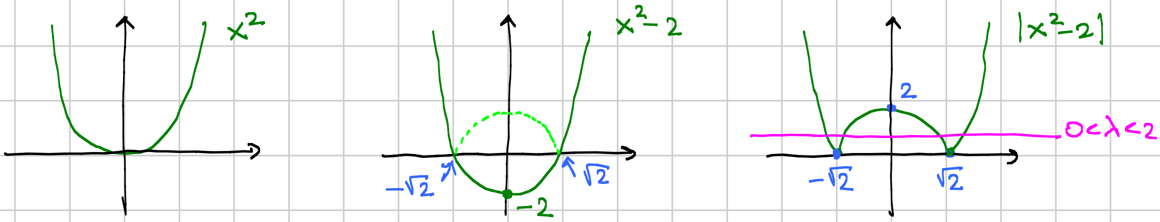
La completo in modo che sia una funzione pari.

<u>Osservazione</u> Passando da $f(x)$ a $f(|x|)$, non resta traccia di come era fatta $f(x)$ per valori $x<0$.

<u>Esercizio 1</u> Stabilire, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, quante sono le soluzioni dell'equazione

$$|x^2-2| = \lambda$$

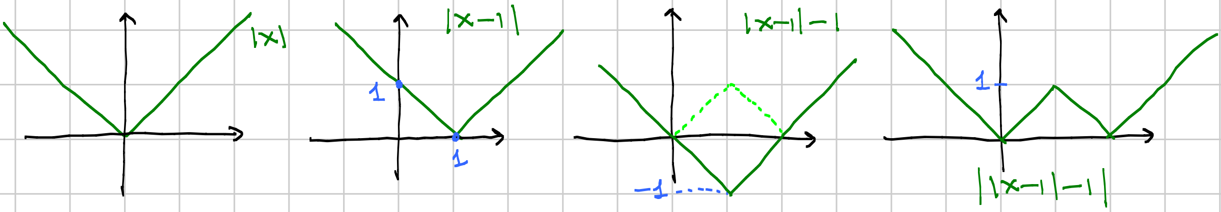
<u>Piano</u>: → disegnare il grafico di $f(x) = |x^2-2|$
→ intersecare il grafico con le rette orizzontali $y=\lambda$ e contare le intersezioni.



Interseco con $y=\lambda$. Ottengo:

→ 0 soluzioni per $\lambda<0$
→ 2 soluzioni per $\lambda=0$
→ 4 soluzioni per $0<\lambda<2$
→ 3 soluzioni per $\lambda=2$
→ 2 soluzioni per $\lambda>2$.

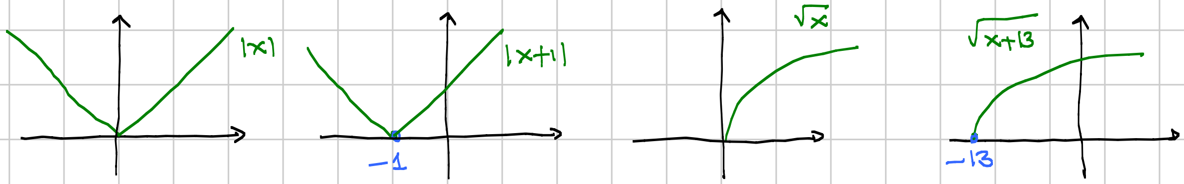
Esercizio 2 $||x-1|-1| = \lambda$ Disegno $f(x) = ||x-1|-1|$



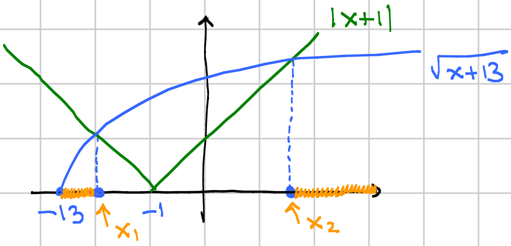
→ 0 soluzioni per $\lambda<0$
→ 2 soluzioni per $\lambda=0$
→ 4 soluzioni per $0<\lambda<1$
→ 3 soluzioni per $\lambda=1$
→ 2 soluzioni per $\lambda>1$.

Esercizio 3 $|x+1| \geq \sqrt{x+13}$ [Fare precorsisticamente, che è l'unico metodo SICURO]

Interpretazione grafica del risultato. Disegno
$f(x) = |x+1|$ e $g(x) = \sqrt{x+13}$



Sovrappongo i grafici



La soluzione della disequazione sarà del tipo
$[-13, x_1] \cup [x_2, +\infty)$

Restano da trovare x_1 e x_2. "Facendo i furbi"

$(x+1)^2 = x+13$ $\qquad$ $x^2+2x+1 = x+13$

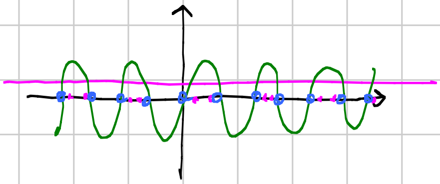
$x^2+x-12=0$ $\qquad$ $(x+4)(x-3)=0$ $\qquad$ $x_1=-4$ $\quad$ $x_2=3.$

—o —o —

Esercizi

	Max	Min	Inf	Sup
$\mathbb{N}$	N.E.	0	0	$+\infty$
$\mathbb{Z}$	N.E.	N.E.	$-\infty$	$+\infty$
$(0,5]$	5	N.E.	0	5
$\{x\in\mathbb{R} : x^2 \le 4\}$ " $[-2,2]$	2	-2	-2	2

$B = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = 0\}$ $\qquad$ $\sup B = +\infty$ $\qquad$ $\inf B = -\infty$



$C = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = \frac{1}{77}\}$ $\qquad$ $\sup = +\infty$ $\qquad$ $\inf = -\infty$

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 011

Titolo nota 03/10/2012

Fattoriali, binomiali e loro significato combinatorio

FATTORIALE $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$

Definito ricorsivamente: (i) $0! = 1$ (per convenzione)

(ii) $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$

Significato combinatorio:

→ modi di permutare n oggetti

→ numero dei possibili ordini di arrivo in una corsa con n concorrenti

→ numero di anagrammi di una parola con n lettere DIVERSE

"Dim": dati n concorrenti ho

- posso scegliere il 1° (vincitore) in n modi
- posso " " 2° in $(n-1)$ modi
- " " " 3° " $(n-2)$ modi

e così via

Oss. Ad ogni vincitore posso accoppiare un qualunque 2°, un qualunque 3°, per cui si moltiplica.

BINOMIALE Siano dati due interi $0 \leq k \leq n$. Si pone

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}^{k \text{ numeri da } n \text{ in giù}}}{k!}$$

↑ binomiale "n su k"

↑ modo equivalente di scrivere la stessa cosa semplificando da $n-k$ in giù

Casi particolari $\binom{n}{0} = \frac{\cancel{n!}}{0!\cdot\cancel{n!}} = 1$ $\qquad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n\,\cancel{(n-1)!}}{1!\,\cancel{(n-1)!}} = n \; ; \quad \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2!\,\cancel{(n-2)!}} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Significato combinatorio Ho un gruppo di n persone. Voglio scegliere un sottogruppo costituito da k persone $(0 \le k \le n)$. In quanti modi posso farlo?

- Posso scegliere il 1° in n modi
- Posso " " 2° in $(n-1)$ modi
- " " " 3° in $(n-2)$ modi

e così via

- Posso scegliere il k-esimo in $(n-k+1)$

Quindi per ora ho a disposizione $n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ scelte. Ora non è vero che tutte queste scelte portano a gruppi diversi. Infatti uno stesso gruppo di k persone può venir scelto in $k!$ modi diversi (cioè tanti quanti i possibili ordinamenti di k persone). Quindi devo dividere per $k!$:

$$\text{numero modi}: \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

— o — o —

Proprietà dei binomiali

① $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ (si tratta di scegliere tutti o nessuno)

② Simmetria: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Algebricamente: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

Scegliere i k da mettere nel gruppo è equivalente a scegliere gli $(n-k)$ da escludere dal gruppo

③ $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

I modi di scegliere una persona tra n sono esattamente n

④ $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ per ogni $0 \le k \le n$

<u>Dim. algebrica</u> $\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)\cdot n!}{(k+1)!\,(n-k)!}$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1)k!\,(n-k-1)!}$$

$$= \frac{n!\,(k+1) + n!\,(n-k)}{\underbrace{(k+1)k!}_{}\,\underbrace{(n-k)(n-k-1)!}_{}} = \frac{n!\,(\cancel{k}+1+n-\cancel{k})}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

<u>Interpretazione combinatoria</u> Cosa vuol dire $\boxed{\binom{n+1}{k+1}}$?

Devo scegliere (k+1) persone in un insieme di (n+1) persone.

Scelgo una persona speciale 웃 che chiamo l'(n+1)-esimo. Ci sono due modi di fare gruppi di (k+1) persone!

<u>1° modo</u>: scelgo 웃 + k persone tra le altre n. Questo lo posso fare in $\boxed{\binom{n}{k}}$ modi

<u>2° modo</u>: non scelgo 웃, ma scelgo (k+1) persone tra le restanti n, lo posso fare in $\boxed{\binom{n}{k+1}}$ modi.

<u>Oss.</u> Il fatto che $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ e la regola $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ permettono di calcolare tutti i binomiali ricorsivamente.

TRIANGOLO DI TARTAGLIA (all'estero: DI PASCAL)

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

- - - .

$\binom{0}{0}$ 0-esima

$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$ 1-esima

$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$ 2-esima

$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$ 3-esima

$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

La riga n-esima del triangolo di Tartaglia contiene i binomiali del tipo $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$

La regola della somma sui binomiali dice che ogni elemento della riga $(n+1)$ è la somma dei 2 elementi della riga n che gli stanno sopra.

Oss. Questo dice che i binomiali sono tutti INTERI.

Binomio di NEWTON Lo sviluppo di $(x+y)^n$ è del tipo

$$(x+y)^n = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} y + c_2 x^{n-2} y^2 + \dots + c_{n-1} x y^{n-1} + c_n y^n$$

I numeri $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ che compaiono come coeff. nello sviluppo sono i numeri della riga n del Triangolo di Tartaglia, cioè i binomiali. In formule

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}$$

Binomio di Newton

Esempi $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$ 1 – 4 – 6 – 4 – 1

$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$ 1 – 5 – 10 – 10 – 5 – 1

Significato combinatorio $(x+y)^5 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$

Come faccio per ottenere termini del tipo x^3y^2. Devo scegliere x in 3 parentesi e scegliere y in 2 parentesi. Quanti sono i modi di scegliere 3 parentesi su 5? Sono $\binom{5}{3}$, cioè il coeff. di x^3y^2.

Fatto: somma degli elementi della riga n del triangolo di Tartaglia fa 2^n. Basta mettere $x=y=1$ nel binomio di Newton

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.$$

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 012

Titolo nota 03/10/2012

Esempio 1 Calcolare il coefficiente di x^3y^{10} nello sviluppo di $(x+y)^{13}$

$$(x+y)^{13} = x^{13} + \dots + \boxed{?}\,x^3y^{10} + \dots + y^{13}$$

La risposta è $\binom{13}{3}$ oppure $\binom{13}{10}$ che è lo stesso

$$\binom{13}{3} = \frac{13\cdot 12\cdot 11}{3!} = \frac{13\cdot \overset{2}{\cancel{12}}\cdot 11}{\cancel{6}} = 22\cdot 13 = 286$$

$$\begin{array}{r} 22\,\cdot \\ 13 \\ \hline 66 \\ 22 \\ \hline 286 \end{array}$$

senza calcolare 13 righe del triangolo.

Esempio 2 Calcolare quanti sono gli anagrammi di BIOMEDICA. Sono 9 lettere, quindi verrebbe da dire $9!$, ma ci sono 2 lettere I, quindi bisogna dividere per 2.

"Trucco": pensare che le I siano di 2 colori diversi, così ogni anagramma compare 2 volte (a seconda di quale I compare per prima)

Esempio 3 Anagrammi di TUTTO. Verrebbe da dire $5!$, ma ci sono 3 lettere T. Pensandole di 3 colori diversi, ogni anagramma compare in $3!$ versioni diverse, quindi divido per $3!$

$$\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$$

Esempio 4 Anagrammi di MATEMATICA   3A 2M 2T

$$\frac{10!}{\underset{\overset{\uparrow}{3A}}{3!}\,\underset{\overset{\uparrow}{2M}}{2!}\,\underset{\overset{\uparrow}{2T}}{2!}}$$

Esempio 5 Anagrammi di MAMMA

$$\frac{5!}{\underset{\overset{\uparrow}{3M}}{3!}\,\underset{\overset{\uparrow}{2A}}{2!}} = \binom{5}{3} = \binom{5}{2}$$

$=$ si tratta di scegliere le 3 posizioni su 5 in cui scrivere M, oppure le 2 posizioni su 5 in cui scrivere A.

— ○ — ○ — ○ —

Esempio 6 Funzioni pari / dispari / periodiche

$f(x) = \sin(x^2)$	$f(x) = \sin^2 x$	$f(x) = \sin(x^3)$	$f(x) = \sin^3 x$
PARI	PARI	DISPARI	DISPARI
$f(x) = \cos(x^2)$	$f(x) = \cos^2 x$	$f(x) = \cos(x^3)$	$f(x) = \cos^3 x$
PARI	PARI	PARI	PARI

Alcune verifiche!

$\boxed{\sin(x^2)}$ $\quad f(-x) = \sin(-x)^2 = \sin x^2 = f(x) \Longrightarrow$ PARI

$\boxed{\sin^2 x}$ $\quad f(-x) = \sin^2(-x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = f(x) \Longrightarrow$ PARI

$\boxed{\sin^3 x}$ $\quad f(-x) = \sin^3(-x) = [\sin(-x)]^3 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sin è dispari}}}{=} [-\sin x]^3$

$= -\sin^3 x = -f(x)$

$\boxed{\cos^3 x}$ $\quad f(-x) = \cos^3(-x) = [\cos(-x)]^3 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cos è pari}}}{=} [\cos x]^3 = \cos^3 x = f(x) \Longrightarrow$ PARI

$f(x) = \sin(\cos x)$	$f(x) = \sin(\sin x)$	$f(x) = \cos(\sin x)$	$f(x) = \cos(\cos x)$
PARI	DISPARI	PARI	PARI

$\boxed{\cos(\sin x)}$ $\quad f(-x) = \cos(\sin(-x)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sin DISPARI}}}{=} \cos(-\sin x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cos PARI}}}{=} \cos(\sin x) = f(x)$

$\Longrightarrow$ PARI

$f(x) = 3^x$ non è né pari, né dispari. Basta osservare che

$f(1) = 3 \quad f(-1) = \frac{1}{3}$ Quindi $f(1) \neq -f(-1) \quad f(1) \neq f(-1)$

Esempio 7 $f(x) = \sin^2 x = [\sin x]^2$ è periodica?

Sì, un possibile periodo è 2π

$f(x+2\pi) = [\sin(x+2\pi)]^2 = [\sin x]^2 = f(x)$

$f(x) = \cos(\sin(7x))$ è periodica?

Sì, un possibile periodo è 2π

$f(x+2\pi) = \cos(\sin(7(x+2\pi))) = \cos(\sin(7x+14\pi)) = \cos(\sin(7x)) = f(x)$

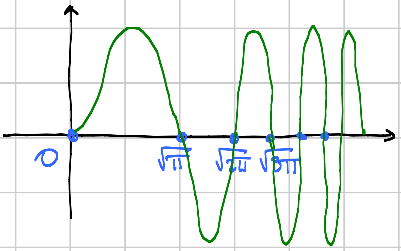
<u>Esempio 8</u> $f(x) = \sin(x^2)$ è periodica? No!

Dimostrarlo non è semplicissimo, ma "vederlo" sì. Come è fatto il grafico di $\sin(x^2)$? Dove si annulla?

$\sin(x^2) = 0 \iff x^2 = k\pi \iff x = \sqrt{k\pi}$ con $k \in \mathbb{N}$

Man mano che k cresce, gli zeri si "avvicinano" tra di loro.

L'effetto di x^2 è di rendere le oscillazioni sempre più veloci, il che impedisce la periodicità



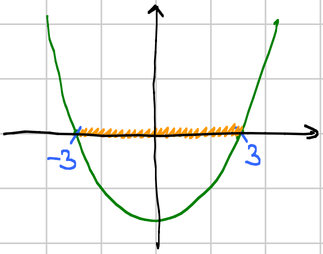
<u>Esempio 9</u> $\sup\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 \le 0\} = 3$ PROPRIETÀ

$\sup\{x^2 - 9 : x \le 0\} = +\infty$ ELENCO

$\sup\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 \le 0\}$ $\rightsquigarrow$ risolvere la disequazione $\rightsquigarrow$ si ottiene $x \in [-3, 3]$, si prende il sup

↑

"MONDO x": l'insieme in questione si rappresenta sull'asse x

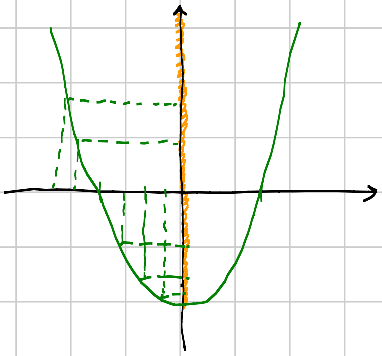


$\sup\{x^2 - 9 : x \le 0\}$ $\rightsquigarrow$ "scrivi" tutti gli $x \le 0$ e per ciascuno di questi calcola $x^2 - 9$. Così ottieni l'elenco che descrive l'insieme $\rightsquigarrow$ prendi il sup

↑

MONDO y: l'insieme in questione si rappresenta sull'asse y.

$\inf\{x^2 - 9 : x \le 0\} = -9$



Esempio 10

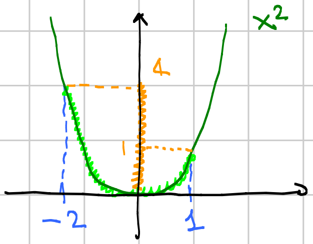
$\sup \{ x^2 : x \in [-2,1] \} = 4$

$\inf \{ x^2 : x \in [-2,1] \} = 0$

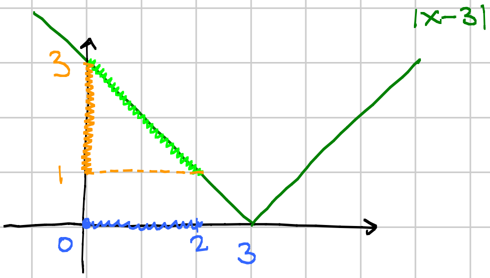
$\inf \{ |x-3| : x \in [0,2] \} = 1$ $\qquad \sup = 3$

$\sup \{ \sin(x^2) : x \geq 77 \} = 1$ $\qquad \inf = -1$

Sono tutti "MONDO y"



Quando x varia in $[-2,1]$, ho che y varia da 0 a 4.



* * *

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 013

Titolo nota 04/10/2012

TERMINOLOGIA Sia P_n una proprietà con un parametro $n \in \mathbb{N}$

- Si dice che P_n è vera FREQUENTEMENTE se è vera per infiniti valori di $n \in \mathbb{N}$
- Si dice che P_n è vera DEFINITIVAMENTE se è vera "da un certo p.to in poi" cioè se $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. P_n è vera $\forall n \geq n_0$.

Oss. Se P_n è vera definitivamente, allora P_n è vera frequentemente. Non è detto che valga il viceversa.

Esempi $n^2 - 2012 \geq 0$	Vera definitivamente, vera frequentemente
$3^n - 10.000 \leq 0$	Falsa ", falsa "
$(-2)^n \geq 7$	Vera frequentemente ($\forall n$ pari con $n \geq 3$) Falsa frequentemente ($\forall n$ dispari)

—○ —○ —

SUCCESSIONI

- Definizione rigida. Una successione di numeri reali è una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. In generale, invece di $f(n)$, si usa la notazione f_n.

Esempi $a_n = 3n + 5$ $b_n = n^2 - 2012$ $c_n = \frac{3n+2}{n+4}$

Oss. Secondo la def. rigida non potrei definire $a_n = \frac{1}{n}$ o $b_n = \sqrt{n-5}$ perché le espressioni non hanno senso per alcuni valori $n \in \mathbb{N}$.

- Definizione più elastica. Si considera successione una qualunque funzione a valori reali che sia definita anche non per ogni $n \in \mathbb{N}$, ma almeno definitivamente (quindi è ammesso un numero FINITO di valori $n \in \mathbb{N}$ per cui non è definita)

Esempi

$a_n = \frac{1}{n+5}$	$b_n = \frac{1}{n-5}$	$c_n = \sqrt{n-2012}$	$d_n = \sqrt{2012-n}$
Ok senso rigido senso elastico	Ok senso elast, non senso rigido	Ok per $n \geq 2012$ elastico, non senso rigido	Non è una successione (va male ∞ volte)

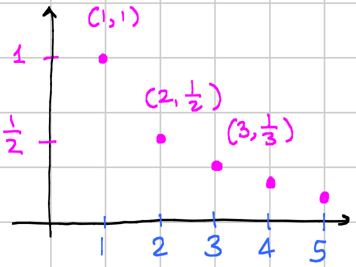
D'ora in poi le successioni si intendono in senso elastico

RAPPRESENTAZIONI DI UNA SUCCESSIONE

Sia a_n una successione

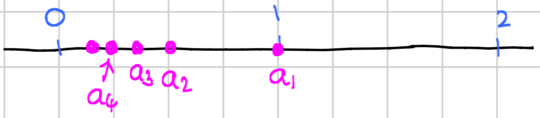
① Rappresentazione cartesiana nel piano: disegno il grafico della successione, cioè i p.ti (n, a_n) del piano cartesiano

$a_n = \frac{1}{n}$



② Rappresentazione su una retta: disegno su una retta i p.ti a_n

$a_n = \frac{1}{n}$



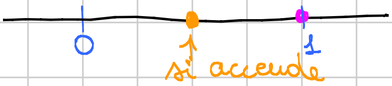
Vantaggio: sono nella retta invece che nel piano

Svantaggio: se uno non mette le etichette $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ai p.ti non è chiaro chi è a_1, chi è a_2, chi è a_3, ...

Inoltre la successione può passare più volte dallo stesso punto, che quindi avrebbe più etichette.

③ Rappresentazione dinamica: pensare ad una retta, pensare allo scorrere del tempo e ad una lampadina che al secondo n si accende nel punto a_n e resta accesa esattamente un secondo

$a_n = \frac{1}{n}$



si accende in a_1 al secondo T = 1

si accende in $a_2 = \frac{1}{2}$ al secondo T = 2

* * *

$\boxed{\text{DEFINIZIONI DI LIMITE}}$ Sia a_n una successione.

Sono possibili 4 tipi di comportamento

① $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ $\qquad a_n \to \ell$ $\qquad$ [Sono sinonimi]

(il limite per n che tende a $+\infty$ di a_n è ℓ) $\qquad$ (a_n tende ad ℓ)

Achtung! Si può dire "a_n tende a 3" oppure "il limite di a_n è 3".
Non ha senso dire "il limite di a_n tende a 3".

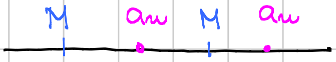
② $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ $\qquad a_n \to +\infty$

③ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ $\qquad a_n \to -\infty$

④ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ NON ESISTE $\qquad a_n$ è INDETERMINATA

Def. di ④ Nessuno dei precedenti

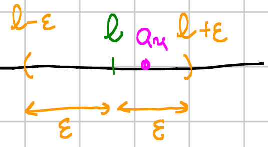
Def. di ② Si dice che $a_n \to +\infty$ se
$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)
si ha che $a_n \geq M$ definitivamente
(più M è grande, più il superamento avverrà tardi)



Def. di ③ Si dice che $a_n \to -\infty$ se
$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enormemente negativo)
si ha che $a_n \leq M$ definitivamente

Def. di ① Si dice che $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ se
$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)
si ha che $\ell-\varepsilon \leq a_n \leq \ell+\varepsilon$ definitivamente.
Questo è equivalente a dire che $\forall \varepsilon > 0$

$$\underbrace{|a_n-\ell|}_{\text{distanza tra } a_n \text{ ed } \ell} \leq \varepsilon \text{ definitivamente}$$



Due varianti di ① Si dice che $a_n \to \ell^+$ (tende ad ℓ da destra) se

$\forall \varepsilon > 0$ si ha che $\ell \underset{\text{stretta}}{\boxed{<}} a_n \le \ell + \varepsilon$ definitivamente

Si dice che $a_n \to \ell^-$ (a_n tende ad ℓ da sinistra) se

$\forall \varepsilon > 0$ si ha che $\ell - \varepsilon \le a_n \underset{\text{stretta}}{\boxed{<}} \ell$

— o — o —

Esempi intuitivi

$a_n = n^2 + 3$ $\qquad a_n \to +\infty$

$b_n = \dfrac{1}{n+5}$ $\qquad b_n \to 0$, anzi $b_n \to 0^+$

$c_n = (-1)^n$ $\qquad c_n$ non ha limite, cioè è indeterminata

$c_n = 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

— o — o —

Leggende metropolitane

$\boxed{1}$ Se $a_n \to +\infty$, vuol dire che a_n è crescente, almeno definitivamente?

No! Basta prendere a_n fatta così:

$2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, \dots$ (3 passi avanti, uno indietro)

$+3 \quad -1 \quad +3 \quad -1$

$\boxed{2}$ Se $a_n \to 0$, vuol dire che $a_n \to 0^+$ oppure $a_n \to 0^-$?

No! Basta prendere $a_n = \frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots$

$\boxed{3}$ Se $a_n \to 0^+$, vuol dire che a_n è decrescente, almeno definitiv.?

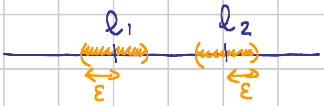
No! Farsi l'esempio

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 014

Titolo nota 04/10/2012

Teorema di unicità del limite Una successione ha sempre uno solo dei comportamenti ①, ②, ③, ④. Inoltre, se è di tipo ①, allora il valore $\ell \in \mathbb{R}$ a cui tende è unico.

"Dim"



Supponiamo per assurdo che $a_n \to \ell_1$, $a_n \to \ell_2$, con $\ell_1 < \ell_2$

Prendo $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo in modo che gli intervallini di centro ℓ_1 ed ℓ_2 e raggio ε siano disgiunti. Per def. di limite dovrei avere

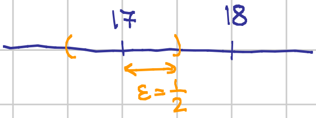
- $\ell_1 - \varepsilon \le a_n \le \ell_1 + \varepsilon$ definitivamente
- $\ell_2 - \varepsilon \le a_n \le \ell_2 + \varepsilon$ 〃

Ma non è possibile che a_n stia in entrambi gli intervalli.

Teoremi stile "permanenza del segno" Sono enunciati del tipo

- se $a_n \to +\infty$, allora definitivamente $a_n > 0$, oppure defin. $a_n \ge 2012$
- se $a_n \to \ell > 0$, allora definitivamente $a_n > 0$
- se $a_n \to 17$, allora definitivament $a_n < 18$

"Dim" Se $a_n \to 17$



per definizione di limite si ha che

$17 - \varepsilon \le a_n \le 17 + \varepsilon$ definitiv.

$\downarrow$ implica che $a_n < 18$ perché $\varepsilon < 1$.

—o—o—

Esempi di limiti calcolati usando la definizione

① $a_n = n^2$. Intuitivamente $a_n \to +\infty$. Lo dimostro con la defin. Devo verificare che $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n \ge M$ definitiv., cioè $n^2 \ge M$ definitiv. Ora

- se $M \le 0$, allora $n^2 \ge M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi definitivamente
- se $M \ge 0$, allora $n^2 \ge M$ per ogni $n \ge \sqrt{M}$, cioè da un certo p.to in poi.

② $b_n = \sqrt{n}$. Intuitivamente $b_n \to +\infty$.

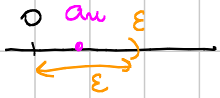
Devo verificare che $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $\sqrt{n} \geq M$ definitiv. Ora

- Se $M \leq 0$, allora $\sqrt{n} \geq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi definitiv.
  ($\sqrt{n} \geq 0 \geq M$)
- Se $M \geq 0$, allora $\sqrt{n} \geq M$ per ogni $n \geq M^2$, quindi definitiv.

Fatto generale $\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^a = +\infty \quad \text{per ogni } a > 0}$ → TABELLINA

Achtung! Si intende che l'esponente a è un numero reale FISSO, cioè NON DIPENDE DA n

③ $c_n = \frac{1}{n+4}$. Intuitivamente $c_n \to 0^+$.



Devo dimostrare che $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $0 < c_n \leq \varepsilon$ definitivamente, cioè $0 < \frac{1}{n+4} \leq \varepsilon$ definitivamente.

Ora $\frac{1}{n+4} > 0$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$, quindi definitivamente.

Vediamo l'altra:

$$\frac{1}{n+4} \leq \varepsilon \rightsquigarrow \text{precorso} \rightsquigarrow n+4 \geq \frac{1}{\varepsilon}, \text{ cioè } n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 4$$

Quindi anche la seconda disuguaglianza è vera definitivamente.

Osservazione Più ε è piccolo, più è grande $\frac{1}{\varepsilon} - 4$, più il definitivamente parte tardi.

Fatto generale $\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^a = 0^+ \quad \text{per ogni } a < 0}$ → TABELLINA

Brutalmente: n è in realtà al denominatore.

Oss. La def. di limite non si usa praticamente MAI.

Strumenti per il calcolo dei limiti: permettono di by-passare la definiz.

→ Teo. algebrici
→ Teo di confronto

RETTA REALE ESTESA $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

Utilità:

- se io dico $a_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$, è un modo per abbreviare la frase a_n è di tipo ①, ②, ③.
- in $\overline{\mathbb{R}}$ sono "quasi" definite le stesse operazioni algebriche che c'erano in $\mathbb{R}$. Esempi:

$$15 + (+\infty) = +\infty \qquad 15 + (-\infty) = -\infty$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \qquad 7 \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$-7 \cdot (+\infty) = -\infty \qquad \frac{+\infty}{1000} = +\infty$$

Il quasi è dovuto a 2 tipi di casi delicati

1° tipo: le 7 forme $+\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$

0^0, $1^{\pm\infty}$, $(\pm\infty)^0$.

2° tipo: quando si divide per 0.

Teoremi algebrici (Enunciato non precisissimo)

Siano a_n e b_n 2 successioni.

Supponiamo che $a_n \to l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $b_n \to l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Allora le successioni

$$a_n + b_n \to l_1 + l_2 \qquad a_n - b_n \to l_1 - l_2$$

$$a_n \cdot b_n \to l_1 \cdot l_2 \qquad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{l_1}{l_2}$$

$$a_n^{b_n} \to l_1^{l_2} \qquad c \cdot a_n \to c \cdot l_1 \text{ per ogni } c \neq 0$$

Non funziona nei casi problematici per le operazioni in $\overline{\mathbb{R}}$

dove le operazioni vanno intese nel senso di $\overline{\mathbb{R}}$.

$\boxed{\text{Teo. confronto a 2}}$ Siano a_n e b_n due successioni. Supponiamo che $a_n \leq b_n$ definitivamente.

- Se $a_n \to +\infty$, allora anche $b_n \to +\infty$
- Se $b_n \to -\infty$, allora anche $a_n \to -\infty$

$\boxed{\text{Teorema confronto a 3}}$ (Teorema dei carabinieri) Supponiamo che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{definitivamente}$$

e supponiamo che

$$a_n \to l \in \mathbb{R} \quad e \quad c_n \to l \in \mathbb{R} \quad (\text{STESSO } l \in \mathbb{R})$$

Allora b_n è di tipo ① e $b_n \to l$ (stesso l).

<u>Oss.</u> Ogni altra implicazione è ABUSIVA.

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 015

Titolo nota 05/10/2012

Esempio 1 $$\lim_{n\to+\infty} \underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{n^2}}}+\underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{2n}}} \quad [= +\infty + \infty] = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2-2n \quad [= +\infty - \infty \text{ : FORMA INDETERMINATA}]$$

Achtung! Achtung! Forma indeterminata NON VUOL DIRE che il limite non esiste, cioè che è di tipo ④.
Vuol dire solo che non posso decidere il comportamento della somma, differenza, prodotto, quoziente sulla base del comportamento dei 2 singoli pezzi.

$$\lim_{n\to+\infty} n^2-2n = \lim_{n\to+\infty} \underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{n}}}\underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{(n-2)}}} \quad [= +\infty\cdot(+\infty) = +\infty]$$

$$\lim_{n\to+\infty} \underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{3n^2}}}-\underset{-\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{7n^3}}} = \lim_{n\to+\infty} \underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{n^2}}}\underset{-\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{(3-7n)}}} = -\infty$$

↑ teo. algebrico

Esempio 2 $$\lim_{n\to+\infty} n^3-\sin n$$

Maggiorazione: $$\underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{n^3-\sin n}}} \overset{\text{uso } \sin n \le 1}{\overset{\downarrow}{\geq}} \underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{n^3-1}}}$$

$\boxed{\text{per confronto a 2}} \to$; per teo. algebrico

Esempio 3 $$\lim_{n\to+\infty} 2^n$$ Per induzione si è dimostrato che

$$\underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{2^n}}} \geq \underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{n}}}$$

Analogamente, se $a>1$ abbiamo che

$$a^n = (1+(a-1))^n \geq 1+(a-1)n$$

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Disug. di Bernoulli

$$\underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{a^n}}} \geq \underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\boxed{1+(a-1)n}}}$$

confronto a 2

(se $a-1>0$ quindi $a>1$

Fatto generale $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty \quad \text{per ogni } a>1}$

a deve essere una base FISSA, cioè NON DIPENDE da n

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a^n = 0 \quad \text{per ogni } a\in(0,1)}$$

↓ ogni $a\in(0,1)$ si può pensare come $\frac{1}{b}$ con $b>1$.

Esempio 4 $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\underset{\to+\infty}{\boxed{\left(\frac{3}{2}\right)^n}}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

Esempio 5 $\boxed{\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty}$ Per induzione: $\underset{\to+\infty}{n!} \geq \underset{\to+\infty}{2^n}$

(Bastava $n! \geq n$)

Esempio 6 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2} = \lim_{n\to+\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 2^0 = 1$

↑ teo. algebrico

"Dim." Disuguaglianza di Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n\in\mathbb{N}\ \forall x\geq -1$

La uso con $x=\frac{1}{n}$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+n\cdot\frac{1}{n} = 2$$

Faccio la radice n-esima a dx e sx: $1+\frac{1}{n} \geq \sqrt[n]{2}$

(lo posso fare perchè $f(x)=\sqrt[n]{x}$ è strett. crescente per $x\geq 0$, quindi posso applicarla conservando i versi).

Abbiamo quindi dimostrato che

$$\underset{\downarrow\atop 1}{1} \overset{\text{ovvia}}{\leq} \underset{\downarrow\atop 1}{\sqrt[n]{2}} \overset{\text{sopra}}{\leq} \underset{\downarrow\atop 1}{1+\frac{1}{n}}$$

Fatto generale $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{per ogni } a>0}$

Oss. Qual è la disuguaglianza analoga di $1 \le \sqrt[n]{2} \le 1+\frac{1}{n}$.

Caso $a>1$: $\sqrt[n]{a} \ge \sqrt[n]{1} = 1$

Uso Bernoulli con $x = \frac{a-1}{n}$: $(1+x)^n \ge 1+nx$

$\left(1+\frac{a-1}{n}\right)^n \ge 1+\cancel{n}\,\frac{a-1}{\cancel{n}} = a$, da cui $1+\frac{a-1}{n} \ge \sqrt[n]{a}$. Quindi

$$1 \le \sqrt[n]{a} \le 1+\frac{a-1}{n}$$

Esempio 7 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ Perchè?

Partiamo da $-1 \le \sin n \le 1$

Divido per n, che essendo una quantità positiva conserva i versi:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\boxed{-\frac{1}{n}}} \le \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\boxed{\frac{\sin n}{n}}} \le \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\boxed{\frac{1}{n}}}$$

per carabinieri

Esempio 8 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n^2+7^n\cdot n!)}{\sqrt{n}} = 0$

Partiamo da $-1 \le \cos(\text{Mostro}) \le 1$

Divido per $\sqrt{n}$ che non cambia i versi e ottengo

$$\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\boxed{-\frac{1}{\sqrt{n}}}} \le \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\boxed{\frac{\cos(\text{Mostro})}{\sqrt{n}}}} \le \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\boxed{\frac{1}{\sqrt{n}}}}$$

Esempio 9 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 - n\sqrt{n}\,\sin(n!) + 8$ [Conta n^2]

Chi comanda si raccoglie:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ +\infty}}{\boxed{n^2}}\left(1 - \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\boxed{\frac{\sin(n!)}{\sqrt{n}}}} + \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\boxed{\frac{8}{n^2}}}\right) \longrightarrow +\infty \qquad [+\infty\cdot(1-0+0)]$$

Esempio 10 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n^3+2n+5}{5n^3-6n^2+2} = \dfrac{4}{5}$ $\left[\text{È come fosse } \dfrac{4\cancel{n^3}}{5\cancel{n^3}}\right]$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^3}\left(4+\overset{\overset{0}{\uparrow}}{\boxed{\frac{2}{n^2}}}+\overset{\overset{0}{\uparrow}}{\boxed{\frac{5}{n^3}}}\right)}{\cancel{n^3}\left(5-\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\boxed{\frac{6}{n}}}+\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\boxed{\frac{2}{n^3}}}\right)} = \frac{4}{5}$$

Esempio 11 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7n\sqrt{n}+\cos(3n^2)}{n^2+\sin n+5} = 0$ È come fosse $\dfrac{7n\sqrt{n}}{n^2}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n\sqrt{n}}\left(7+\overset{\to 0}{\boxed{\frac{\cos(3n^2)}{n\sqrt{n}}}}\right)}{\underset{\underset{+\infty}{\downarrow}}{\sqrt{n}}\,\cancel{n^2}\left(1+\underset{\underset{\substack{0\\(\text{carabinieri})}}{\downarrow}}{\boxed{\frac{\sin n}{n^2}}}+\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\boxed{\frac{5}{n^2}}}\right)} = \left[\frac{7+0}{+\infty\,(1+0+0)} = \frac{7}{+\infty} = 0\right]$$

Esempio 12 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{3n}+\sqrt[5]{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ Comandano gli $n^{\frac{1}{2}}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac12}-n^{\frac13}}{\sqrt{3}\,n^{\frac12}+n^{1/5}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^{\frac12}}\left(1-\overset{\overset{0}{\uparrow}}{\boxed{n^{-\frac16}}}\right)}{\cancel{n^{\frac12}}\left(\sqrt{3}+\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\boxed{n^{-3/10}}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 016

Titolo nota 05/10/2012

① Criterio della radice
② Criterio del rapporto
③ Criterio rapporto → radice

CRITERIO DELLA RADICE Supponiamo che $a_n \geq 0$ definitivamente.
Supponiamo che esista

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora
- se $\ell > 1$ si ha che $a_n \to +\infty$
- se $\ell < 1$ si ha che $a_n \to 0$
- se $\ell = 1$ allora BOH (non si può dire nulla)

Operativamente
- Devo fare il limite di a_n e non sono capace
- Provo a fare il limite di $\sqrt[n]{a_n}$ e mi viene un certo ℓ
- Se $\ell > 1$ oppure $\ell < 1$ ora so quanto vale il limite di a_n

CRITERIO DEL RAPPORTO Supponiamo che $a_n > 0$ definitivamente
Supponiamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora stessa conclusione del criterio della radice.

CRITERIO RAPPORTO → RADICE Supponiamo che $a_n > 0$ definitivamente.
Supponiamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}.$$

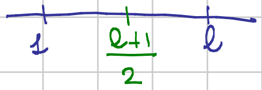
Allora

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \quad (\text{stesso } \ell)$$

Quello che viene facendo il rapporto viene pure facendo la radice.

$\boxed{\text{Dim. criterio della radice}}$ Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow l > 1$.
Supponiamo anche che $l \in \mathbb{R}$.

Allora avremo che (stile permanenza del segno)



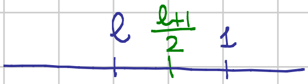
$\sqrt[n]{a_n} \geq \frac{l+1}{2}$ definitivamente. Elevo alla potenza n-esima e ho:

confronto a 2

$$\underset{\substack{\Downarrow\\+\infty}}{\boxed{a_n}} \geq \underset{\substack{\downarrow\\+\infty}}{\boxed{\left(\frac{l+1}{2}\right)^n}}$$

esponenziale con base > 1

$\boxed{\text{Caso 2}}$ Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} \to l < 1$



Ovviamente $l \geq 0$ perché limite di roba ≥ 0. Allora definitivamente $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2}$. Elevando

$$\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\boxed{0}} \overset{\substack{\text{ipotesi}\\\downarrow}}{\leq} \underset{\substack{\Downarrow\\0}}{\boxed{a_n}} \leq \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\boxed{\left(\frac{l+1}{2}\right)^n}}$$

esponenziale con base in (0,1)

carabinieri

[Ex. Fare il caso in cui $\sqrt[n]{a_n} \to +\infty$]

* * *

Esempio 1 $\lim_{n\to+\infty} \underset{\substack{\Vert\\a_n}}{\boxed{\frac{2^n}{n^2}}}$ $\left[\frac{+\infty}{+\infty} \text{: forma indeterminata}\right]$

Provo con il criterio del rapporto: devo fare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{2^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot\cancel{2^n}}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\left(1+\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\boxed{\frac{1}{n}}}\right)^2} = 2$$

Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 2$, per il criterio del rapporto so che $a_n \to +\infty$.

Esempio 2 $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^b}$

Applico il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)^b} \cdot \frac{n^b}{a^n} = \frac{a\cdot\cancel{a^n}}{\cancel{n^b}\left(1+\frac{1}{n}\right)^b} \cdot \frac{\cancel{n^b}}{\cancel{a^n}} = \frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^b} \longrightarrow a$$

Se $a>1$, allora $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^b} = +\infty$, indipendentemente da b

Se $a\in[0,1)$, allora $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^b} = 0$, " " ".

Fatto generale $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^b} = +\infty \quad \forall a>1 \quad \forall b>0}$ ESPONENZIALE BATTE POTENZA

Quindi $\lim_{n\to+\infty} \frac{(1.001)^n}{n^{3000}} = +\infty$

Esempio 3 $\lim_{n\to+\infty} \boxed{\frac{37^n}{n!}}$ $\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$

$\boxed{\frac{37^n}{n!}} = a_n$

Applico rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{37^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{37^n} = \frac{37\cdot\cancel{37^n}}{(n+1)\cdot\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{37^n}} = \frac{37}{(n+1)} \longrightarrow 0$$

Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 0 < 1$, abbiamo che $a_n \to 0$.

Fatto generale $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a>1}$ FATTORIALE BATTE ESPONENZIALE

(si intende che a^n è esponenziale con base fissa, cioè indipendente da n)

NUMERO e

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}71\ldots}$$

Si dimostra che la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ha un limite reale compreso tra 2 e 3 (lezioni successive)

Esempio 4 $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\boxed{\frac{n^n}{n!}}}_{a_n}$ $\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$

Applico criterio del rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n} =$

$$= \frac{\cancel{(n+1)}(n+1)^n}{\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e > 1$$

Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to e > 1$, allora $a_n \to +\infty$

Fatto generale $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{n!} = +\infty}$

Nota bene: anche la base dell'esponenziale dipende da n

Esempio 5 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n!+7^n+n^7+\cos(n^n)}{2n!+8^n+n^{700}} = \frac{1}{2}$ $\sim\frac{n!}{2n!}$

Rigorosamente: raccolgo n! sopra e sotto.

$$\frac{\cancel{n!}\left(1+\overset{\to 0}{\boxed{\frac{7^n}{n!}}}+\overset{\to 0}{\boxed{\frac{n^7}{n!}}}+\overset{\to 0}{\boxed{\frac{\cos(n^n)}{n!}}}\right)}{\cancel{n!}\left(2+\underset{\downarrow\, 0}{\boxed{\frac{8^n}{n!}}}+\underset{\downarrow\, 0}{\boxed{\frac{n^{700}}{n!}}}\right)} \to \frac{1}{2}.$$

ANALISI MATEMATICA 1 — LEZIONE 017

Titolo nota 05/10/2012

Criterio rapporto → radice se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$, allora $\sqrt[n]{a_n} \to$ stesso ℓ

Esempio 1 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}}$ $\quad [+\infty^0]$

Uso il criterio con $a_n = n$. Facco il rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n} \to 1 = \ell$$

Poichè $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$, allora anche $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n} \to 1$

Piccola estensione $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^a} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\sqrt[n]{n}\right]^a = 1^a = 1$

Ulteriore estensione $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^3+7n^2-3} = 1$

$$\sqrt[n]{n^3+7n^2-3} = \sqrt[n]{n^3\left(1+\frac{7}{n}-\frac{3}{n^3}\right)} = \underbrace{\boxed{\left[\sqrt[n]{n}\right]^3}}_{1} \cdot \underbrace{\boxed{\left(1+\frac{7}{n}-\frac{3}{n^3}\right)^{\frac{1}{n}}}}_{1^0=1} \to 1$$

Fatto generale $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\text{polinomio}} = 1 \quad \text{per ogni polinomio}}$

Esempio 2 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{7^n+5^n+n^{20}+13} = 7$ $\quad \sim \sqrt[n]{7^n} = 7$

$$\sqrt[n]{\dots} = \sqrt[n]{7^n\left(1+\frac{5^n}{7^n}+\frac{n^{20}}{7^n}+\frac{13}{7^n}\right)}$$

$$= 7\cdot\left(1+\underbrace{\boxed{\left(\frac{5}{7}\right)^n}}_{0}+\underbrace{\boxed{\frac{n^{20}}{7^n}}}_{0}+\underbrace{\boxed{\frac{13}{7^n}}}_{0}\right)^{\frac{1}{n}} \to 7\cdot 1^0 = 7$$

Esempio 3 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to+\infty} (n!)^{\frac{1}{n}}$ $[+\infty^0$: forma indeterminata$]$

Applico rapporto → radice con $a_n = n!$ Calcolo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)\cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = n+1 \to +\infty$$

Poichè $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to +\infty$, allora anche $\sqrt[n]{a_n} = \boxed{\sqrt[n]{n!} \to +\infty}$ → TABELLINA

Esempio 4 $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ $\frac{+\infty}{+\infty}$

Osservo che $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$ Ora applico rapporto → radice con $a_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= \frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}$$

Poichè $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{e}$, allora anche $\sqrt[n]{a_n} = \boxed{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \frac{1}{e}}$

Esempio 5 $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\boxed{\frac{3^{n^2}}{n^n}}}_{a_n}$ $\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$ occhio: l'esponente sopra è n^2...

Applico il criterio della radice. Calcolo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{n^2}}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n} = +\infty$$

Poichè $\sqrt[n]{a_n} \to l > 1$ abbiamo che $a_n \to +\infty$. In particolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n^2}}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\boxed{\frac{3^{n^2}}{n^n}}}_{+\infty} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{n^n}{n!}}}_{+\infty} = +\infty$$

Esempio 6 $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n^2}$

$$\frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n^2} = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^{2n}}}$$

Applico rapporto → radice con $a_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{2n+2}}\cdot\frac{n^{2n}}{(2n)!} = \frac{\overset{2\cancel{(n+1)}}{(2n+2)}(2n+1)\cancel{(2n)!}}{(n+1)^{\cancel{2}}(n+1)^{2n}}\ \frac{n^{2n}}{\cancel{(2n)!}} =$$

$$= \frac{2(2n+1)}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} = \frac{4n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}}$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{4n+2}{n+1}}}_{\downarrow\ 4}\ \underbrace{\boxed{\frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{2}}}}_{\downarrow\ \frac{1}{e^2}} \to \frac{4}{e^2}$$

Poichè $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to\frac{4}{e^2}$, allora anche $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n^2}\to\frac{4}{e^2}$.

—o—o—

Esempio 7 $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!+7^n}}{3n+2\sqrt{n}} =$ È come fosse $\frac{\sqrt[n]{n!}}{3n}\to\frac{1}{3e}$

Per sistemarlo rigorosamente, raccolgo sopra e sotto chi comanda

$$\frac{\sqrt[n]{n!\left(1+\frac{7^n}{n!}\right)}}{n\left(3+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)} = \underbrace{\boxed{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}}_{\downarrow\ \frac{1}{e}}\ \frac{\boxed{\left(1+\frac{7^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}}\to 1^0=1}{\underbrace{\boxed{3+\frac{2}{\sqrt{n}}}}_{\downarrow\ 3}} \to \frac{1}{3e}$$

Esempio 8 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{5^n+8^n}{6^n+7^n}} = \frac{8}{7}$ Raccolgo 8^n sopra, 7^n sotto ↘ FARE!! ↗

$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{5^n+n^8}{6^n+n^7}} = \frac{5}{6}$ Raccolgo 5^n sopra, 6^n sotto

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 018

Titolo nota 06/10/2012

LIMITI DI FUNZIONI

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o più in generale $f: A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$. Vogliamo definire

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \quad \text{con } x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$$

<u>Oss.</u> Per le successioni si faceva solo il lim per $n \to +\infty$, ora x può tendere ad un qualunque $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) \text{ con } x_0\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} \ell\in\mathbb{R} & ① \\ +\infty & ② \\ -\infty & ③ \\ \text{non esiste} & ④ \end{cases}$$

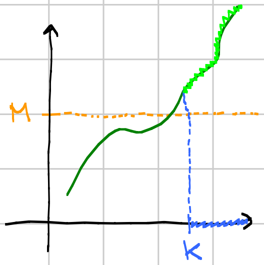
<u>Def. di ④</u> Nessuna delle precedenti

<u>Def. di ②</u> Si dice che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ se

$\forall M\in\mathbb{R}$ (anche enorme)

$\exists K\in\mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \geq K$

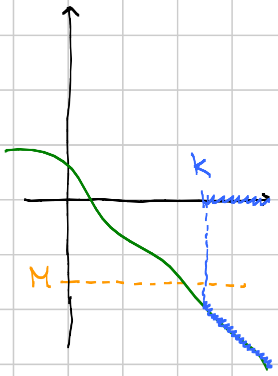
(K dipende dalla funzione e da M: più M è grande, più potrebbe servire un K grande)



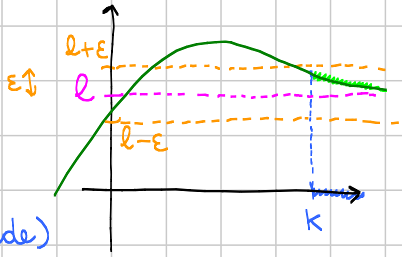
<u>Def. di ③</u> Si dice che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ se

$\forall M\in\mathbb{R}$ (anche enormemente negativo)

$\exists K\in\mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \geq K$



<u>Def. di</u> ① Si dice che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ se



$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)

$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell-\varepsilon \le f(x) \le \ell+\varepsilon \quad \forall x \ge k$

(se ε diventa sempre più piccolo, k diventa più grande)

In alternativa: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $\underbrace{|f(x)-\ell|}_{\text{distanza tra } f(x) \text{ ed } \ell} \le \varepsilon \quad \forall x \ge k$

<u>Varianti di</u> ① Si dice che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell^+$ se .... $\ell < f(x) \le \ell+\varepsilon$ ...

ℓ^- " $\ell-\varepsilon \le f(x) < \ell$.

— o — o —

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} \ell \in \mathbb{R} & ① \\ +\infty & ② \\ -\infty & ③ \\ \text{Non esiste} & ④ \rightsquigarrow \text{NdP} \end{cases}$$

<u>Def. di</u> ② Si dice che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \ge M \quad \forall x \le k$

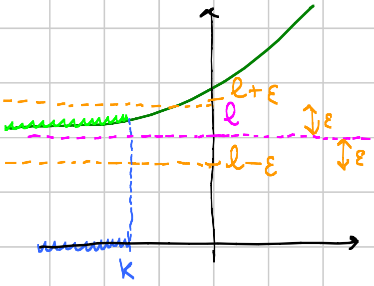
(Quando M diventa molto grande, k diventa molto negativo)

<u>Def. di</u> ③ Si dice che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$

$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \le M \quad \forall x \le K$

<u>Def. di</u> ① Si dice che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ se



$\forall \varepsilon > 0$

$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell-\varepsilon \le f(x) \le \ell+\varepsilon \quad \forall x \le k$

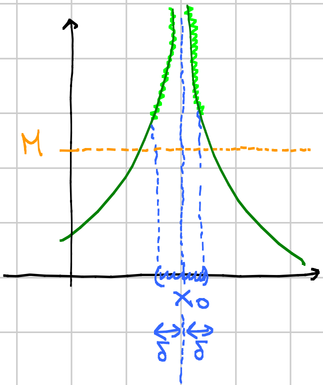
$|f(x)-\ell| \le \varepsilon$

Solite varianti per ℓ^+ ed ℓ^-

— o — o —

$\boxed{x_0 \in \mathbb{R}}$

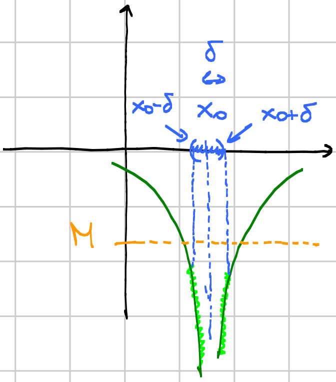
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \begin{cases} \ell & ① \\ +\infty & ② \\ -\infty & ③ \\ \text{non esistere} & ④ \text{ Nessuno dei prec.} \end{cases}$$



__Def. di__ ② Si ha che $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ se

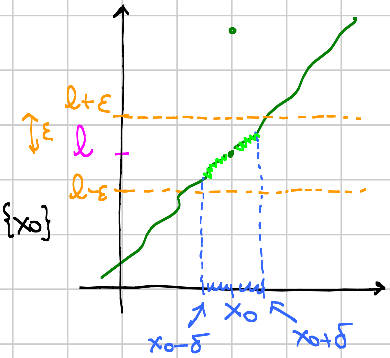
$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)
$\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \setminus \{x_0\}$

__Osservazione__ La definizione di limite NON chiede nulla alla funzione $f(x)$ per $x = x_0$. La funzione potrebbe anche non essere definita in x_0, oppure essere definita e non rispettare la relazione.
IL LIMITE SE NE FREGA DEL VALORE IN x_0



__Def. di__ ③ Si ha che $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enormemente negativo)
$\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \setminus \{x_0\}$
(se prendo M sempre più negativo, dovrò prendere δ sempre più vicino a 0)



__Def. di__ ① Si ha che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)
$\exists \delta > 0$ t.c. $\ell-\varepsilon \leq f(x) \leq \ell+\varepsilon \quad \forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \setminus \{x_0\}$

$$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

__Oss.__ Ancora una volta il valore di $f(x)$ per $x = x_0$ non è rilevante ai fini del limite ($f(x_0)$ potrebbe anche non essere definito)

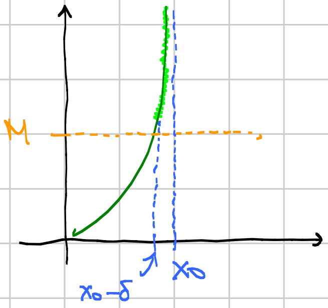
Variante : limiti $\lim\limits_{\underbrace{x\to x_0^+}_{\substack{x \text{ tende ad} \\ x_0 \text{ da destra}}}} f(x)$ e $\lim\limits_{\underbrace{x\to x_0^-}_{\substack{x \text{ tende ad} \\ x_0 \text{ da sinistra}}}} f(x)$

Si intende che $f(x)$ deve rispettare la relazione solo per x che sta nella parte dx o sx dell'intorno.

Esempio Si dice che $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$

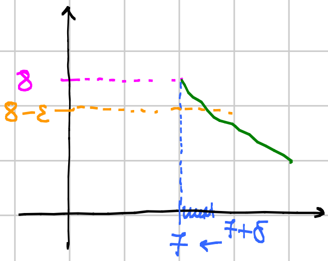
$\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \in [x_0-\delta, x_0\overset{\text{escluso}}{\downarrow})$



Esempio $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = 8^-$ se

$\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0$ t.c, $8-\varepsilon \leq f(x) < 8 \quad \forall x \in (7, 7+\delta]$



$\lim\limits_{x\to 8^-} f(x) = 7^+$ se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c. $7 < f(x) \leq 7+\varepsilon \quad \forall x \in [8-\delta, 8)$.

— o — o — o —

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 019

Titolo nota 06/10/2012

Strumenti per i limiti di funzioni

① Teo. algebrici : come limiti di successioni
② Teo. di confronto a 2 e 3 : "
③ Radice, rapporto, ... : NO per funzioni
④ Continuità
⑤ Cambi di variabile
⑥ Limiti notevoli : tabellina
⑦ Confronti di ordini di ∞ : come con le succ.

Continuità Una funzione $f(x)$ si dice continua in un p.to $x_0 \in \mathbb{R}$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

cioè se la funzione vale in x_0 quello che ci si aspetta vedendo cosa succede per x vicini ad x_0.

Quali funzioni sono continue e dove Tutte le funzioni ottenute a partire dalle funzioni elementari (potenze, esponenziali, trigonometriche e relative inverse) mediante operazioni algebriche e/o composizioni sono continue dove non presentano problemi burocratici di definizione (tipo denominatori che si annullano, radici di roba <0, ...).

Esempio

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\sin x) + 2^{\sin x}}{\log(3+x^2)} = \frac{2}{\log 3}$$

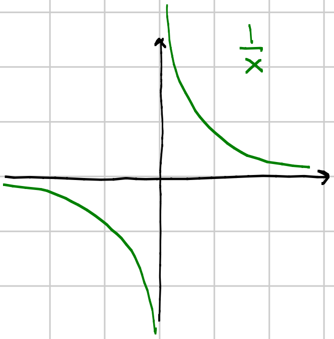
] È tutto tranquillo, basta sostituire $x=0$ e non emergono problemi.

Occhio: $\log x = \ln x = \log_e x$ sono sinonimi
$\text{Log}\, x = \log_{10} x$ sono sinonimi

Achtung! $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ NON ESISTE

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\left[\frac{1}{0^+} = +\infty\right] \quad \left[\frac{1}{0^-} = -\infty\right]$$



Limiti notevoli

Tabellina di limiti che si dimostrano una volta per tutte e poi si possono usare.

Padri: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ $\quad [1^\infty]$

Figli: $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ $\qquad \lim_{x \to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ $\quad [1^{-\infty}]$

Nipoti: $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a$ $\qquad \boxed{\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0}$ $\quad [0 \cdot (-\infty)]$

limite che si tende a dimenticare

CAMBI DI VARIABILI NEI LIMITI

Esempio 1 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$ $\quad \left[= \frac{0}{0}\right]$

Pongo $y = x^2$. Quando $x \to 0$ ho che $y \to 0^2 = 0$. Quindi il limite diventa

$$\lim_{\boxed{y \to 0}} \boxed{\frac{\sin y}{y}} = 1 \text{ per tabellina}$$

Ho guardato dove tendeva y

funzione cambiata dopo la sostituzione

Esempio 2 $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}$ $\quad \left[= \frac{0}{0}\right]$

Pongo $y = \sin x$. Quando $x \to 0$, ho che $y \to \sin 0 = 0$

$= \lim_{y \to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1$

↑ Tabellina

Esempio 3 $\lim_{\boxed{x \to \pi}} \frac{\log(1+\sin x)}{\sin x}$ $\quad \left[= \frac{0}{0}\right]$

Pongo $y = \sin x$

Quando $x \to \pi$, ho che $y \to \sin \pi = 0$

$= \lim_{\boxed{y \to 0}} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$

↑ Tabellina

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\,\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\frac{1}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\Big(\underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\boxed{\frac{\sin x}{x}}}\Big)^2\underset{\substack{\downarrow\\ \frac{1}{2}\ \text{(basta sostituire } x=0)}}{\boxed{\frac{1}{1+\cos x}}}=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\boxed{\frac{\sin x}{x}}}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ 1\ (\text{sost. } x=0)}}{\boxed{\frac{1}{\cos x}}}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$$

Pongo $y=\arctan x$, da cui $x=\tan y$
Quando $x\to 0$, ho che $y\to\arctan 0=0$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\tan y}\underset{\uparrow}{=}1$$

teorema algebrico + limite precedente

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$$

Pongo $y=\arcsin x$, da cui $x=\sin y$
Quando $x\to 0$, ho che $y\to\arcsin 0=0$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1$$

—o—o—

$$\lim_{x\to -\infty}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x$$

Pongo $y=-x$, da cui $x=-y$.
Quando $x\to-\infty$, ho che $y\to+\infty$

$$=\lim_{y\to+\infty}\Big(1-\frac{1}{y}\Big)^{-y}$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\Big(\frac{y-1}{y}\Big)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\Big(\frac{y}{y-1}\Big)^{y}=\lim_{y\to+\infty}\Big(\frac{y-1+1}{y-1}\Big)^{y}=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{y-1}\Big)^{y}$$

Pongo $z=y-1$, da cui $y=z+1$
Quando $y\to+\infty$, ho che $z\to+\infty$

$$=\lim_{z\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{z}\Big)^{z+1}=\lim_{z\to+\infty}\underset{\substack{\downarrow\\ e}}{\boxed{\Big(1+\frac{1}{z}\Big)^{z}}}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ 1\ \text{per teo. algebrico}}}{\boxed{\Big(1+\frac{1}{z}\Big)}}=e\cdot 1=e$$

—o—o—

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 020

Titolo nota 06/10/2012

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log(1+x) = \lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Pongo $y=\frac{1}{x}$, da cui $x=\frac{1}{y}$. Quando $x\to 0^+$, ho che $y\to+\infty$
" $x\to 0^-$, " " $y\to-\infty$

$$\lim_{x\to 0^+}\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty}\log\underset{\substack{\downarrow\\ e}}{\boxed{\left(1+\frac{1}{y}\right)^y}} = \log e = 1 \qquad (\star)$$

$$\lim_{x\to 0^-}\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to-\infty}\log\underset{\substack{\downarrow\\ e}}{\boxed{\left(1+\frac{1}{y}\right)^y}} = \log e = 1$$

e anche per $y\to-\infty$

Osservazione Ad essere rigorosi, l'ultimo passaggio va giustificato.
Nel caso $(\star)$ dovrei dire

Pongo $z=\left(1+\frac{1}{y}\right)^y$. Quando $y\to+\infty$, ho che $z\to e$ (limite padre).

$$\lim_{y\to+\infty}\log\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = \lim_{z\to e}\log z \underset{\uparrow}{=} \log e = 1$$

perché log è funzione continua

Osservazione Avendo dimostrato che $\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$

abbiamo che $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$

—o—o—

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$

Pongo $y=e^x-1$, da cui $e^x=y+1$, $x=\log(y+1)$
Quando $x\to 0$, ho che $y\to e^0-1=0$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log(1+y)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\log(1+y)}{y}} \to \frac{1}{1} = 1$$

—o—o—

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$$

TRUCCO DELL'ESPONENZIALE:
base ed esponente strano? e-alla !!!

$$A^B = e^{?} \qquad ? = \log A^B = B\log A \qquad \boxed{A^B = e^{B\log A}}$$

Tutti i pbm. sono ora all'esponente

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log a}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log a}-1}{x\log a}\cdot \log a$$

Pongo $y = x\cdot\log a$. Quando $x\to 0$ ho che $y \to 0\cdot\log a = 0$

$$= \lim_{y\to 0} \underbrace{\boxed{\frac{e^y-1}{y}}}_{1} \cdot \log a = \log a$$

—o—o—

Confronti di ordini di infinito $\qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty \quad \forall a>1 \ \forall b>0$

Conseguenza $\qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{[\log x]^a}{x^b} = 0 \quad \forall a>0 \ \forall b>0}$

POTENZE BATTONO LOGARITMI

Come si dimostra? Pongo $y = \log x$. Quando $x\to+\infty$ ho che $y\to+\infty$
$(x = e^y)$

Allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[\log x]^a}{x^b} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^a}{(e^y)^b} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^a}{(e^b)^y} = 0$$

↑ potenza diviso esponenziale con base $e^b>1$ perché $b>0$

—o—o—

Limite dimenticato $\qquad \lim_{x\to 0^+} x\cdot\log x$

Pongo $y = \frac{1}{x}$, da cui $x = \frac{1}{y}$
Quando $x\to 0^+$, ho che $y\to+\infty$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y}\cdot\log\frac{1}{y} \overset{\text{PRECORSO!}}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y}(-\log y) = \lim_{y\to+\infty} - \underbrace{\boxed{\frac{\log y}{y}}}_{0} = 0$$

—o—

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^{2000} x}{\sqrt[3]{x}} = 0$$ (è sempre log contro potenza).

$\boxed{\text{CRITERIO FUNZIONI} \to \text{SUCCESSIONI}}$ I limiti di funzione aiutano i limiti di successioni

Esempio 1 $\lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{1}{n} = \lim_{\boxed{n\to+\infty}} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{\boxed{x\to0}} \frac{\sin x}{x} = 1$

Pongo $x=\frac{1}{n}$. Quando $n\to+\infty$ ho che $x\to0$

Esempio 2 $\lim_{n\to+\infty} \underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\textcircled{n}}}\,(\underset{1}{\underset{\downarrow}{\boxed{\sqrt[n]{2}}}}-1)$ $[+\infty\,(1-1) = +\infty\cdot 0:$ forma indet.$]$

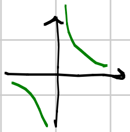
$$= \lim_{n\to+\infty} n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x} \overset{\uparrow}{=} \log 2$$

tabellina

Pongo $x=\frac{1}{n}$. Quando $n\to+\infty$ ho che $x\to0$

— o — o — o —

Esempio 3 $\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{x}$ NON ESISTE $\left[=\frac{1}{0}:\right.$ occhio al segno$\left.\right]$

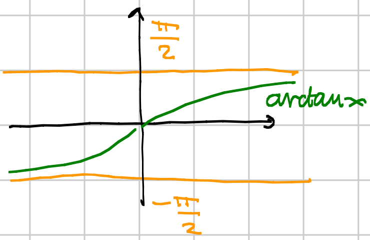


$$\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to0^-}\frac{\cos x}{x} = -\infty$$

Esempio 4 $\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{x^2}$ $\left[=\frac{1}{0^+}\right.$ comunque$\left.\right]$ $= +\infty$

Esempio 5 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan(\log(3+x^2))}{\sqrt{x}-2} = 0$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arctan(\text{Mostro}) \leq \frac{\pi}{2}$$



Divido per $\sqrt{x}-2$ che per x abbastanza grande è >0, quindi non cambio i versi.

$$\underset{0}{\underset{\downarrow}{\boxed{-\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}-2}}}} \leq \underset{0}{\underset{\downarrow}{\boxed{\frac{\arctan(\text{Mostro})}{\sqrt{x}-2}}}} \leq \underset{0}{\underset{\downarrow}{\boxed{\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}-2}}}}$$

carabinieri

Esempio 6 $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{\sin^2 x}$ $\left[= \frac{0}{0}\right]$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{x^2} \, \frac{x^2}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\boxed{\frac{\log(1+x^2)}{x^2}}}_{\downarrow \atop 1} \underbrace{\boxed{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2}}_{\downarrow \atop 1}$$

$\boxed{y = x^2} \to$

Esempio 7

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin(x^2))}{x^2} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\boxed{\frac{\log(1+\sin(x^2))}{\sin(x^2)}}}_{\downarrow \atop 1} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\sin(x^2)}{x^2}}}_{\downarrow \atop 1}$$

$y = \sin(x^2)$ ↗ $\qquad$ $y = x^2$ ↗

Cosa sto facendo: ho scritto la funzione come prodotto di 2 fattori. Calcolo SEPARATAMENTE il limite dei 2 fattori usando cambi di variabile diversi.

Concludo usando il teo. algebrico del prodotto.

Esempio 8 $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\cos x)}{\cos x}$ $\boxed{\overset{\uparrow \text{ pongo } y=\cos x}{=} 1}$ NO !!!!

$= \log 2$ (sostituisco $x=0$ e non ci sono problemi)

Voglio però fare il cambio di variabili

Pongo $y = \cos x$. Quando $x \to 0$, ho che $y \to \cos 0 = 1$

$$= \lim_{\boxed{y\to 1}} \frac{\log(1+y)}{y} = \log 2 \quad \text{(non è il limite notevole)}$$

Esempio 9 $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(1+x)}{x} = 0$ (il log perde dalle potenze)

Per essere precisi: $\frac{\log\left(x \, \frac{1+x}{x}\right)}{x} = \frac{\log x + \log\left(\frac{1+x}{x}\right)}{x}$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{\log x}{x}}}_{\downarrow \atop 0 \text{ (tabellina)}} + \underbrace{\boxed{\frac{\log\left(\frac{1+x}{x}\right)}{x}}}_{\downarrow \atop 0} \to \left[= \frac{\log 1}{+\infty} = \frac{0}{+\infty} = 0\right] \to 0$$

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 021

Titolo nota 10/10/2012

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$ Dimostriamo questo risultato.

Osservazione 1 La funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è PARI. Quindi basta dim. che

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

(cioè basta il limite per $x\to 0^+$).

Osservazione 2 Supponiamo di sapere che $\boxed{\sin x \le x \le \tan x}$ per ogni $x\in(0,\frac{\pi}{2})$. Divido per $\sin x$ (lo posso fare senza cambiare i versi perché $\sin x > 0$ per $x\in(0,\frac{\pi}{2})$).
Otteniamo

$$1 = \frac{\sin x}{\sin x} \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{\cancel{\sin x}}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cancel{\sin x}}$$

quindi

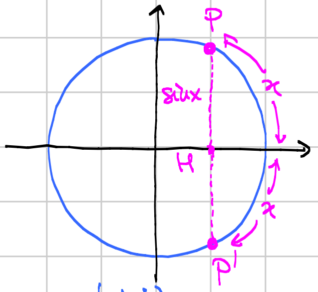
limiti per $x\to 0^+$ →

$$\underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\boxed{1}} \le \underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\boxed{\frac{x}{\sin x}}} \le \underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\boxed{\frac{1}{\cos x}}} \qquad \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

per Carabinieri

Quindi tutto si riduce a dimostrare la disuguaglianza.

$$\boxed{\sin x \le x \quad \text{per ogni } x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}$$

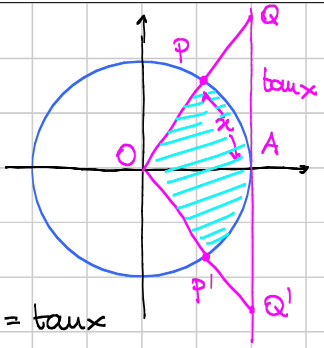


$PP' = 2PH = 2\sin x$ (lunghezza segmento PP')
$\overset{\frown}{PP'} = 2x$ (lunghezza arco $\overset{\frown}{PP'}$)

lunghezza segmento ≤ lunghezza arco (motivi geometrici)

$$\cancel{2}\sin x \le \cancel{2}x$$

$\boxed{x \le \tan x \quad \text{per ogni } x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)}$



x = lunghezza arco $\overset{\frown}{AP}$

$\tan x$ = lunghezza segmento AQ

Area triangolo $OQQ' = \frac{1}{2}\,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{base}}}{QQ'} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{altezza}}}{OA} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot \cancel{2}\tan x \cdot 1 = \tan x$

Calcolo l'area del settore circolare OPP'

$$\text{Area Settore} : \text{lunghezza arco} = \underset{\substack{\downarrow R=1}}{\text{Area cerchio}} : \underset{\substack{\downarrow R=1}}{\text{lungh. circ. intera}}$$

$$\text{Area Settore} : 2x = \pi : 2\pi$$

$$\text{Area settore } OPP' = \frac{\cancel{2}x\cdot\cancel{\pi}}{\cancel{2\pi}} = x$$

Ora per ragioni geometriche si ha che Area sett. $OPP' \le$ Area triangolo OQQ', quindi $x \le \tan x$ per $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

— o — o —

Il limite notevole $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ si dimostrerebbe a partire dal corrispondente limite per le successioni

— o — o —

Esempio 1 $\lim_{x\to0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}$ $\left[\frac{\log 1}{0} = \frac{0}{0}\right]$

Ricorda il limite notevole $\lim_{t\to0}\frac{\log(1+t)}{t} = 1$

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(1+\overbrace{(\cos x-1)}^{t})}{x^2} = \lim_{x\to0}\underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\boxed{\frac{\log(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}}}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\ -\frac{1}{2}}}{\boxed{\frac{\cos x-1}{x^2}}} = -\frac{1}{2}$$

Per fare il 1° limite pongo $t = \cos x - 1$;
quando $x \to 0$ ho che $t \to \cos 0 - 1 = 0$,
quindi il 1° limite diventa il $\lim_{t\to0}\frac{\log(1+t)}{t}$

Esempio 2 $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ $\quad [=1^{+\infty}]$

Bisogna passare all'esponenziale $[A^B = e^{B\log A}]$, quindi

$$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\log(\cos x)}.$$

Ora basta fare il limite dell'esponente (fatto prima)

$$\downarrow$$

$$e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

—o —o —

Esempio 3 $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan x} - \cos x + \arctan 2x}{x}$ $\quad \left[= \frac{e^0-1+0}{0} = \frac{0}{0}\right]$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan x} - 1 + 1 - \cos x + \arctan 2x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{\tan x}-1}{x} + \frac{1-\cos x}{x} + \frac{\arctan 2x}{x} \right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\boxed{\frac{e^{\tan x}-1}{\tan x}} \cdot \boxed{\frac{\tan x}{x}} + \boxed{\frac{1-\cos x}{x^2}} \cdot \boxed{x} + \boxed{\frac{\arctan 2x}{2x}} \cdot \boxed{2} \right) = 3$$

pongo $y = \tan x \ldots$ $\quad\quad y=2x$

$$1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot 2$$

—o —o —

Esempio 4 $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(1+2^x)}{x}$

$\boxed{1^o \text{ modo}}$ $\quad \frac{\log(1+2^x)}{x} = \boxed{\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{\frac{\log(1+2^x)}{2^x}}}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{\boxed{\frac{2^x}{x}}} \longrightarrow +\infty$

$y=2x$

esponenziale batte potenza

NO!! Quando $x\to+\infty$, ho che $y\to+\infty$, quindi non posso usare il limite notevole

$\boxed{2^o \text{ modo}}$ $\quad \frac{\log(1+2^x)}{x} = \boxed{\frac{\text{logaritmo}}{\text{potenza}}} \longrightarrow 0$

↓

NO!! Il limite in tabellina è $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x}$

non $\frac{\log(\text{altra roba})}{x}$

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ Brutalmente: $\frac{\log(1+2^x)}{x} \sim \frac{\log(2^x)}{x} = \frac{\cancel{x}\log 2}{\cancel{x}} \to \log 2$

Rigorosamente: chi comanda, si raccoglie!

$$\frac{\log(1+2^x)}{x} = \frac{\log\left(2^x\cdot\left(1+\frac{1}{2^x}\right)\right)}{x} = \frac{\log 2^x + \log\left(1+\frac{1}{2^x}\right)}{x}$$

$$= \frac{\cancel{x}\log 2}{\cancel{x}} + \frac{\overset{\to 0}{\boxed{\log\left(1+\frac{1}{2^x}\right)}}}{\underset{\to +\infty}{\boxed{x}}} \to \log 2 + 0$$

— o — o —

Esempio 5 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2+2)}{\log(x^3+3)} = \frac{2}{3}$ $\sim \frac{\log x^2}{\log x^3} = \frac{2\cancel{\log x}}{3\cancel{\log x}} = \frac{2}{3}$

$$\frac{\log(x^2+2)}{\log(x^3+3)} = \frac{\log\left[x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)\right]}{\log\left[x^3\left(1+\frac{3}{x^3}\right)\right]} = \frac{\log x^{2} + \log\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{\log x^{3} + \log\left(1+\frac{3}{x^3}\right)} =$$

$$= \frac{\cancel{\log x}\left\{2 + \frac{\overset{\to 0}{\boxed{\log\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}}{\underset{\to +\infty}{\boxed{\log x}}}\right\}}{\cancel{\log x}\left\{3 + \frac{\overset{\to 0}{\boxed{\log\left(1+\frac{3}{x^3}\right)}}}{\underset{\to +\infty}{\boxed{\log x}}}\right\}} \to \frac{2}{3}$$

— o — o —

Esempio 6 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(e^x-1)}{\arctan(3x)} = \lim_{x\to 0} \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{\frac{\sin(e^x-1)}{e^x-1}}} \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{\frac{e^x-1}{x}}} \underset{\substack{\downarrow \\ \frac{1}{3}}}{\boxed{\frac{x}{\arctan(3x)}}}$

$y = e^x - 1$
$y \to 0$

$\frac{\sin y}{y}$

$$= \frac{1}{3}$$

— o — o —

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 022

Titolo nota 10/10/2012

SOTTOSUCCESSIONI Sottotitolo: come si fa a dimostrare che un certo limite NON ESISTE (tipo ④)

Data una successione a_n, prendere una sottosuccessione vuol dire considerare solo alcuni termini

$\boxed{a_0}, \boxed{a_1}, a_2, a_3, \boxed{a_4}, \boxed{a_5}, a_6, \boxed{a_7}, \ldots$

Come prendere i termini? Pescando gli indici in maniera crescente.

Esempi a_{2n} = sottosuccessione dei termini di indice pari

= $a_0, a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots$

a_{2n+1} = stessa cosa con i dispari

= $a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, \ldots$

a_{4n+2} = $a_2, a_6, a_{10}, a_{14}, a_{18}, \ldots$

a_{n^2} = sottosuccessione dei termini i cui indici sono quadrati perfetti = $a_0, a_1, a_4, a_9, a_{16}, a_{25}, \ldots$

Teorema Sia a_n una successione e sia $a_{\boxed{k_n}}$ una sua sottosucc,

↑ regola che descrive quali indici vengono selezionati

Supponiamo che $a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Allora $a_{k_n} \to \ell$ (stesso ℓ)

(Se una successione ha un limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, allora tutte le sottosuccessioni hanno lo stesso limite).

Achtung! Se a_n non ha limite, cioè è di tipo ④, non è detto che le sottosuccessioni siano tutte di tipo ④.

Esempio $a_n = (-1)^n$ non ha limite $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

Però

- $a_{2n} = (-1)^{2n} \longrightarrow 1$
- $a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} \longrightarrow -1$

quindi le sottosucc. dei pari e dei dispari hanno limite.

Utilizzo operativo Data una succ. a_n, supponiamo di trovare 2 sottosucc. che hanno limiti DIVERSI.

Allora di sicuro a_n non ha limite

[Dim.: se fosse che $a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, allora tutte le sottosuccessioni dovrebbero tendere allo stesso ℓ].

Come dimostrare che una successione a_n NON ha limite? Basta trovare 2 sottosuccessioni con limiti diversi.

Esempio 1 $a_n = n^2 + (-3)^n$

Considero i pari ed i dispari:

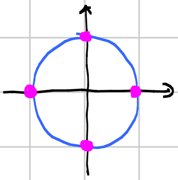
$$a_{2n} = (2n)^2 + (-3)^{2n} = 4n^2 + 9^n \longrightarrow +\infty$$

$$a_{2n+1} = (2n+1)^2 + (-3)^{2n+1} = \boxed{4n^2+4n+1 - 3\cdot 9^n} \longrightarrow -\infty$$

↳ basta raccogliere 9^n

Avendo trovato 2 sottosucc. con comportamento diverso, il limite di a_n NON ESISTE

Esempio 2 $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right) = 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$



$$a_{2n} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2n\right) = \sin(\pi n) = 0 \longrightarrow 0$$

$$a_{\underbrace{4n+1}_{\text{multipli di 4 più 1}}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot(4n+1)\right) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \longrightarrow 1$$

Potevo prendere anche a_{4n+3} e tendeva a -1.

Esempio 3 $a_n = 2^n + (-1)^n \cdot n^5 = \begin{cases} 2^n + n^5 & \text{per } n \text{ pari} \\ 2^n - n^5 & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$

Oss.: il cambio di segno avviene sul termine che non comanda, quindi non dovrebbe contare nulla

Rigoroso: raccolgo 2^n: $\underbrace{\boxed{2^n}}_{+\infty}\Big(1+\underbrace{\boxed{(-1)^n\frac{n^5}{2^n}}}_{0}\Big) \to +\infty \cdot 1 = +\infty$

Per l'altro termine: $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ (banale)

Moltiplico per $\frac{n^5}{2^n}$:

$$\underbrace{\boxed{-\frac{n^5}{2^n}}}_{0} \leq \underbrace{(-1)^n\frac{n^5}{2^n}}_{0} \leq \underbrace{\boxed{\frac{n^5}{2^n}}}_{0}$$

$$— 0 —— 0 ——$$

$\boxed{\text{Come dimostrare che un limite di funzioni non esiste?}}$

Supponiamo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ (anche $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$).

Sia a_n una qualunque successione tale che $a_n \to x_0$. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) \overset{\uparrow}{=} \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell.$$

Pongo $x = a_n$. Quando $n \to +\infty$, ho che $x \to x_0$

Supponiamo invece che esistano $a_n \to x_0$ e $b_n \to x_0$ tali che

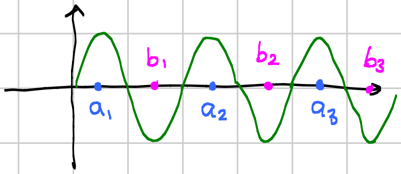
$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}} \text{ con } \ell_1 \neq \ell_2.$$

Allora $\lim_{x\to x_0} f(x)$ NON ESISTE

[Dim.: se esistesse e fosse un certo $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, allora avremmo che $\ell_1 = \ell_2 = \ell$].

Operativamente: come dimostro che $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non esiste?

Basta trovare 2 successioni $a_n \to x_0$ e $b_n \to x_0$ tali che $f(a_n)$ e $f(b_n)$ hanno 2 limiti diversi.

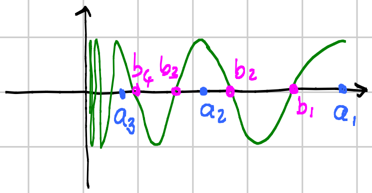


Esempio 1 $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ NON ESISTE.

Devo trovare $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$ t.c.
$\sin(a_n) \to \ell_1$, $\sin(b_n) \to \ell_2$, $\ell_1 \neq \ell_2$

$a_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \to +\infty$ $b_n = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \to +\infty$

$\sin(a_n) = 1 \to 1$ $\sin b_n = -1 \to -1$



Esempio 2 $\lim_{x \to 0^+} \cos \frac{1}{x^2}$ NON ESISTE

Devo trovare $a_n \to 0^+$ e $b_n \to 0^+$ t.c.
$\cos \frac{1}{a_n^2} \to \ell_1$, $\cos \frac{1}{b_n^2} \to \ell_2$, $\ell_1 \neq \ell_2$

$\cos \frac{1}{a_n^2} = 1$, prendo $\frac{1}{a_n^2} = 2\pi n$, quindi $a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \to 0^+$

$\cos \frac{1}{b_n^2} = 0$, prendo $\frac{1}{b_n^2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, quindi $b_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}} \to 0^+$

—o —o —

Esempio 3

$a_n \to 7 \Rightarrow a_{2n+1} \to 15$ PORCHERIA!!
$a_n \to 7 \Rightarrow a_{2n+1} \to 7$ VERA: sottosuccessione
$a_n \to 8 \Rightarrow a_{2n} \to 8$ " "
$a_{2n} \to 8 \Rightarrow a_n \to 8$ FALSA: sui dispari non so nulla
$a_{n+7} \to 5 \Rightarrow a_n \to 5$ VERA!! Sottosucc. FALSA salta solo 6 termini
$a_n \to 5 \Rightarrow a_{n+7} \to 5$ VERA: sottosuccessione
$a_n \to +\infty \Rightarrow \cos(a_n)$ non ha limite FALSA!!
esempio: $a_n = 2\pi n$.

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 023

Titolo nota 11/10/2012

IL NUMERO e Sottotitolo: dimostrare che la successione $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ha un limite reale compreso tra 2 e 3.

SUCCESSIONI MONOTONE

Def. Una succ. a_n si dice

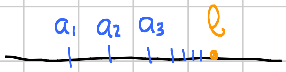
- debolmente crescente se $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
- strettamente crescente " $a_{n+1} > a_n$ "
- debolmente decrescente " $a_{n+1} \leq a_n$ "
- strettamente decrescente " $a_{n+1} < a_n$ "

Oss. Una successione è debolmente crescente nel senso appena definito se e solo se $m > n \Rightarrow a_m \geq a_n$

Idem per le altre 3 possibilità

[Esercizio: dimostrare l'equivalenza tra i 2 modi di dare la definizione]

Teorema (in versione crescente) Sia a_n una succ. debolmente crescente (se è strettamente crescente, ancora meglio). Allora sono possibili solo due tipi di comportamento:



① $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

② $a_n \to +\infty$

In ogni caso il limite (sia esso reale o $+\infty$) è il sup della succ.

$$a_n \longrightarrow \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

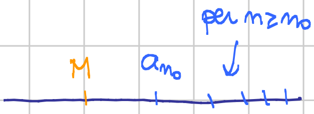
Oss. Vale un teorema analogo per successioni debolmente decrescenti

$$a_n \longrightarrow \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Dim. Ci sono 2 casi, a seconda che $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$ oppure $\in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Caso 1: } \sup = +\infty}$ Ipotesi: $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$

Tesi: $a_n \to +\infty$



Sia dato un qualunque $M \in \mathbb{R}$. Per ipotesi esiste un elemento della successione $\geq M$, cioè $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{n_0} \geq M$. Poiché a_n è debolm. crescente, avremo che $a_n \geq a_{n_0} \geq M$ per ogni $n \geq n_0$. Quindi $a_n \geq M$ definitivamente.

$\boxed{\text{Caso 2: } \sup = L}$ Ipotesi: $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = L \in \mathbb{R}$

Tesi: $a_n \to L$

Voglio dimostrare che $\forall \varepsilon > 0$ si ha che

$L-\varepsilon \leq a_n \leq L+\varepsilon$ definitivamente.

Fisso $\varepsilon > 0$. Per ipotesi il sup è L, quindi

(i) $a_n \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (cioè L è un maggiorante)

Questo ci dice gratis che $a_n \leq L+\varepsilon$ definitivamente

(ii) esiste un elemento della successione che sta tra $L-\varepsilon$ ed L, cioè

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{n_0} \geq L-\varepsilon$

Ma essendo a_n debolmente crescente avremo che $a_n \geq a_{n_0} \geq L-\varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$, cioè definitivamente.

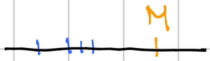
— o — o —

[Esercizio: capire la dimostrazione e rifarla in versione decrescente]

Consideriamo la successione $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Dimostriamo che

① $e_n \geq 2 \quad \forall n \geq 1$ ② $e_n \leq 3 \quad \forall n \geq 1$ ③ e_n è debolmente crescente

$\boxed{\text{Corollario teo. succ. monotone}}$ Sia a_n una successione



① debolmente crescente, cioè $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

② limitata superiormente, cioè $\exists\, M \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Allora $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ (ovviamente $\ell \leq M$)

[Esercizio: adattare in versione decrescente]

$\boxed{\text{Dim. che } e_n \geq 2 \text{ per ogni } n \geq 1}$ Partiamo dalla Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Con $x = \frac{1}{n}$ otteniamo $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+n\cdot\frac{1}{n} = 2$

$\boxed{\text{Dim. che } e_n \text{ è debolmente crescente}}$ Ci basta dimostrare che $e_n \geq e_{n-1}$ per ogni $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
e_n \geq e_{n-1} \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n\cancel{-1}\cancel{+1}}{n-1}\right)^{n-1} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{(n+1)^n}{n^n} \geq \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} \quad \frac{n}{(n-1)}\cdot\frac{(n-1)}{n} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{(n+1)^n}{n^n} \geq \frac{n^n}{(n-1)^n}\cdot\frac{n-1}{n} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{(n+1)^n(n-1)^n}{n^{2n}} \geq \frac{n-1}{n} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{(n^2-1)^n}{(n^2)^n} \geq \frac{n-1}{n} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Applico $(1+x)^n \geq 1+nx$ con $x = -\frac{1}{n^2}$ (ricordo che Bernoulli valeva $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \geq -1$, quindi $x = -\frac{1}{n^2}$ va bene)

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1+n\left(-\frac{1}{n^2}\right) = 1-\frac{1}{n}$$

Questo dimostra che l'ultima disuguaglianza è vera, ma l'ultima è equivalente a $e_n \geq e_{n-1}$.

$\boxed{\text{Dim. che } e_n \leq 3}$ $(1+x)^n$ si sviluppa con il Binomio di Newton

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

La applico con $x = \frac{1}{n}$. Ottengo

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \binom{n}{0} \cdot \frac{1}{n^0} + \binom{n}{1} \frac{1}{n^1} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \dots$$

$$= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \overset{\leq 1}{\boxed{\frac{n(n-1)}{2!} \, \frac{1}{n^2}}} + \overset{\leq 1}{\boxed{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \, \frac{1}{n^3}}} + \dots$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$n! \geq 2^{k-1}$ (si dimostra per induzione)

$$\leq 1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}$$

↑ denominatore più piccolo = frazione + grande

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{k-1} = \frac{1-a^k}{1-a}$$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \cdot 2$$

$$= 1 + 2 - \frac{2}{2^n}$$

$$= 3 - \frac{2}{2^n} < 3$$

Questo dimostra che $e_n \leq 3$ (anzi $e_n < 3$).

Più formalmente abbiamo usato che $\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$, che volendo si dimostra per induzione.

— o — o —

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 024

Titolo nota 11/10/2012

Razionalizzazioni

Esempio 1 $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x+1} - \sqrt{x^2+5}$

$\boxed{\text{Brutale: } \sqrt{x^2}-\sqrt{x^2} = x-x = 0}$

NO!!!

Rigoroso: "razionalizzazione": $\sqrt{A}-\sqrt{B}\ \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$

$$\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+5}\cdot\frac{\sqrt{\dots}+\sqrt{\dots}}{\sqrt{\dots}+\sqrt{\dots}} = \frac{\cancel{x^2}+3x+1-\cancel{x^2}-5}{\sqrt{\dots}+\sqrt{\dots}} = \frac{3x-4}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+5}}$$

$$= \frac{\cancel{x}\left(3-\frac{4}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right)} \to \frac{3}{2}$$

Trucco: $\boxed{\sqrt{A}-\sqrt{B} = \left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}}$

$\sqrt{A}\ \ \sqrt{B}$

$\uparrow\ \ \uparrow$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

Esempio 2 $\sqrt{n^4+3n^2+2}-n^2$ $[=+\infty-\infty]$

$$=\left(\sqrt{n^4+3n^2+2}-\sqrt{n^4}\right)\frac{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }}{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }} = \frac{\cancel{n^4}+3n^2+2-\cancel{n^4}}{\sqrt{n^4+3n^2+2}+\sqrt{n^4}} \to \frac{3}{2}$$

raccolgo n^2 al num

" n^4 nelle $\sqrt{\ }$

Esempio 3 $\sqrt[3]{n^3+5n^2}-\sqrt[3]{n^3+2}$ $[+\infty-\infty]$

La formula di partenza è $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

La applico con $a=\sqrt[3]{A}$ e $b=\sqrt[3]{B}$. Ottengo

$$A-B=\left(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}\right)\left(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}\right)$$

$$\boxed{\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B} = \left(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}\right)\frac{\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}}{\text{"}+\text{"}+\text{"}} = \frac{A-B}{\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}}}$$

razionalizz. radici CUBICHE

Tornando all' esempio

$$\sqrt[3]{n^3+5n^2} - \sqrt[3]{n^3+2} = \frac{\cancel{n^3}+5n^2-\cancel{n^3}-2}{\sqrt[3]{(n^3+5n^2)^2}+\sqrt[3]{(n^3+5n^2)(n^3+2)}+\sqrt[3]{(n^3+2)^2}} \to \frac{5}{3}$$

Formalmente: raccolgo n^2 al numeratore e raccolgo n^6 dentro ogni radice.

[Esercizio: trovare la formula per razionalizzare $\sqrt[4]{A}-\sqrt[4]{B}$)

Esempio 4 $\sqrt{n+5}-\sqrt[3]{n^2+3}$ $[+\infty-\infty]$

Non c'è un modo ragionevole di razionalizzare

Brutale: $\sim n^{\frac{1}{2}} - n^{2/3}$ quindi vince $n^{2/3}$

Rigoroso: $$\sqrt{n\left(1+\frac{5}{n}\right)} - \sqrt[3]{n^2\left(1+\frac{3}{n^2}\right)} = \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{5}{n}} - n^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^2}}$$

$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{-1}{6}$

$$= \underbrace{\boxed{n^{\frac{2}{3}}}}_{+\infty}\left(\underbrace{n^{-\frac{1}{6}}}_{0}\sqrt{1+\underbrace{\boxed{\frac{5}{n}}}_{0}} - \underbrace{\boxed{\sqrt[3]{1+\underbrace{\boxed{\frac{3}{n^2}}}_{0}}}}_{1}\right) \to +\infty\cdot(-1) = -\infty$$

— o —

Esempio 5 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3\sqrt{x}}{5x^2+7\sqrt{x}} = \frac{2}{5}$$ (raccolgo x^2 sopra e sotto)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2x^2+3\sqrt{x}}{5x^2+7\sqrt{x}} = \frac{3}{7}$$ (raccolgo $\sqrt{x}$ sopra e sotto)

$$\frac{2x^2+3\sqrt{x}}{5x^2+7\sqrt{x}} = \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}}\,\frac{2x\sqrt{x}+3}{5x\sqrt{x}+7} \xrightarrow{x\to 0} \frac{3}{7}$$

$$\frac{2x^2+3\sqrt{x}}{5x^2+7\sqrt{x}} = \frac{\cancel{x^2}\left(2+\frac{3}{x\sqrt{x}}\right)}{\cancel{x^2}\left(5+\frac{7}{x\sqrt{x}}\right)}$$

Questo va bene se $x\to+\infty$ perchè diventa una forma non indeterminata.
Se $x\to 0^+$ diventa $\frac{+\infty}{+\infty}$ e non ho concluso nulla

Morale: a $+\infty$ contano le potenze con esponenti + grandi, a 0 contano le potenze con esponenti più piccoli.

Esempio 6 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2^x}{5x^2+2^x} = 1$ $\left[\sim \frac{2^x}{2^x}\right]$ raccogliere 2^x

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+2^x}{5x^2+2^x} = 1$ $\left[\frac{1}{1}\right.$: non è una forma indeterm.$\left.\right]$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2^x}{5x^2+2^x} = \frac{3}{5}$ raccogliere x^2 sopra e sotto; nota bene che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2^x}{x^2} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

Esempio 7 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi-2x}$ $\left[= \frac{0}{\pi-\pi} = \frac{0}{0}\right]$

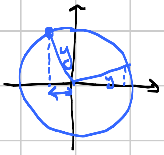
Trucco: spostare (se possibile) il limite a 0 oppure a $+\infty$.

Pongo $y = x - \frac{\pi}{2}$. Quando $x \to \frac{\pi}{2}$, ho che $y \to 0$

$x = y + \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{\pi - 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{\cancel{\pi}-2y-\cancel{\pi}} \quad \left[= \frac{0}{0}\right]$$

Precorso: $\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin y$



$$= \lim_{y\to 0} \frac{-\sin y}{-2y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{2y} = \frac{1}{2}$$

Esempio 8 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3} + x$

NO!!!!!! $\sqrt{x^2} = x$ ok solo per $x \geq 0$

$$\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)} + x$$

$$= x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}} + x = \underset{\downarrow\atop -\infty}{\boxed{x}}\left(\sqrt{1+\underset{\downarrow\atop 0}{\boxed{\frac{3}{x^2}}}}+1\right)$$

$$\to -\infty \cdot 1 = -\infty$$

Pongo $y = -x$, quindi $y \to +\infty$

$$= \lim_{y\to+\infty} \sqrt{y^2+3} - y = \text{razionalizz.} = 0$$

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 025

Titolo nota 12/10/2012

Esercizio $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\arctan x} + \arcsin(3x) - \cos(x^2) + \log(1+x^5\tan x)}{\arctan(3x+x^2) + \sin x} = 1 \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

Raccolgo x sopra e sotto (al numeratore aggiungo e tolgo 1)

$$\frac{\cancel{x}\left(\frac{e^{\arctan x}-1}{x} + \frac{\arcsin(3x)}{x} + \frac{1-\cos(x^2)}{x} + \frac{\log(1+x^5\tan x)}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\frac{\arctan(3x+x^2)}{x} + \frac{\sin x}{x}\right)} \to \frac{4}{4} = 1$$

Svolgo i 6 limiti uno per volta:

$$\frac{e^{\arctan x}-1}{x} = \underset{\substack{y=\arctan x \downarrow \\ 1}}{\boxed{\frac{e^{\arctan x}-1}{\arctan x}}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{\frac{\arctan x}{x}}} \to 1$$

$$\frac{\arcsin(3x)}{x} = \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{\frac{\arcsin(3x)}{3x}}} \cdot 3 \to 3$$

$$\frac{1-\cos(x^2)}{x} = \underset{\substack{y=x^2 \downarrow \\ \frac{1}{2}}}{\boxed{\frac{1-\cos(x^2)}{x^4}}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\boxed{x^3}} \to 0$$

$$\frac{\log(1+x^5\tan x)}{x} = \underset{\substack{y=x^5\tan x \downarrow \\ 1}}{\boxed{\frac{\log(1+x^5\tan x)}{x^5\tan x}}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\boxed{x^4\tan x}} \to 0$$

$$\frac{\arctan(3x+x^2)}{x} = \underset{\substack{y=3x+x^2 \downarrow \\ 1}}{\boxed{\frac{\arctan(3x+x^2)}{3x+x^2}}} \underset{\substack{\downarrow \\ 3}}{\boxed{(3+x)}} \to 3$$

$$\frac{\sin x}{x} \to 1$$

—o—o—

$\boxed{\text{o piccolo}}$ Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, pensato come punto in cui fare i limiti.

<u>Def</u>. Si dice che $f(x)$ è <u>o piccolo</u> di $g(x)$ per $x \to x_0$ e si scrive

$$f(x) = o(g(x)) \qquad \text{per } x \to x_0$$

se esiste una funzione $\omega(x)$ t.c.

$$f(x) = \omega(x) \cdot g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0$$

(In parole povere: $f(x) = g(x) \cdot$ funzione che tende a 0 per $x \to x_0$)

<u>Def. quasi equivalente</u> Supponiamo di poter dividere per $g(x)$ (questo è possibile se $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0, tranne al più per $x = x_0$). Allora $\omega(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ quindi la 2ª condizione diventa

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

(Brutalmente è come dire che $f(x)$ batte $g(x)$ quando faccio il lim in x_0)

<u>Esempio 1</u> In tutti gli esempi prendiamo $x_0 = 0$

Dico che $\underset{\substack{\uparrow \\ f(x)}}{x^3} = o(\underset{\substack{\uparrow \\ g(x)}}{x})$ per $x \to 0$,

Infatti $\underset{\substack{\uparrow \\ f(x)}}{x^3} = \underset{\substack{\uparrow \\ \omega(x)}}{x^2} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ g(x)}}{x}$ e $\lim\limits_{x \to \underset{\substack{\nwarrow x_0}}{0}} \omega(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$

Con la def. quasi equivalente calcolo

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

<u>Esempio 2</u> Dico che $\underbrace{\operatorname{arctan}(x^3)}_{\substack{\uparrow \\ f(x)}} = o(\underbrace{x^2}_{\substack{\uparrow \\ g(x)}})$ per $x \to 0$

Con la def. quasi equiv. devo dividere per x^2, e posso farlo e ottengo

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0}\frac{\arctan(x^3)}{x^2} = \lim_{x\to0}\underset{\substack{\downarrow\\1}}{\boxed{\frac{\arctan(x^3)}{x^3}}}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\boxed{x}} = 0$$

Con la def. ufficiale devo scrivere $\underbrace{\arctan(x^3)}_{f(x)} = \underbrace{x^2}_{g(x)}\underset{\omega(x)}{\boxed{\frac{\arctan(x^3)}{x^2}}}$

Devo verificare che

$\lim_{x\to0}\omega(x)=0$, ma è esattamente il limite di sopra.

Esempio 3 Dico che $\underset{f(x)}{\boxed{\frac{1}{\sin x}}} = o\left(\underset{g(x)}{\boxed{\frac{1}{\arctan^2 x}}}\right)$ per $x\to0$

Uso def. quasi equivalente e calcolo

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0}\frac{1}{\sin x}\cdot\arctan^2 x = \lim_{x\to0}\underset{\substack{\downarrow\\1}}{\boxed{\frac{x}{\sin x}}}\underset{\substack{\downarrow\\1}}{\boxed{\frac{\arctan^2 x}{x^2}}}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\boxed{x}} = 0$$

Nota che in questo esempio $f(x)$ e $g(x)$ non tendono a 0 per $x\to0$.

Proprietà algebriche di o piccolo Supponiamo che

$f_1(x)=o(g(x))$ per $x\to x_0$ $\qquad f_2(x)=o(g(x))$ per $x\to x_0$

Cosa possiamo dire di $f_1\pm f_2$, $f_1\cdot f_2$, $\frac{f_1}{f_2}$, $\underset{\uparrow\,\text{numero}}{a}\,f_1$?

$\boxed{f_1+f_2}$ Ipotesi: $f_1(x)=g(x)\cdot\omega_1(x)$ $\qquad f_2(x)=g(x)\cdot\omega_2(x)$

$\lim_{x\to x_0}\omega_1(x)=0$ $\qquad \lim_{x\to x_0}\omega_2(x)=0$

Allora $f_1(x)+f_2(x) = g(x)\cdot\omega_1(x)+g(x)\cdot\omega_2(x)$

$$= g(x)\cdot\underset{\omega_3(x)}{\boxed{(\omega_1(x)+\omega_2(x))}}$$

$$= g(x)\cdot\omega_3(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\omega_3(x) = \lim_{x\to x_0}(\omega_1(x)+\omega_2(x)) = 0+0=0$$

Quindi $\boxed{f_1(x)+f_2(x)=o(g(x))}$ $\qquad \boxed{o(g)+o(g)=o(g)}$

$\boxed{f_1 - f_2}$ $f_1(x) - f_2(x) = g(x) \cdot \underbrace{\boxed{(\omega_1(x) - \omega_2(x))}}_{\omega_3(x)} = g(x) \cdot \omega_3(x)$

$\lim_{x \to x_0} \omega_3(x) = \lim_{x \to x_0} (\omega_1(x) - \omega_2(x)) = 0 - 0 = 0$

Quindi $\boxed{f_1(x) - f_2(x) = o(g(x))}$ $\boxed{o(g) - o(g) = o(g)}$

$\boxed{a f_1(x)}$ $a f_1(x) = a g(x) \cdot \omega_1(x) = \underbrace{\boxed{a \cdot \omega_1(x)}}_{\omega_3(x)} g(x) = \omega_3(x) \cdot g(x)$

$\lim_{x \to x_0} \omega_3(x) = \lim_{x \to x_0} a \cdot \omega_1(x) = a \cdot 0 = 0$

Quindi $\boxed{a f_1(x) = o(g(x))}$ $\boxed{a\, o(g) = o(g)}$

$\boxed{f_1 \cdot f_2}$ $f_1(x) \cdot f_2(x) = g(x) \cdot \omega_1(x) \cdot g(x) \cdot \omega_2(x)$

$= \underbrace{\boxed{\omega_1(x) \cdot \omega_2(x)}}_{\omega_3(x)} [g(x)]^2 = \omega_3(x) \cdot [g(x)]^2$

$\lim_{x \to x_0} \omega_3(x) = \ldots = 0 \cdot 0 = 0$

Quindi $\boxed{f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g^2(x))}$ $\boxed{o(g) \cdot o(g) = o(g^2)}$

$\boxed{\frac{f_1}{f_2}}$ $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\cancel{g(x)} \cdot \omega_1(x)}{\cancel{g(x)} \cdot \omega_2(x)}$ $\lim_{x \to x_0} \frac{\omega_1(x)}{\omega_2(x)} = \frac{0}{0} =$ Boh.

Non si può dire nulla sul rapporto $\frac{f_1}{f_2}$ (Brutalmente: "f_1 batte g", "f_2 batte g", ma questo non dà informazioni su chi vince tra f_1 ed f_2)

— o —

<u>Transitività di o piccolo</u> Se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ e $g(x) = o(R(x))$ per $x \to x_0$, allora

$f(x) = o(R(x))$ per $x \to x_0$

<u>Dim.</u> Ipotesi: $f(x) = g(x) \cdot \omega_1(x)$ $g(x) = R(x) \cdot \omega_2(x)$, quindi

$f(x) = g(x) \cdot \omega_1(x) = R(x) \cdot \underbrace{\boxed{\omega_2(x) \cdot \omega_1(x)}}_{\omega_3(x)}$ e $\lim_{x \to x_0} \omega_3(x) = 0 \cdot 0 = 0$

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 026

Titolo nota 12/10/2012

Proprietà di o piccolo

$$o(g)+o(g)=o(g)$$
$$o(g)-o(g)=o(g)$$
$$o(g)\cdot o(g)=o(g^2)$$
$$o(o(g))=o(g)$$
$$\frac{o(g)}{o(g)}=\text{BOH}$$

Nuove proprietà Supponiamo che $f(x)=o(g_1(x)+g_2(x))$ per $x\to x_0$

Cosa possiamo dire di $f(x)$?

Ipotesi: $f(x)=(g_1(x)+g_2(x))\cdot\omega(x)=\underbrace{g_1(x)\cdot\omega(x)}_{o(g_1(x))}+\underbrace{g_2(x)\,\omega(x)}_{o(g_2(x))}$

$$\lim_{x\to x_0}\omega(x)=0$$

Quindi $\boxed{f(x)=o(g_1(x))+o(g_2(x))}$ $\boxed{o(g_1+g_2)=o(g_1)+o(g_2)}$

Supponiamo che $f(x)=o(a\,g(x))$ per $x\to x_0$ (con $a\in\mathbb{R}, a\neq 0$)

Ipotesi: $f(x)=a\,g(x)\cdot\omega(x)=\underbrace{\boxed{a\,\omega(x)}}_{\omega_1(x)}g(x)=\omega_1(x)\,g(x)$

$$\lim_{x\to x_0}\omega_1(x)=a\lim_{x\to x_0}\omega(x)=a\cdot 0=0$$

Quindi $\boxed{f(x)=o(g(x))}$ per $x\to x_0$ $\boxed{o(ag)=o(g)}$

Esempio 1 $\sin x^2=o(x)$ per $x\to 0$

Lo verifico con la definizione quasi equivalente, cioè divido per x

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x}=\lim_{x\to 0}\underset{\substack{\downarrow\\1}}{\boxed{\frac{\sin x^2}{x^2}}}\cdot\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\boxed{x}}=0$$

$x=o(\sqrt{x})$ per $x\to 0^+$ Infatti $x=\sqrt{x}\,\boxed{\sqrt{x}}\to 0$ per $x\to 0^+$

Quindi immediatamente $\sin(x^2)=o(\sqrt{x})$ per $x\to 0^+$ (transitività).

$\boxed{\text{SVILUPPINI}}$ Per $x \to 0$ si ha che

$$\boxed{\begin{array}{llll} \sin x = x + o(x) & & \arctan x = x + o(x) \\ \tan x = x + o(x) & & \arcsin x = x + o(x) \\ \cos x = 1 + o(x) & & \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ e^x = 1 + x + o(x) & & \log(1+x) = x + o(x) \end{array}}$$

$\boxed{\sin x = x + o(x)}$ $\overbrace{\sin x - x}^{f(x)} = o(\overbrace{x}^{g(x)})$ per $x \to 0$. Lo verifico con la definizione quasi equivalente (posso dividere per x):

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} - 1 = 0$$

Allo stesso modo, usando gli analoghi limiti notevoli, si dimostrano gli sviluppini per $\tan x$, $\arctan x$, $\arcsin x$

$\boxed{e^x = 1 + x + o(x)}$ Vuol dire che $e^x - 1 - x = o(x)$ per $x \to 0$.
Def. quasi equivalente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\boxed{\frac{e^x-1}{x}}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} - 1 = 1 - 1 = 0$$

[Esercizio: dim. lo sviluppino di $\log(1+x)$ usando il lim. notevole]

$\boxed{\cos x = 1 + o(x)}$ Devo verificare che $\cos x - 1 = o(x)$. Def. quasi equiv:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{\cos x - 1}{x^2}}}_{\substack{\downarrow \\ -\frac{1}{2}}} \cdot \underbrace{\boxed{x}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} = 0$$

$\boxed{\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}$ Devo verificare che $\overbrace{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}^{f(x)} = o(\overbrace{x^2}^{g(x)})$
Def. quasi equiv.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\boxed{\frac{\cos x - 1}{x^2}}}_{\substack{\downarrow \\ -\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

Consideriamo i 2 sviluppini del coseno

$\cos x = 1 + o(x)$ $\qquad\qquad$ $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

Allora il 2° implica il 1°, cioè il 2° dà più informazioni del primo.
Infatti $x^2 = o(x)$ (verifica a mente), quindi $-\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}o(x) = o(x)$
Inoltre $o(x^2) = o(o(x)) = o(x)$.
Ma allora dal 2° sviluppo otteniamo che

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) = 1 + o(x) + o(x) = 1 + o(x)$$

__Osservazione__ $x^a = o(x^b)$ per $x \to 0$ se e solo se $a > b$

__Dim.__ Divido: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^a}{x^b} = \lim\limits_{x\to 0} x^{a-b} = 0$ se e solo se $a-b>0$,
cioè se e solo se $a>b$.

__Esempio 1__ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan x + 3\sin x}{e^x - 1 + 2\arcsin x} = \frac{4}{3}$

Scrivo gli sviluppini di numeratore e denominatore

$\arctan x = x + o(x)$ $\qquad$ $\sin x = x + o(x)$

$3\sin x = 3x + 3o(x) = 3x + o(x)$

Numeratore: $x + o(x) + 3x + o(x) = 4x + o(x)$

$e^x = 1 + x + o(x)$ $\qquad$ $\arcsin x = x + o(x)$

$2\arcsin x = 2x + 2o(x) = 2x + o(x)$

Denominatore: $e^x - 1 + 2\arcsin x =$

$= \cancel{1} + x + o(x) - \cancel{1} + 2x + o(x) = 3x + o(x)$

In conclusione:

$$\text{Frazione} = \frac{4x + o(x)}{3x + o(x)} = \frac{\cancel{x}\left(4 + \boxed{\frac{o(x)}{x}}\right)}{\cancel{x}\left(3 + \boxed{\frac{o(x)}{x}}\right)} \to \frac{4}{3}$$

(con $\frac{o(x)}{x} \to 0$ sopra e sotto)

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\cdot\omega(x)}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0} \omega(x) = 0$$

Esempio 2 $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{2x + 3\arctan x} = \frac{1}{5}$

Uso gli sviluppini:

$e^x = 1 + x + o(x)$

$\cos x = 1 + o(x)$

Numeratore $= \cancel{1} + x + o(x) - \cancel{1} - o(x) = x + o(x)$

$\arctan x = x + o(x)$

Denominatore $= 2x + 3(x + o(x)) = 2x + 3x + 3o(x) = 5x + o(x)$

$$\text{Frazione} = \frac{x+o(x)}{5x+o(x)} = \frac{\cancel{x}\left(1+\overset{\to 0}{\boxed{\frac{o(x)}{x}}}\right)}{\cancel{x}\left(5+\underset{\downarrow 0}{\boxed{\frac{o(x)}{x}}}\right)} \to \frac{1}{5}$$

Esempio 3 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) + 3\tan x}{\arcsin(7x) + 2\arctan x} = \frac{5}{9}$ $\left[\sim \frac{5x}{9x}\right]$

$\sin x = x + o(x)$

$\sin(2x) = 2x + o(2x) = 2x + o(x)$

$\arcsin x = x + o(x)$

$\arcsin(7x) = 7x + o(7x) = 7x + o(x)$

Esempio 4 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x^2) + 3\tan x}{\arcsin(7x) + 2\arctan(x^2)} = \frac{3}{7}$ $\sim \frac{3x}{7x}$

$\sin x = x + o(x)$

$$\begin{aligned} \sin(2x^2) = 2x^2 + o(2x^2) &= 2x^2 + o(x^2) \qquad x^2 = o(x) \\ &= o(x) + o(o(x)) \\ &= o(x) + o(x) \\ &= o(x) \end{aligned}$$

Quindi $\sin(2x^2) = o(x)$ Idem per $\arctan(x^2) = o(x)$

[Esercizio: rifare tutto con i limiti notevoli]

—o —o —

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 027

Titolo nota 12/10/2012

EQUIVALENZA ASINTOTICA Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni, e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

Def. Si dice che $f(x)$ è asintoticamente equivalente a $g(x)$ per $x \to x_0$ e si scrive

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \to x_0$$

se esiste una funzione $\omega(x)$ tale che

$$f(x) = g(x) \cdot \omega(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 1$$ ← differenza rispetto ad o piccolo

Def. quasi equivalente. Se posso dividere per $g(x)$... allora $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$ se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Brutalmente: $f(x)$ e $g(x)$ hanno la stessa forza per $x \to x_0$, cioè "pareggiano".

Proprietà Si deducono facilmente dalla definizione. Ad esempio supponiamo che

$$f_1(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$
$$f_2(x) \sim f_1(x) \quad \text{per } x \to x_0$$

Allora $f_2(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$

Dim. Per ipotesi $f_1(x) = g(x) \cdot \omega_1(x)$, $\lim_{x \to x_0} \omega_1(x) = 0$ $\quad$ $f_2(x) = f_1(x) \cdot \omega_2(x)$, $\lim_{x \to x_0} \omega_2(x) = 1$

Ma allora $f_2(x) = f_1(x) \cdot \omega_2(x) = g(x) \cdot \underbrace{\boxed{\omega_1(x) \cdot \omega_2(x)}}_{\omega_3(x)}$

$\lim_{x \to x_0} \omega_3(x) = \lim_{x \to x_0} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\boxed{\omega_1(x)}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{\omega_2(x)}} = 0$, quindi $f_2(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$

"Sviluppini" in termini di equivalenza asintotica:

$\sin x \sim x$ $\tan x \sim x$ $\arctan x \sim x$ $\arcsin x \sim x$

$e^x \sim 1+x$ $\cos x \sim 1-\frac{1}{2}x^2$ $\log(1+x) \sim x$

Achtung! L'utilizzo dell'equivalenza asintotica nel calcolo dei limiti è MOLTO PERICOLOSA ed estremamente comoda

Esempio 1 $e^{\sin x}$ Brutale: $e^{\sin x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sviluppo} \\ \sin x}}{\sim} e^x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sviluppo} \\ e^x}}{\sim} 1+x$

Giustificazione e o piccolo corretto. Partiamo da $e^t = 1+t+o(t)$

Pongo $t = \sin x$:

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1+\sin x + o(\sin x) \\ &= 1+x+o(x)+o(x+o(x)) && (\text{sviluppo } \sin x = x+o(x)) \\ &= 1+x+o(x)+o(x)+o(o(x)) && (o(g_1+g_2) = o(g_1)+o(g_2)) \\ &= 1+x+o(x)+o(x)+o(x) && (\text{uso } o(o(g)) = o(g)) \\ &= 1+x+o(x) \end{aligned}$$

Esempio 2 $x^2 \cdot o(x^3) = o(x^5)$

Dim. $x^2 \cdot o(x^3) = x^2 \cdot x^3 \cdot \omega(x) = x^5 \cdot \underbrace{\omega(x)}_{\to 0}$

Esempio 3 $$\begin{aligned} \sin^2 x = (\sin x)^2 &= (x+o(x))^2 \\ &= x^2 + 2x \cdot o(x) + o(x) \cdot o(x) \\ &= x^2 + o(x^2) + o(x^2) \\ &= x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Si poteva anche verificare con la def. quasi equivalente, cioè facendo $\sin^2 x = x^2 + o(x^2)$, cioè $\sin^2 x - x^2 = o(x^2)$, cioè

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2} = 0$$

Esempio 4 $\sin(x^2)$ $\sin t = t + o(t)$

Pongo $t = x^2$; $\sin(x^2) = x^2 + o(x^2)$

Esempio 5 $\log(1+\tan^3(2x)) =$

Brutalmente: $\log(1+\tan^3(2x)) \underset{\tan(2x)\sim x}{\sim} \log(1+(2x)^3)$

$$= \log(1+8x^3)$$

$$\underset{\log(1+t)\sim t}{\sim} 8x^3$$

Giustificazione più formale: parto da $\log(1+t) = t + o(t)$

Pongo $t = \tan^3(2x)$ e ottengo

$$\log(1+\tan^3(2x)) = \tan^3(2x) + o(\tan^3(2x))$$

Ora $\tan(2x) = 2x + o(2x) = 2x + o(x)$, quindi

$$\begin{aligned}\tan^3(2x) &= (2x+o(x))^3 = 8x^3 + 3\cdot 4x^2\cdot o(x) + 3\cdot 2x\,[o(x)]^2 + [o(x)]^3\\ &= 8x^3 + o(x^3) + o(x^3) + o(x^3)\\ &= 8x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

Tornando al logaritmo:

$$\begin{aligned}\log(1+\tan^3(2x)) &= 8x^3 + o(x^3) + o(8x^3 + o(x^3))\\ &= 8x^3 + o(x^3) + \boxed{o(8x^3)} + \boxed{o(o(x^3))} = 8x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

Esempio 6 $e^{x+\sin x}$ Brutale $e^{x+\sin x} \underset{\sin x\sim x}{\sim} e^{2x} \underset{e^t\sim 1+t}{\sim} 1+2x$

Rigoroso: parto da $e^t = 1+t+o(t)$ e sostituisco $t = x+\sin x$

$$\begin{aligned}e^{x+\sin x} &= 1 + x + \boxed{\sin x} + o(x+\sin x)\\ &= 1 + x + \boxed{x+o(x)} + o(x+x+o(x))\\ &= 1 + 2x + o(x) + o(2x+o(x))\\ &= 1 + 2x + o(x)\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\arctan x} + \arcsin(3x) - \cos(x^2) + \log(1+x^5\tan x)}{\arctan(3x+x^2) + \sin x}$$

Brutale: $e^{\arctan x} \sim e^{x} \sim 1+x$

$\arcsin(3x) \sim 3x$

$\cos(x^2) \sim 1$ $\qquad \cos x = 1 + o(x)$

$\sin x \sim x$

$\arctan(3x+x^2) \sim 3x+x^2 \sim 3x$

Denominatore: $\sim 3x + x$ $\qquad$ (Detto meglio: $4x + o(x)$)

$$\log(1+x^5\tan x) \underset{\substack{\uparrow \\ \log(1+t)\sim t}}{\sim} x^5 \tan x \underset{\substack{\uparrow \\ \tan x \sim x}}{\sim} x^6 = o(x)$$

Frazione $\sim \frac{4x}{4x} \sim 1$.

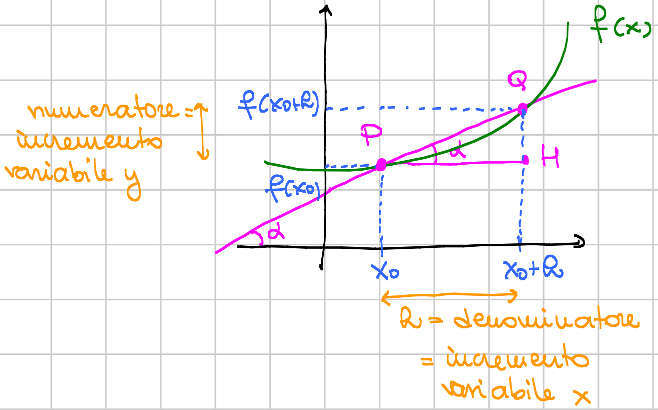
ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 028

Titolo nota 13/10/2012

$\boxed{\text{RAPPORTO INCREMENTALE}}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$, $h\neq 0$

Si definisce rapporto incrementale la quantità

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\text{con. increm. variabile } y}{\text{incremento variabile } x}$$



Significato geometrico

$$\text{Rapporto incrementale} \underset{\uparrow\ \text{Def.}}{=} \frac{QH}{PH} \underset{\uparrow\ \text{trigo. triang. rettangoli}}{=} \tan Q\hat{P}H \underset{\uparrow\ \text{significato geom. coeff. angolare di una retta}}{=} \text{coeff. angolare retta } PQ$$

Def. Si dice che la funzione $f(x)$ è derivabile nel punto x_0 se $\underset{\uparrow\ \ell\in\mathbb{R}}{\boxed{\text{esiste}}}$ il

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \text{ del rapporto incrementale.}$$

Tale limite si indica con una delle seguenti notazioni:

$$f'(x_0) \qquad \frac{df}{dx}(x_0) \qquad f^{(1)}(x_0) \qquad \dot{f}(x_0)$$

Significato geometrico Quando $h\to 0$ abbiamo che

- il punto Q tende al punto P
- la retta secante PQ tende alla retta tangente al grafico in P

Quindi

- il rapporto incrementale, cioè il coeff. ang. della retta PQ, tende al coeff. angolare della retta tangente in P

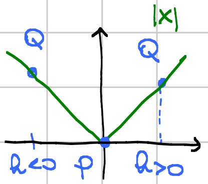
$$\boxed{f'(x_0) = \text{coeff. ang. retta tangente al grafico in } P}$$

Equazione retta tangente al grafico Si tratta di fare la retta che passa per $P = (x_0, f(x_0))$ e con coeff. angolare $f'(x_0)$. Quindi

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Oss. $f'(x_0)$ non è obbligato ad esistere. Cito 2 esempi:

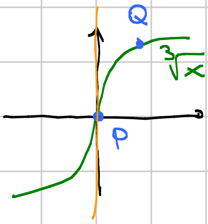
① $f(x) = |x|$ con $x_0 = 0$. Dovrei fare



$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

Non esiste perché $\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$, $\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$

② $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $x_0 = 0$



$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty$$

Geometricamente corrisponde al fatto che la retta tangente è verticale

— o — o —

Def. Si dice che $f(x)$ è differenziabile in x_0 se esiste un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h) \quad \text{per } h \to 0} \quad \text{(Diff.)}$$

— o — o —

Teorema La funzione $f(x)$ è differenziabile in x_0 se e solo se $f(x)$ è derivabile in x_0.
Inoltre $\alpha = f'(x_0)$ è l'unico numero per cui vale la formula della definizione.

Dim. Supponiamo che $f(x)$ verifichi (Diff). Allora

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{f(x_0)} + \alpha h + o(h) - \cancel{f(x_0)}}{h} = \lim_{h \to 0} \alpha + \overset{\overset{0}{\uparrow}}{\boxed{\frac{o(h)}{h}}} = \alpha$$

Quindi f è derivabile e $f'(x_0) = \alpha$

Viceversa, supponiamo che f sia derivabile e verifichiamo che $f(x)$ soddisfa (Diff) con $\alpha = f'(x_0)$. Devo dimostrare che

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + o(h) \qquad \text{per } h \to 0$$

cioè

$$f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)\,h = o(h)$$

Uso definizione quasi equiv. di o piccolo e mi riduco a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}}_{\hookrightarrow f'(x_0)} - f'(x_0) = 0$$

— o — o —

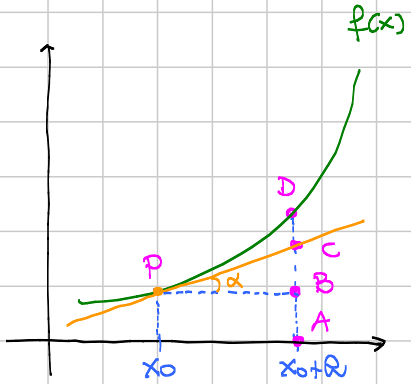
Conseguenza: ci sono due modi alternativi di definire $f'(x_0)$:

① il limite del rapporto incrementale

② l'unico numero $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui vale (Diff) cioè

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h)$$

— o — o —



AD = AB + BC + CD

AD = $f(x_0+h)$

AB = $f(x_0)$

$\frac{BC}{PB} = \tan\alpha = f'(x_0)$

Quindi $BC = PB \cdot f'(x_0) = f'(x_0) \cdot h$

$$\underbrace{f(x_0+h)}_{AD} = \underbrace{f(x_0)}_{AB} + \underbrace{f'(x_0)\cdot h}_{BC} + \underbrace{\overset{?}{\boxed{o(h)}}}_{CD}$$

Quando $h \to 0$

- il termine AB resta uguale a se stesso, cioè NON DIPENDE DA h
- il termine BC tende a 0 in maniera proporzionale ad h (se dimezzo h, si dimezza anche BC) con costante di proporzionalità uguale a tan α, cioè $f'(x_0)$ (dipende LINEARMENTE da h)

- il termine CD tende a zero più velocemente di h, e per questo è $o(h)$.

—o—o—

Teorema Se $f(x)$ è derivabile in x_0, allora $f(x)$ è continua in x_0.

Dim. Devo dim. che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Trasporto il limite a zero ponendo $h = x - x_0$. Quando $x \to x_0$ ho che $h \to 0$. Quindi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(x_0+h) = \lim_{h \to 0} f(x_0) + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\boxed{f'(x_0)h}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\boxed{\frac{o(h)}{h}}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\boxed{h}}$$

$$= f(x_0)$$

In alternativa (all'antica)

$$f(x_0+h) = \underset{\substack{\downarrow \\ f'(x_0)}}{\boxed{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\boxed{h}} + f(x_0) = f(x_0)$$

ANALISI MATEMATICA 1 — LEZIONE 029

Titolo nota 13/10/2012

Regole di derivazione e derivate delle funzioni elementari

$(\text{costante})' = 0$ $\qquad (x^k)' = k\,x^{k-1} \quad k \in \mathbb{Z} \quad k \neq 0$

$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \cdot \log a \qquad (\log x)' = \frac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1} \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$(f \pm g)' = f' \pm g' \qquad (\alpha f)' = \alpha f' \quad \alpha \in \mathbb{R}$ costante

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \qquad \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2} \qquad [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Esempio 1 Calcolare la derivata di $f(x) = x^3$

1° modo $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x_0^3} + 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3 - \cancel{x_0^3}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(3x_0^2 + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\boxed{3x_0 h}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\boxed{h^2}}\right) = 3x_0^2$$

2° modo $f(x_0+h) = (x_0+h)^3 = \underbrace{x_0^3}_{f(x_0)} + \underset{\substack{\downarrow \\ \boxed{\alpha} \\ \uparrow \\ f'(x_0)}}{\boxed{3x_0^2}}\, h + \underbrace{3x_0 h^2 + h^3}_{+\, o(h)}$

$f(x_0) + \boxed{\alpha}\, h \quad + o(h)$

Esempio 2 $f(x) = e^x$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0}\cdot e^h - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{x_0} \underbrace{\boxed{\frac{e^h - 1}{h}}}_{\downarrow\ 1} = e^{x_0}$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$

$$f(x_0+h) = e^{x_0+h} = e^{x_0}\cdot e^h = e^{x_0}\underset{\substack{\uparrow \\ \text{sviluppo di } e^h}}{(1 + h + o(h))}$$

$$= \underbrace{e^{x_0}}_{f(x_0)+} + \underbrace{\boxed{e^{x_0}}\cdot h}_{\alpha h} + \underbrace{o(h)}_{+\ o(h)}$$

Esempio 3 $f(x) = \log x \qquad x_0 > 0$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log(x_0+h) - \log x_0}{h}$$

precorso

$$\overset{\downarrow}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\log\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\boxed{\frac{\log\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}}}}_{\downarrow\ 1 \quad y = \frac{h}{x_0}} \cdot \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0}$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$

$$f(x_0+h) = \log(x_0+h) = \log\left[x_0\left(1+\frac{h}{x_0}\right)\right] =$$

$$= \log x_0 + \log\left(1+\frac{h}{x_0}\right) \qquad (\text{Uso } \log(1+t) = t + o(t))$$

$$= \underbrace{\log x_0}_{f(x_0)} + \underbrace{\frac{h}{x_0}}_{\alpha h} + \underbrace{o(h)}_{o(h)} \qquad \text{quindi } \alpha = \frac{1}{x_0}$$

Esempio 4 $f(x) = \cos x$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0+h) - \cos x_0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h - \cos x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\cos x_0 \underset{\downarrow \atop -\frac{1}{2}}{\boxed{\frac{\cos h - 1}{h^2}}} \underset{\downarrow \atop 0}{\boxed{h}} - \sin x_0 \underset{\downarrow \atop 1}{\boxed{\frac{\sin h}{h}}} \right) = -\sin x_0$$

[Esercizio: fare lo stesso conto utilizzando la formula per $\cos\alpha - \cos\beta$]

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ $f(x_0+h) = \cos(x_0+h) = \cos x_0 \cdot \cos h - \sin x_0 \cdot \sin h$

[Uso $\cos h = 1 + o(h)$, $\sin h = h + o(h)$]

$$= \cos x_0 \, (1 + o(h)) - \sin x_0 \, (h + o(h))$$

$$= \cos x_0 + \cos x_0 \cdot o(h) - \sin x_0 \cdot h - \sin x_0 \cdot o(h)$$

$$= \underbrace{\cos x_0}_{f(x_0)} \underbrace{\boxed{-\sin x_0 \cdot h}}_{\alpha \cdot h} + \underbrace{o(h)}_{o(h)} \qquad \alpha = -\sin x_0$$

[Esercizio: ripetere la stessa dimostrazione /i con $f(x) = \sin x$]

Osservazione Derivate funzioni elementari = limiti notevoli

= sviluppini

—o—o—

Derivata della somma Siano date $f(x)$ e $g(x)$. Pongo $S(x) = f(x) + g(x)$. Calcolo la derivata di $S(x)$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ $S'(x_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{S(x_0+h) - S(x_0)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Per ipotesi

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h)$$
$$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0) \cdot h + o(h)$$

Le sommo:

$$\underbrace{f(x_0+h) + g(x_0+h)}_{S(x_0+h)} = \underbrace{f(x_0) + g(x_0)}_{S(x_0)} + \underbrace{(f'(x_0) + g'(x_0))}_{\alpha} h + \underbrace{o(h)}_{o(h)}$$

[Esercizio: fare lo stesso per la differenza]

— o — o —

Derivata del prodotto Pongo $P(x) = f(x)\cdot g(x)$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ $P'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{P(x_0+h)-P(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0) + f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\underbrace{\boxed{f(x_0+h)}}_{f(x_0)} \underbrace{\boxed{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}}_{g'(x_0)} + \underbrace{\boxed{g(x_0)}}_{g(x_0)} \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}}_{f'(x_0)} \right]$$

$\boxed{f \text{ è continua}}$

$$= f(x_0)\cdot g'(x_0) + g(x_0)\cdot f'(x_0)$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + o(h)$$
$$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0)\cdot h + o(h)$$

Moltiplico

$$\underbrace{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)}_{P(x_0+h)} = f(x_0)\cdot g(x_0) \qquad P(x_0)$$
$$+ [f(x_0)\cdot g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)]h \qquad \alpha h$$
$$+ 6 \text{ termini che sono } o(h) \qquad o(h)$$

$$f(x_0)\cdot o(h) = o(h)$$
$$f'(x_0)\cdot h \cdot o(h) = o(h^2) = o(h)$$
$$o(h)\cdot o(h) = o(h^2) = o(h)$$

se batte h^2, allora batte h (ma non viceversa).

$$h\cdot h = h^2 = o(h)$$

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 030

Titolo nota 13/10/2012

$\boxed{\text{Derivata di } \frac{1}{f}}$ Pongo $Q(x) = \frac{1}{f(x)}$

$$Q'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{Q(x_0+h) - Q(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{f(x_0+h)\cdot f(x_0)} = \lim_{h\to 0} \underset{-}{\underset{\downarrow}{-}} \underset{f'(x_0)}{\underset{\downarrow}{\boxed{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}}} \underset{\frac{1}{[f(x_0)]^2}}{\underset{\downarrow}{\boxed{\frac{1}{f(x_0+h)\cdot f(x_0)}}}}$$

$$= -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$$

$\boxed{\text{Derivata di } \frac{f}{g}}$ $\left[\frac{f}{g}\right]' = \left[f\cdot\frac{1}{g}\right]' =$ uso regola prodotto

$$= f'\cdot\frac{1}{g} + f\cdot\left[\frac{1}{g}\right]' = \frac{f'}{g} + f\left(-\frac{g'}{g^2}\right)$$

$$= \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$$

<u>Esempio</u> $[\tan x]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{[\sin x]'\cdot\cos x - \sin x\cdot[\cos x]'}{\cos^2 x}$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \begin{array}{l} \nearrow \frac{1}{\cos^2 x} \\ \searrow 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \end{array}$$

[<u>Esercizio</u>: Dimostrare che $[x^k]' = k\,x^{k-1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ usando l'induzione e la derivata del prodotto $[x^{k+1}]' = [x\cdot x^k]'$]

—o—o—

<u>Derivata della composizione</u> Pongo $C(x) = f(g(x))$

Per ipotesi:

g è derivabile in x_0: $g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0)\cdot h + o(h)$

f è derivabile in $g(x_0)$: $f(g(x_0)+k) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\cdot k + o(k)$

$$C(x_0+h) = f(g(x_0+h))$$

$$= f(g(x_0) + \underbrace{\boxed{g'(x_0)\cdot h + o(h)}}_{k})$$

$$= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\, g'(x_0)\cdot h + \overset{o(h)}{\boxed{f'(g(x_0))\cdot o(h)}} +$$

$$+ \boxed{o(g'(x_0)h + o(h))}$$

$$\hookrightarrow o(g'(x_0)h) + o(o(h)) = o(h)$$

$$= \underbrace{f(g(x_0))}_{C(x_0)} + \underbrace{f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)\cdot h}_{\alpha\cdot h} + \underbrace{o(h)}_{o(h)}$$

—o—o—

DERIVATA FUNZIONE INVERSA Sia $f(x)$ una funzione, e sia $g(x)$ la funzione inversa.

$g(f(x)) = x \qquad \forall x \in$ insieme di partenza di f

$f(g(x)) = x \qquad \forall x \in$ " " " " g

Prendo la 2ª relazione e derivo a dx e sx

$[f(g(x))]' = [x]' \qquad f'(g(x))\, g'(x) = 1$ da cui

$$\boxed{g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}}$$

Formula per derivata della funzione inversa

Achtung! Ho ricavato la formula supponendo di sapere già che $g(x)$ è derivabile. Questo andrebbe dimostrato.

Esempio 1 $\quad f(x) = e^x \qquad g(x) = \log x \qquad f'(x) = e^x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{g(x)}} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

Esempio 2 $\quad f(x) = \tan x \qquad g(x) = \arctan x \qquad f'(x) = 1+\tan^2 x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1+\tan^2 g(x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Esempio 3 $f(x) = \sin x$ $g(x) = \arcsin x$ $f'(x) = \cos x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos(g(x))} \underset{\substack{\uparrow \\ \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}}}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(g(x))}}$$

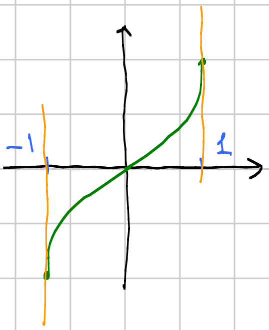
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Achtung! Ci sono almeno 2 lati oscuri

① ho usato che $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Questo è vero solo nel 1° e 4° quadrante. Ho usato la formula con $\alpha = g(x) = \arcsin x$ e $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, quindi proprio nel 1° e 4° quadrante

② ho usato che $\sin(\arcsin x) = x$. Questo vale per ogni $x \in$ insieme di partenza di $\arcsin x$, cioè per ogni $x \in [-1,1]$ che è proprio dove voglio derivare.

Achtung! Il denominatore si annulla per $x = \pm 1$
Geometricamente corrisponde al fatto
che il grafico ha tangente verticale in $x = \pm 1$.



[Esercizio: fare lo stesso, compreso il chiarimento dei lati oscuri, con $f(x) = \cos x$]

—o —o —

$$\boxed{\text{Derivata di } f(x) = x^{\alpha} \text{ con } \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \neq 0}$$

$$[f(x)]' = [x^{\alpha}] = [e^{\alpha \log x}]'$$

$g(f(x))$ con $g(x) = e^x$
$f(x) = \alpha \log x$

$$= \underset{g'(f(x))}{[e^{\alpha}\log x]} \cdot \underset{f'(x)}{\frac{\alpha}{x}}$$

$$= x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

Esempio 1 $f(x) = \cos(e^x)$ Composizione

$$f'(x) = -\sin(e^x)\cdot e^x$$

$$f(x) = e^x \cdot \cos x$$ Prodotto

$$f'(x) = e^x \cdot \cos x + e^x(-\sin x)$$

$$f(x) = \arctan x^3 \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^6}\cdot 3x^2$$

$$f(x) = x^2 \cdot \log(\sin x)$$

$$f'(x) = [x^2]' \cdot \log(\sin x) + x^2 \cdot [\log(\sin x)]'$$

$$= 2x \cdot \log(\sin x) + x^2 \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$$

Esempio 2 $f(x) = (\arctan x)^{\sin x}$

Evitare cose creative: $\sin x \cdot (\arctan x)^{\sin x - 1}$

$(\arctan x)^{\sin x} \cdot \log(\arctan x)$

$$f'(x) = \left[e^{\sin x \cdot \log(\arctan x)}\right]'$$

$$= \underbrace{\boxed{e^{\sin x \cdot \log(\arctan x)}}}_{(\arctan x)^{\sin x}} \cdot \left\{\cos x \cdot \log(\arctan x) + \sin x \frac{1}{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2}\right\}$$

$$= (\arctan x)^{\sin x} \cdot \log(\arctan x) \cdot \cos x + (\arctan x)^{\sin x - 1} \frac{\sin x}{1+x^2}$$

— o — o —

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 031

Titolo nota 17/10/2012

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

Derivate successive Data $f(x)$, sotto opportune ipotesi possiamo calcolare $f'(x)$, cioè la funzione che ad ogni x associa il valore della derivata di f in x.
Le derivate successive si ottengono continuando a derivare: $f''(x) = (f'(x))'$.

Notazione:

$$f''(x) \qquad \frac{d^2 f}{dx^2}(x) \qquad f^{(2)}(x) \qquad \ddot{f}(x)$$

$$\vdots \qquad \frac{d^k f}{dx^k}(x) \qquad f^{(k)}(x) \qquad \vdots$$

Definite per bene: $f'(x) =$ derivata di $f(x)$, $f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)}(x))'$

— o — o —

Teorema di De L'Hôpital. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni, e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.
Supponiamo di voler calcolare

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Supponiamo che:

(i) un po' di burocrazia ← tutto ciò che serve per dar senso all'enunciato: poter dividere per $g(x)$, $g'(x)$, ...,

(ii) il limite sia una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

(iii) esista

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ (stesso ℓ).

Attenzione! De L'Hôpital NON può servire

(1) se la forma indeterminata non è del tipo previsto (in questo caso però funzionano i teo. algebrici)

(2) se $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste (in questo caso BOH, non si può concludere nulla)

Utilizzo operativo Devo fare il $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

- Controllo che sia $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$
- Se sì, provo a calcolare il $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

→ se questo non esiste, sono guai

→ se questo esiste ed è $l \in \mathbb{R}$, allora anche quello iniziale è l

→ se questo è a sua volta una forma indeterminata, allora posso andare avanti calcolando

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

e così via ricorsivamente.

—o —o —

Achtung! L'utilità pratica di Hôpital è limitata dal fatto che le funzioni, derivandole (specie più volte) tendono a "peggiorare"

—o —o —

Esempio 1 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^2} \underset{\overset{\uparrow}{\text{Hôp}}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} \underset{\overset{\uparrow}{\text{limite notevole}}}{=} -\frac{1}{2}$

NO!! Non è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ o $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$!!!

In questo caso il limite è $\frac{1}{0^+} = +\infty$ per teo. algebrico.

Esempio 2 $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4x + 3\sin x}{x}$

Si vede che Denominatore → $+\infty$ e Numeratore $\geq 4x - 3 \to +\infty$.

Posso applicare Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x+3\sin x}{x} \overset{\overset{\text{Hôp}}{\downarrow}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{4+3\cos x}{1} = 4 + 3\lim_{x\to+\infty} \cos x = \text{N.E.}$$

Quindi il limite iniziale non esiste.

NO!!! Visto che $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste, NON POSSIAMO concludere nulla sul limite iniziale, con questo sistema

In realtà $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x+3\sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 4+3\underbrace{\boxed{\frac{\sin x}{x}}}_{0 \text{ (carabinieri)}} = 4$

— o — o —

Esempio 3 $\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$ $\left[= +\infty\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right) = +\infty\cdot 0\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}} \underset{\left[\frac{0}{0}:\text{ Hôp}\right]}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$ (raccolgo x^2 sopra e sotto)

— o — o —

Osservazione 1 Si può utilizzare Hôpital per fare limiti di successioni, ma solo mediante l'applicazione del criterio funzioni → successioni

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n\right) \underset{\text{Pongo } x=n}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right) \underset{\text{Hôp}}{\overset{\uparrow}{=}} 1$$

Osservazione 2 Il limite di sopra si poteva fare utilizzando la formula

$$\boxed{\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x>0}$$ da cui $\frac{\pi}{2}-\arctan x = \arctan\frac{1}{x}$, quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \underset{y=\frac{1}{x}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{y\to0^+} \frac{\arctan y}{y} = 1$$

Da dove arriva la formula? $\arctan x = \alpha$, quindi $x = \tan\alpha$,

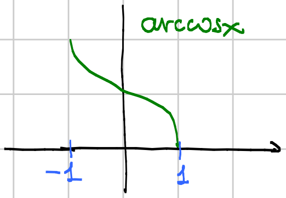
quindi $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \underset{\text{archi associati: precorso}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{x}$

quindi $\frac{\pi}{2}-\alpha = \arctan\frac{1}{x}$

$\downarrow$

$\frac{\pi}{2}-\arctan x = \arctan\frac{1}{x}$

— o — o —



Esempio 4 $\lim_{x\to1^-}\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$ $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Hôp}}}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{2}\frac{-1}{\sqrt{1-x}}}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x}=\lim_{x\to1^-}2\frac{\sqrt{\cancel{1-x}}}{\sqrt{(1+x)\cancel{(1-x)}}}=\frac{2}{\sqrt2}=\sqrt2$$

Conseguenza: ponendo $1-x=y$ ottengo che $\lim_{y\to0^+}\frac{\arccos(1-y)}{\sqrt y}=\sqrt2$,

il che a sua volta è equivalente a dire che $\arccos(1-y)=\sqrt2\sqrt y+o(\sqrt y)$ (fare la verifica), il che dice che $\arccos(1-y)$ si comporta come $\sqrt{2y}$

Esempio 5 $\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x+x^5}{x^3}$

$\boxed{1^\circ\text{ modo}}$ Percorso + limiti notevoli

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x+x^5}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\left(1-\overset{1}{\boxed{\frac{\sin x}{x}}}\right)+x^5}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x^5}{x^3}=\lim_{x\to0}x^2=0$$

NO!!! LIMITE METÀ PER VOLTA !!! QUI

$\boxed{2^\circ\text{ modo}}$ Uso l'equivalenza asintotica $\sin x\sim x$

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x+x^5}{x^3}\sim\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}-\cancel{x}+x^5}{x^3}=\lim_{x\to0}x^2=0$$

NO!!! L'EQUIVALENZA ASINTOTICA È PERICOLOSA! METTERE o piccolo

$\boxed{3^\circ\text{ modo}}$ Hôpital

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x+x^5}{x^3}\underset{\substack{\uparrow\\ \left[\frac00;\text{Hôp}\right]}}{=}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x+5x^4}{3x^2}\underset{\substack{\uparrow\\ \left[\frac00;\text{Hôp}\right]}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\sin x+20x^3}{6x}\underset{\substack{\uparrow\\ \left[\frac00;\text{Hôp}\right]}}{=}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x+60x^2}{6}=\frac16$$ Uhm....

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 032

Titolo nota 17/10/2012

FUNZIONI IPERBOLICHE $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Proprietà di simmetria

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -\sinh x \Rightarrow \text{DISPARI}$$

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \cosh x \Rightarrow \text{PARI}$$

$$\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh x}{\cosh x} = -\tanh x \Rightarrow \text{DISPARI}$$

Derivate

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sinh x$$

Esercizio: calcolare $(\tanh x)'$ e vedere analogie con $(\tan x)'$

Relazione fondamentale

$$(\sinh x)^2 = \left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]^2 = \frac{e^{2x}+e^{-2x}-2\overset{1}{\boxed{e^x\cdot e^{-x}}}}{4}$$

$$(\cosh x)^2 = \left[\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right]^2 = \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2\cdot e^x\cdot e^{-x}}{4} = \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}$$

$$\boxed{(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$

Formule di duplicazione

$$\sinh(2x) = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$$

$$2\sinh x\cdot\cosh x = \cancel{2}\,\frac{e^x-e^{-x}}{\cancel{2}}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} = \sinh(2x)$$

$$(A-B)\cdot(A+B) = A^2-B^2$$

Esercizio Trovare formule analoghe per $\cosh(2x)$

Esercizio Trovare formule per $\sinh(x+y)$ e per $\cosh(x+y)$ e vedere analogie con la trigonometria.

Limiti notevoli $\lim_{x\to0}\frac{\sinh x}{x} = \lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x} =$

$$= \lim_{x\to0}\frac{e^x-1+1-e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to0}\underbrace{\boxed{\frac{e^x-1}{2x}}}_{\frac{1}{2}} - \underbrace{\boxed{\frac{e^{-x}-1}{2x}}}_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cosh x}{x^2} = \left[\frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}\right] \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Hôp}}}{=} \lim_{x\to0}\frac{-\sinh x}{2x} = \textcircled{-}\frac{1}{2}$$

["Esercizio": ha senso calcolare $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$ usando De L'Hôpital ?]

Sviluppi I due limiti di sopra sono equivalenti a dire che

$\sinh x = x + o(x)$ $\cosh x = 1 + o(x)$

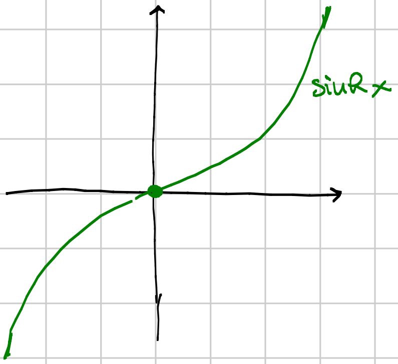
$\cosh x = 1 \textcircled{+} \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ [Verificare!]

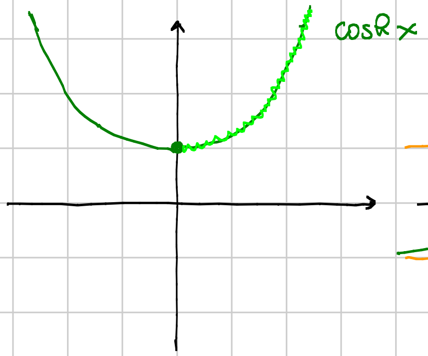
Limiti a ±∞ $\lim_{x\to+\infty}\sinh x = \lim_{x\to+\infty}\frac{\overset{+\infty}{\boxed{e^x}} - \overset{0}{\boxed{e^{-x}}}}{2} = +\infty$

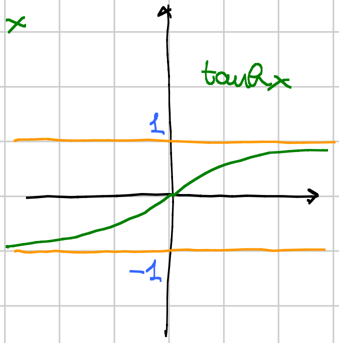
$\lim_{x\to-\infty}\sinh x = \dots = -\infty$ (funzione dispari!)

$$\lim_{x\to+\infty}\cosh x \underset{\substack{\uparrow\\ \text{PARI}}}{=} \lim_{x\to-\infty}\cosh x = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{2} = +\infty$$

Grafici







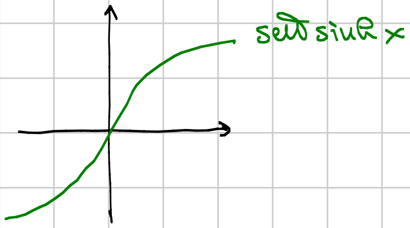
Esercizio Verificare (stile precorso) che $\sinh x$ è strett. crescente su tutto $\mathbb{R}$ e $\cosh x$ è strett. cresc. per $x \geq 0$.

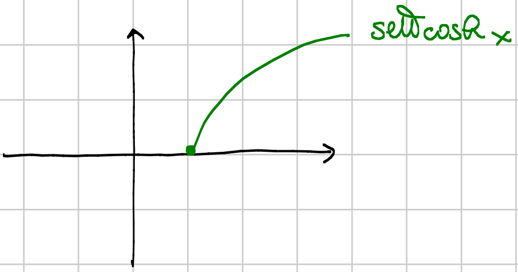
Funzioni inverse. $f(x) = \sinh x$ vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva e surgettiva. Quindi ammette una funzione inversa $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che è

$$g(x) = \operatorname{Sett}\sinh x$$

$f(x) = \cosh x$, vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è né iniettiva, né surgettiva. Vista come $f: [0,+\infty) \longrightarrow [1,+\infty)$ è iniettiva e surgettiva, dunque invertibile. La sua inversa $g: [1,+\infty) \to [0,+\infty)$ è

$$g(x) = \operatorname{Sett}\cosh x$$





Formula per $\operatorname{sett}\sinh x$. Cosa vuol dire trovare $\operatorname{Sett}\sinh \alpha$? Vuol dire risolvere $\sinh x = \alpha$, cioè $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \alpha$, cioè

$e^x - e^{-x} = 2\alpha$. Pongo $e^x = y$ e diventa $y - \frac{1}{y} = 2\alpha$, cioè

$y^2 - 1 = 2\alpha y$, cioè $y^2 - 2\alpha y - 1 = 0$, cioè $y = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2+1}$.

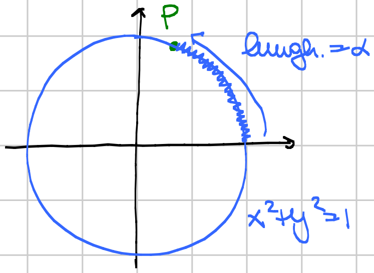
Tornando in x mi trovo a risolvere $e^x = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2+1}$. Apparentemente ci sono 2 possibilità, ma quella con il segno $-$ produce $e^x =$ roba negativa, il che è impossibile. Dunque resta $e^x = \alpha + \sqrt{\alpha^2+1}$ da cui $x = \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2+1})$

Quindi $\boxed{\operatorname{Sett}\sinh \alpha = \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2+1})}$

Nota bene: l'argomento del log è >0 anche per $\alpha < 0$: verificarlo !!!

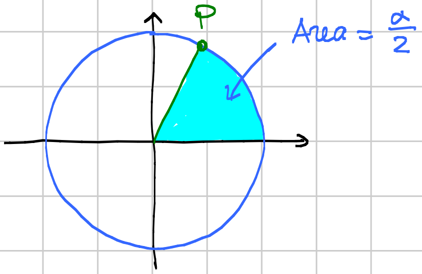
Esercizio Fare gli stessi conti per trovare $\operatorname{Sett}\cosh \alpha$ e $\operatorname{Sett}\tanh \alpha$ (occhio ai segni !!)

Interpretazione geometrica



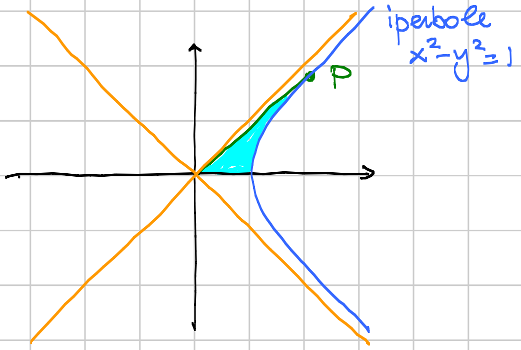
$P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

Trigonometria normale REVISITED



Dato α, cerco un p.to P in maniera tale che Area (settore) $= \frac{\alpha}{2}$,
Allora $P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

Trigonometria iperbolica

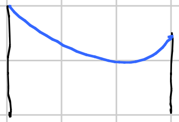


Dato α, cerco un p.to P sull'iperbole in maniera tale che Area (settore) $= \frac{\alpha}{2}$.
Ebbene: $P = (\cosh\alpha, \sinh\alpha)$
Il fatto che P stia sull'iperbole dice che $\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1$

—o—o—

Osservazione fisica

Un filo tra 2 pali si dispone come un cosh x.



—o—o—

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 033

Titolo nota 18/10/2012

Formula di TAYLOR Caso con centro in $x_0 = 0$.

Sia $f(x)$ una funzione e sia $n \in \mathbb{N}$.

Sotto opportune ipotesi esiste un unico polinomio $\underset{\uparrow}{P_n(x)}$ di grado $\leq n$ tale che

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0}$$

Inoltre $P_n(x)$ è dato dalla seguente formula

$$\boxed{\begin{aligned} P_n(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \end{aligned}}$$

Operativamente Posso sostituire $f(x)$ con $P_n(x)$ commettendo un errore che è $o(x^n)$. Questa operazione è utile quando si calcola un limite per $x \to 0$.

Oss. Le ipotesi sono che $f(x)$ sia definita almeno in un intervallo che contiene $x_0 = 0$ e che sia derivabile almeno n volte, più precisamente

→ derivabile almeno $(n-1)$ volte in tutto l'intervallo

→ derivabile n volte nel p.to $x_0 = 0$.

Notazione La formula $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ si dice formula di Taylor con $\boxed{\text{resto di PEANO}}$, cioè il resto è scritto sotto forma di o piccolo.

$$\underbrace{\boxed{f(x) - P_n(x)}}_{} = o(x^n)$$

"resto": errore che commetto se al posto di $f(x)$ scrivo $P_n(x)$

$\boxed{\text{"Dim"}}$ Lo strumento fondamentale è il seguente Lemma.

Lemma Sia $\varphi(x)$ una funzione tale che

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \ldots = \varphi^{(n)}(0) = 0,$$

cioè una funzione che si annulla in $x_0 = 0$ insieme a tutte le sue derivate fino all'ordine n.

Allora $\varphi(x) = o(x^n)$ per $x \to 0$

$\boxed{\text{Dim nel caso } n=3}$ Uso la definizione quasi equivalente

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^3} \underset{\left[\frac{0}{0}:\text{H\^op}\right]}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\varphi'(x)}{3x^2} \underset{\left[\frac{0}{0}:\text{H\^op}\right]}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\varphi''(x)}{6x} \underset{\left[\frac{0}{0}:\text{H\^op}\right]}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\varphi'''(x)}{6} \underset{\varphi'''(0)=0}{\overset{\uparrow}{=}} 0$$

— o — o —

Back to dim. Taylor (sempre caso particolare $n=3$)

Devo dimostrare che $f(x) = P_3(x) + o(x^3)$ per $x \to 0$, cioè che $f(x) - P_3(x) = o(x^3)$. Pongo $\varphi(x) = f(x) - P_3(x)$ e punto ad usare il Lemma, cioè a verificare che $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \varphi'''(0) = 0$.

Ma

$$\varphi(x) = f(x) - P_3(x) = f(x) - f(0) - \frac{f'(0)}{1!}x - \frac{f''(0)}{2!}x^2 - \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$\varphi(0) = f(0) - f(0) = 0; \quad \varphi'(x) = f'(x) - f'(0) - f''(0)x - \frac{f'''(0)}{2}x^2$$

$$\varphi'(0) = f'(0) - f'(0) = 0; \quad \varphi''(x) = f''(x) - f''(0) - f'''(0)x$$

$$\varphi''(0) = f''(0) - f''(0) = 0; \quad \varphi'''(x) = f'''(x) - f'''(0) \implies \varphi'''(0) = 0.$$

Idea per il caso generale: quando pongo $\varphi(x) = f(x) - P_n(x)$ e vado a derivare k volte, ottengo

$$\varphi^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0) + \text{termini con almeno } x, x^2, x^3, \ldots$$

quindi quando sostituisco $x=0$ viene $\varphi^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) - f^{(k)}(0) = 0$. □

TABELLINA DEGLI SVILUPPI DI TAYLOR

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Se voglio il $P_n(x)$ basta che mi fermo a x^n.

$$\sin x = \overset{\text{corretto dopo video}}{\boxed{x}} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

$$\sinh x = \underset{\text{corretto dopo video}}{\boxed{x}} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Oss. Le funzioni PARI hanno solo termini con esponenti pari. Analogo discorso per le funzioni dispari.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \underbrace{\alpha}_{\binom{\alpha}{1}} x + \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}}_{\binom{\alpha}{2}} x^2 + \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}}_{\binom{\alpha}{3}} x^3 + \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}}_{\binom{\alpha}{4}} x^4 + \dots$$

Oss. Se α fosse intero positivo sarebbe il binomio di Newton. Tuttavia lo sviluppo vale per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

Caso particolare $\boxed{\alpha = -1}$

basta sostituire $\alpha = -1$ in $\binom{\alpha}{k}$

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 \dots$$

— o — o —

Esempi di polinomi di Taylor

$$\sin x = \overset{P_3(x)}{\boxed{x - \frac{x^3}{6}}} + o(x^3)$$

Taylor con $n = 3$

$$\sin x = \underset{P_4(x)}{\boxed{x - \frac{x^3}{6}}} + o(x^4)$$

Taylor con $n = 4$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)$ NO! Avrei dovuto mettere $+ \frac{x^5}{5!} = \frac{x^5}{120}$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^2)$ CORRETTA MA POCO FURBA

$= x + o(x^2)$ (Taylor con $n=2$)

$\sin x = x + 742\,x^3 + o(x^2)$ Corretta perché $o(x^2)$ si mangia il termine cubico.

Esempio $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x + x^5}{x^3}$ Uso Taylor con $n = 3$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + x^5}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) + x^5}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{6} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\boxed{\frac{o(x^3)}{x^3}}} = \frac{1}{6}$$

— o — o —

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 034

Titolo nota 18/10/2012

Formula generale per i polinomi di Taylor

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Per calcolare i polinomi di Taylor di $f(x)$ bisogna calcolare tutte le derivate di $f(x)$ nel punto $x_0 = 0$.

$\boxed{f(x) = e^x}$ $f^{(k)}(x) = e^x$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, quindi $f^{(k)}(0) = 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$.
Quindi il coeff. di x^k nel polinomio di Taylor è
$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!}$$

$\boxed{f(x) = \cosh x}$ $f'(x) = \sinh x$ $f''(x) = \cosh x$ $f'''(x) = \sinh x$

Quindi
$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \sinh x & k \text{ dispari} \\ \cosh x & k \text{ pari} \end{cases}$$

Quindi
$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & k \text{ dispari} \\ 1 & k \text{ pari} \end{cases}$$

Quindi il coeff. di x^k nel polinomio di Taylor è 0 se k è dispari (quindi le potenze dispari "non ci sono") ed è $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!}$ se k è pari

In sostanza viene come lo sviluppo di e^x solo con i termini di grado pari

$\boxed{f(x) = \sinh x}$ Stessa cosa scambiando pari e dispari.

<u>Osservazione</u> Sommando gli sviluppi di $\cosh x$ e $\sinh x$ si ottiene quello di e^x, ed infatti

$$\cosh x + \sinh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2} = e^x$$

$\boxed{f(x)=\cos x}$ Calcoliamo le derivate successive

$f^{(0)}(x) = \cos x$ $\quad f^{(1)}(x) = -\sin x$ $\quad f^{(2)}(x) = -\cos x$ $\quad f^{(3)}(x) = \sin x$

$f^{(4)}(x) = \cos x$ $\quad f^{(5)}(x) = -\sin x$ $\quad \ldots$

e così via, cioè le derivate si ripetono con periodo 4 (ad es. $f^{(2012)}(x) = \cos x$)

Sostituendo $x=0$ trovo $1, 0, -1, 0$, e così via, cioè

→ trovo 0 per k dispari

→ trovo ±1 alternati per k pari.

Quindi il coeff. di x^k nel polinomio, che è $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, risulta

→ 0 per k dispari

→ $\pm\frac{1}{k!}$ alternati per k pari

$\boxed{f(x)=\sin x}$ Analogo, solo scambiando pari con dispari

$\boxed{f(x)=\log(1+x)}$ Occorre capire le derivate successive

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = 2\frac{1}{(1+x)^3},$$

$$f^{(4)}(x) = -3\cdot 2\frac{1}{(1+x)^4}, \quad f^{(5)}(x) = 4\cdot 3\cdot 2\frac{1}{(1+x)^5}$$

L'idea è che sia $\boxed{f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}}$ Formula dedotta dagli esperimenti fino a $k=5$

$\boxed{\text{Dim. per induzione}}$ <u>Passo base</u> $k=1$ $\quad f'(x) = (-1)^2\frac{0!}{(1+x)^1} = \frac{1}{1+x}$ Ok

<u>Passo induttivo</u> Ipotesi: $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$

Tesi: $f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+2}\frac{k!}{(1+x)^{k+1}}$

Dim. passo induttivo

$$f^{(k+1)}(x) = \left[f^{(k)}(x) \right]' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso} \\ \text{ipotesi}}}{=} \left[(-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k} \right]' = (-1)^{k+1} (k-1)! \, \Bigg[\overset{\substack{(1+x)^{-k} \\ \uparrow}}{\frac{1}{(1+x)^k}} \Bigg]'$$

$$= (-1)^{k+1} (k-1)! \, (-k) \, (1+x)^{-k-1} = (-1)^{k+2} \, k! \, \frac{1}{(1+x)^{k+1}}$$

Confrontando il 1° e l' ultimo termine ho proprio la tesi.

—o —o —

Dalla formula per la derivata ottengo che $f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} (k-1)!$, quindi il coeff. di x^k è

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k+1} (k-1)!}{k!} = \frac{(-1)^{k+1} \cancel{(k-1)!}}{k \, \cancel{(k-1)!}} = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

quindi segni alterni e k (senza fattoriale) al denominatore.

—o —o —

Osservazione Gli sviluppini sono gli sviluppi di Taylor con $n=1$.

Esercizio (non banalissimo) Giustificare lo sviluppo di Taylor di $(1+x)^\alpha$ trovando la formula per la sua derivata k-esima

—o —o —

Idea : trovare gli sviluppi di Taylor di funzioni qualunque by-passando il calcolo delle derivate successive

Esempio $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x + x^5}{x^3}$ Questo non si può fare con i limiti notevoli perché tira in ballo termini successivi dello sviluppo.

Oss. → Un limite si può fare con i limiti notevoli se e solo se usa solo il 1° termine dello sviluppo

→ Se un limite tira in ballo il 7° termine di Taylor, vuol dire che richiederebbe 7 colpi di Hôpital (nell' esempio ci vogliono 3 colpi di Hôpital).

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x + x^5}{x^3 + \boxed{\log\left(1+\arctan^7(\sin x)\right)}}$$

è come prima in quanto
$\log(1+\arctan^7(\sin x)) = o(x^3)$
(è $\sim x^7$)

[$\log(1+\arctan^7(\sin x)) \sim \log(1+\arctan^7 x)$
$\sim \log(1+x^7) \sim x^7$ quindi $o(x^3)$

quindi
$$\frac{x-\sin x + x^5}{x^3+\log(\dots)} = \frac{\cancel{x} - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + x^5}{x^3 + o(x^3)} =$$

$$= \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{6} + \overset{\to 0}{\boxed{\frac{o(x^3)}{x^3}}}\right)}{\cancel{x^3}\left(1 + \underset{\downarrow\, 0}{\boxed{\frac{o(x^3)}{x^3}}}\right)} \to \frac{1}{6}$$

Come scegliere a che valore di n fermarsi ? Esperienza ...

Cosa succede se mi fermo troppo presto:

$$\frac{x-\sin x + x^5}{x^3} \overset{\substack{n=2\\ \downarrow}}{=} \frac{\cancel{x} - \left(\cancel{x} + o(x^2)\right) + x^5}{x^3} = \frac{x^5 + o(x^2)}{x^3} = \frac{o(x^2)}{o(x^2)} = \text{BOH}$$

$$= \frac{o(x^2)}{x^3} = \underset{\downarrow\, 0}{\boxed{\frac{o(x^2)}{x^2}}} \cdot \underset{\downarrow\, \pm\infty}{\boxed{\frac{1}{x}}} \quad \text{BOH}$$

Se mi fermo troppo tardi:

$$\frac{x-\sin x + x^5}{x^3} \overset{\substack{n=5\\ \downarrow}}{=} \frac{\cancel{x} - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) + x^5}{x^3}$$

$$= \frac{\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + x^5 + o(x^5)}{x^3}$$

$$= \frac{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{6} - \overset{\nearrow 0}{\boxed{\frac{x^2}{120}}} + \overset{\nearrow 0}{\boxed{x^2}} + \overset{\nearrow 0}{\boxed{\frac{o(x^5)}{x^3x^2}}} \cdot \overset{\nearrow 0}{\boxed{x^2}}\right)}{\cancel{x^3}} \to \frac{1}{6}$$

Viene corretto, ma ho fatto tanti conti per nulla.

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 035

Titolo nota 19/10/2012

Come trovare i polinomi di Taylor di una data funzione senza calcolare tutte le derivate della funzione

Somma e differenza $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ per $x \to 0$

$g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$ per $x \to 0$

$$f(x) \pm g(x) = P_n(x) \pm Q_n(x) + o(x^n)$$

Quindi: il polinomio di Taylor della somma o differenza di 2 funzioni si ottiene sommando o sottraendo i polinomi di Taylor dei due termini.

Prodotto $f(x) \cdot g(x) = (P_n(x) + o(x^n)) \cdot (Q_n(x) + o(x^n))$

$$= P_n(x) \cdot Q_n(x) + P_n(x) \cdot o(x^n) + Q_n(x) \cdot o(x^n) + o(x^n) \cdot o(x^n)$$

Ora $o(x^n) \cdot o(x^n) = o(x^{2n}) = o(x^n)$

$$P_n(x) \cdot o(x^n) = \underbrace{\boxed{P_n(x)} \cdot x^n \cdot \boxed{\omega(x)}}_{= \omega_1(x)} = \omega_1(x) \cdot x^n$$

e $\lim\limits_{x \to 0} \omega_1(x) = \lim\limits_{x \to 0} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{termine noto}}}{\boxed{P_n(x)}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\boxed{\omega(x)}} = 0$, quindi $P_n(n) \cdot o(x^n) = o(x^n)$

Analogamente $Q_n(x) \cdot o(x^n) = o(x^n)$. Abbiamo così ottenuto

$$f(x) \cdot g(x) = P_n(x) \cdot Q_n(x) + o(x^n)$$

Quindi: il polinomio di Taylor del prodotto di 2 funzioni è il prodotto dei polinomi di Taylor dei 2 fattori

<u>Osservazione</u> Nel calcolare il prodotto $P_n(x) \cdot Q_n(x)$ ci si può limitare ai termini di grado $\leq n$, in quanto gli altri sono assorbiti da o piccolo.

Oss. Quanto detto per il prodotto $f(x)\cdot g(x)$ vale esattamente anche per potenze di $f(x)$, cioè $[f(x)]^k$ con k intero ≥ 2.

Esempi $f(x) = \sin x$ $\qquad g(x) = \cos x$ $\qquad n = 4$

$$f(x)+3g(x) = \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)+3\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)$$

$\uparrow$ Tabellina

$$= x-\frac{x^3}{6}+3-\frac{3}{2}x^2+\frac{x^4}{8}+o(x^4)$$

$$= 3+x-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$$

$$f(x)\cdot g(x) = \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)$$

$$= x-\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^4) = x-\frac{2}{3}x^3+o(x^4)$$

$\uparrow$ tutti i restanti termini hanno esponente >4, quindi finiscono in $o(x^4)$

$$\sin^2 x = \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^2 =$$

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2$
$+2ab+2ac+2bc$

$$= x^2-\boxed{\frac{x^4}{3}}+o(x^4)$$

$\leftarrow$ i restanti termini non ci sono

$\uparrow$ doppio prodotto $2\cdot x\cdot\frac{x^3}{6}$

— o — o —

Composizioni semplici $\sin(2x)$ $\qquad \sin t = t-\frac{t^3}{6}+o(t^4)$

$$\sin(2x) = 2x-\frac{(2x)^3}{6}+o\left((2x)^4\right) = 2x-\frac{8}{6}x^3+o(16x^4)$$

$\uparrow$ $t=2x$

$$= 2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^4)$$

Più in generale: se $f(x) = P_n(x)+o(x^n)$, allora
$f(\alpha x) = P_n(\alpha x)+o(x^n)$

$$\sin(\underset{\uparrow\, t=x^2}{x^2}) = x^2 - \frac{(x^2)^3}{6} + o\left((x^2)^4\right) = \boxed{x^2 - \frac{x^6}{6}} + o(x^8)$$

è il polinomio $P_8(x)$ di $\sin^2 x$

guadagno di potenza su o piccolo

Più in generale: se $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$, allora

$$f(x^k) = P_n(x^k) + o(x^{kn})$$

Dim.: $f(x) = P_n(x) + \omega(x)\cdot x^n$

Metto x^k al posto di x e ottengo

$$f(x^k) = P_n(x^k) + \underset{\omega_1(x)\to 0}{\underset{\shortparallel}{\boxed{\omega(x^k)}}}\, x^{kn} = P_n(x^k) + o(x^{kn})$$

Esempio 1 $\quad e^{x^3} \quad n = 10 \quad$ 1° modo: fare 10 derivate...

2° modo: parto da $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \boxed{o(t^3)}$ e pongo $t = x^3$

$$e^{x^3} = 1 + x^3 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{6}x^9 + \boxed{o(x^9)}$$

Esempio 2 $\quad \cos(x^5) \quad$ Parto da $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^5)$

Pongo $t = x^5$: $\cos(x^5) = 1 - \frac{1}{2}x^{10} + \frac{1}{24}x^{20} + o(x^{25})$

In realtà posso mettere $= 1 - \frac{1}{2}x^{10} + \frac{1}{24}x^{20} + o(x^{\boxed{29}})$

Infatti, se andassi avanti con lo sviluppo, il termine successivo sarebbe $-\frac{1}{6!}x^{30}$, proveniente da $-\frac{1}{6!}t^6$ nello sviluppo di $\cos t$. Quindi posso dire che sto trascurando solo le potenze dal 30 in poi, quindi $o(x^{29})$

corretto dopo video

—o—o—

Analogamente: $e^{x^3} = 1 + x^3 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{6}x^9 + o(x^{11})$

$\boxed{\text{Composizioni vere}}$ $f(x) = e^{\sin x}$ sviluppo con $n = 3$

Parto da $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \underset{\omega(t)\cdot t^3}{o(t^3)}$ e pongo $t = \sin x$. Ottengo

$$e^{\sin x} = 1 + (\sin x) + \frac{1}{2}(\sin x)^2 + \frac{1}{6}(\sin x)^3 + o((\sin x)^3)$$

Sostituisco lo sviluppo di $\sin x$

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{6}(\dots)^3 + o((\sin x)^3)$$

$$= 1 + x - \cancel{\frac{x^3}{6}} + o(x^3) + \underbrace{\frac{1}{2}(x^2) + \cancel{\frac{1}{6}x^3}}_{\text{gli altri termini sono finiti in } o(x^3)} + \underset{\searrow \text{ ci piacerebbe che fosse } o(x^3)}{\boxed{o((\sin x)^3)}}$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

Dimostrazione che $o((\sin x)^3) = o(x^3)$

Il termine $o((\sin x)^3)$ sarebbe un $(\sin x)^3 \cdot \omega(\sin x) =$

$$= x^3 \underset{\text{"}\omega_1(x)}{\boxed{\frac{(\sin x)^3}{x^3} \cdot \omega(\sin x)}}$$

$$\lim_{x \to 0} \omega_1(x) = \lim_{x \to 0} \underset{1}{\underset{\downarrow}{\boxed{\frac{(\sin x)^3}{x^3}}}} \cdot \underset{0}{\underset{\downarrow}{\boxed{\omega(\sin x)}}} = 0.$$

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 036

Titolo nota 19/10/2012

Polinomi di Taylor con centro in $x_0 \neq 0$ Sia $f(x)$ una funzione. Allora sotto opportune ipotesi si ha che esiste un unico polinomio $P_n(h)$, di grado $\leq n$, tale che

$$\boxed{f(x_0+h) = P_n(h) + o(h^n) \quad \text{per } h \to 0}$$

Inoltre vale la formula

$$\boxed{\begin{aligned} P_n(h) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k \end{aligned}}$$

Scrittura alternativa: ponendo $x_0+h = x$ (da cui $h = x-x_0$) si ottiene

$$\boxed{f(x) = P_n(x-x_0) + o((x-x_0)^n) \quad \text{per } x \to x_0}$$

Dim.: Pongo $g(h) = f(x_0+h)$ e scrivo la formula di Taylor per $g(h)$ con centro in $h=0$, quindi

$$g(h) = \underbrace{g(0) + \frac{g'(0)}{1!}h + \frac{g''(0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}h^n}_{\text{Polinomio di Taylor di } g(h) \text{ centrato in } h=0} + o(h^n) \quad \text{per } h \to 0$$

Ora $g(h) = f(x_0+h)$, $g'(h) = f'(x_0+h)$, $g''(h) = f''(x_0+h)$, ... quindi

$g(0) = f(x_0)$, $g'(0) = f'(x_0)$, $g''(0) = f''(x_0)$

quindi le derivate successive di g calcolate in $h=0$ sono uguali alle corrispondenti derivate di f in $x=x_0$, da cui la conclusione

— o — o —

Esempio 1 $f(x) = \arctan x \qquad n = 3 \qquad x_0 = 1$

Devo calcolare $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ per $x_0 = 1$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \qquad f'''(x) = -2\left[x(1+x^2)^{-2}\right]'$$

$$= -2\left\{(1+x^2)^{-2} + x(-2)(1+x^2)^{-3}\cdot 2x\right\} = -2\left\{\frac{1}{(1+x^2)^2} - \frac{4x^2}{(1+x^2)^3}\right\}$$

$$= -2\,\frac{1+x^2-4x^2}{(1+x^2)^3} = -2\,\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$$

Sostituisco $x_0 = 1$: $\qquad f(x_0) = \arctan 1 \overset{\text{precorso}}{=} \frac{\pi}{4}$

$$f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{2}, \qquad f''(x_0) = f''(1) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$f'''(x_0) = f'''(1) = -2\cdot\frac{-2}{8} = \frac{1}{2}$$

Quindi $\qquad f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + o(h^3)$

$$\boxed{\arctan(1+h) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h^2 + \frac{1}{12}h^3 + o(h^3)}$$

Esempio 2 $f(x) = \cos x \qquad x_0 = \frac{\pi}{3} \qquad n = 3 \qquad f(x_0) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$$f'(x) = -\sin x \qquad f''(x) = -\cos x \qquad f'''(x) = \sin x$$

$$f'(x_0) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f''(x_0) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad f'''(x_0) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}h - \frac{1}{4}h^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}h^3 + o(h^3)}$$

Scorciatoia per esempio 2:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right) \overset{\text{precorso}}{=} \cos\frac{\pi}{3}\cos h - \sin\frac{\pi}{3}\sin h = \frac{1}{2}\cdot\cos h - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin h \overset{\text{sviluppi da tabellina}}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}h^2 + o(h^3)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(h - \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}h^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}h + \frac{\sqrt{3}}{12}h^3 + o(h^3)$$

— o — o —

Esempio 3 $f(x) = \arctan(\sin x)$ $\quad n = 3$

Parto da $\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ e pongo $t = \sin x$

$$\arctan(\sin x) = (\sin x) - \frac{1}{3}(\sin x)^3 + \underbrace{\boxed{o((\sin x)^3)}}_{o(x^3)}$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

Oss. $f(x)$ è dispari, quindi nello sviluppo non può esserci x^4, quindi è vero pure che

$$\arctan(\sin x) = x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^4)$$

Oss. Quanto vale $f^{(2012)}(0)$?

1° modo: farla... 2° modo: Taylor. Scrivendo il polinomio di Taylor di grado $n = 2012$ (o superiore) il coeff. di x^{2012} sarebbe

$$\frac{f^{(2012)}(0)}{2012!}, \text{ cioè } \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(2012)}(0)}{2012!}x^{2012} + \dots$$

Poichè le potenze pari non ci sono (essendo la funzione dispari) il coeff. di x^{2012} deve essere 0, quindi $f^{(2012)}(0) = 0$.

(Occhio: funziona solo perchè mi serve il valore per $x_0 = 0$).

Esempio 4 $f(x) = \arctan(\cos x)$ $\quad x_0 = 0 \quad n = 3$

$\arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$, quindi

$$\arctan(\cos x) = \cos x - \frac{1}{3}(\cos x)^3 + \boxed{o((\cos x)^3)} \quad \text{per } x \to 0$$

NO

$$= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)^3 + \boxed{o(x^3)}$$

Problema: lo sviluppo in t, cioè $\arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$ vale per $t \to 0$. Se io pongo $t = \sin x$ è un cambio lecito in quanto $t \to 0$ quando $x \to 0$. Se invece pongo $t = \cos x$ ho che per $x \to 0$ si ha che $t \to 1$.

Se $t - \frac{1}{3}t^3$ è una buona approx di $\arctan t$ quando $t \sim 0$, non lo è quando $t = \cos x \sim 1$.

Achtung! Nelle composizioni OCCHIO a dove tende l'argomento !!!

Rimedio: per calcolare lo sviluppo di $\arctan(\cos x)$ bisogna partire dallo sviluppo di $\arctan x$ in $x_0 = 1$.

$$\arctan(1+h) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h^2 + \frac{1}{12}h^3 + o(h^3) \quad \text{per } h \to 0$$

$$\arctan(\cos x) = \arctan\Big(1 \overset{h\to 0}{\boxed{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}}\Big)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) \underbrace{- \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{12}(\ldots)^3}_{\text{NON SOPRAVVIVE NESSUN TERMINE}} + \underbrace{o((\ldots)^3)}_{o(x^6) = o(x^3)}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}x^2 + o(x^3)$$

—o—o—

Allo stesso modo $e^{\sinh x}$ (Posso usare $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \ldots$)

$e^{\cosh x}$ (Non posso perché $\cosh x \to 1$ per $x \to 0$, quindi devo usare sviluppo di e^x con $x_0 = 1$)

$$e^{1+h} = e \cdot e^h = e \cdot \left(1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + \ldots\right) \quad \text{per } h \to 0$$

[Esercizio: calcolare lo sviluppo di $e^{\cosh x}$ con $n = 4$]

—o—o—

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 037

Titolo nota 19/10/2012

Esempio 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot \log(1+x^2) - \sin x^2 \cdot \log(1+x)}{x \arctan x^3}.$$

Taylor con $n=4$

$\arctan x^3 = x^3 + o(x^3)$ (sviluppino)

$x \arctan x^3 = x^4 + o(x^4)$

$\sin(x^2) = x^2 + o(x^4)$ $\qquad \sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + \dots$

↑ il termine successivo sarebbe x^6

$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ ← da tabellina

$$\sin(x^2) \cdot \log(1+x) = (x^2 + o(x^4)) \cdot \left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) = x^3 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

$\sin x = x + o(x^2)$ $\qquad$ Taylor con $n=2$

$\log(1+x^2) = x^2 + o(x^3)$ $\qquad \log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \dots$

↑ termine succ è con x^4

$$\sin x \cdot \log(1+x^2) = (x + o(x^2)) \cdot (x^2 + o(x^3)) = x^3 + o(x^4)$$

Numeratore: $\cancel{x^3} + o(x^4) - \left(\cancel{x^3} - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\right) = \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$

$$\text{Frazione} = \frac{\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{\cancel{x^4}\left(\frac{1}{2} + \frac{o(x^4)}{x^4}\right)}{\cancel{x^4}\left(1 + \frac{o(x^4)}{x^4}\right)} \to \frac{1}{2}.$$

Esempio 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^4} - \cosh x^2}{\sinh x^4 - x^4 \cosh x^2}.$$

Sviluppo tutto al termine successivo a x^4

$$\sinh(x^4) = x^4 + \frac{1}{6}x^{12} + \underbrace{o(x^{16})}_{\text{se serve posso mettere } o(x^{19})} \qquad \sinh t = t + \frac{1}{6}t^3 + o(t^4)$$

↓ succ. sarebbe x^{20} $\qquad$ ↑ succ. sarebbe t^5

$\cosh(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^4 + \underset{\uparrow}{o}(x^6)$ $\qquad \cosh t = 1 + \frac{1}{2}t^2 + o(t^3)$

se serve anche $o(x^7)$

Quindi $x^4 \cdot \cosh(x^2) = x^4 + \frac{1}{2}x^8 + o(x^{10})$

Denominatore $= \sinh(x^4) - x^4\cosh(x^2) = \cancel{x^4} - \cancel{x^4} - \frac{1}{2}x^8 + o(x^{10})$

$$= -\frac{1}{2}x^8 + \underbrace{o(x^8)}$$

potrei mettere $o(x^{10})$ o anche $o(x^{11})$, ma è inutile

Sviluppo il numeratore con $n = 8$

$\cosh(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{24}x^8 + \underbrace{o(x^8)}$ $\qquad \cosh t = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)$

potrei mettere x^{11}

$\sqrt{1+t} = (1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2)$ $\qquad (1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + o(t^2)$

$\uparrow$ $\alpha = \frac{1}{2}$

Quindi $\sqrt{1+x^4} = 1 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^8 + o(x^8)$

Numeratore $= \sqrt{1+x^4} - \cosh(x^2) = \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}x^4} - \frac{1}{8}x^8 - \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2}x^4} - \frac{1}{24}x^8 + o(x^8)$

$$= -\frac{1}{6}x^8 + o(x^8)$$

$$\text{Frazione} = \frac{-\frac{1}{6}x^8 + o(x^8)}{-\frac{1}{2}x^8 + o(x^8)} = \frac{\cancel{x^8}\left(-\frac{1}{6} + \overset{\to 0}{\boxed{\frac{o(x^8)}{x^8}}}\right)}{\cancel{x^8}\left(-\frac{1}{2} + \underset{\to 0}{\boxed{\frac{o(x^8)}{x^8}}}\right)} \to \frac{1}{3}.$$

—o—o—

Esempio 3

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x + x^3) - \sin(x - x^3)}{x\cosh(x + x^2) - \sinh x}.$$

Sviluppiamo: $\sinh x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$

$\cosh(x+x^2) = 1+\frac{1}{2}(x+x^2)^2 + o((x+x^2)^3)$ $\cosh t = 1+\frac{1}{2}t^2+o(t^3)$

$= 1+\frac{1}{2}(x^2+2x^3+x^4)+o(x^3)$ in quanto $(x+x^2)^3 \sim x^3$

$= 1+\frac{1}{2}x^2+x^3+o(x^3)$

Denominatore $= x\cosh(x+x^2) - \sinh x = \cancel{x}+\frac{1}{2}x^3+x^4+o(x^4)-\cancel{x}-\frac{1}{6}x^3$

$= \frac{1}{3}x^3 + \underbrace{o(x^3)}$

↑ tanto c'è già x^3, quindi inutile tenere termini con x^4

Devo sviluppare arctan $(x+x^3)$ con $n=3$

arctan $t \sim t$ arctan $(x+x^3) \sim x+x^3$ e questo è lo sviluppo con $n=3$

arctan $(x+x^3) = x+x^3+o(x^3)$

NO!!!!!

Scriviamo correttamente con o piccolo

arctan $t = t+\underbrace{o(t)}$ arctan $(x+x^3) = x+x^3+\boxed{o(x+x^3)}$

↑volendo $o(t^2)$ $o(x)$

$= x+x^3+o(x) = x+o(x)$

non è Taylor con $n=3$.

Corretto: parto da

arctan $t = t-\frac{1}{3}t^3+o(t^3)$ pongo $t=x+x^3$ e ho

arctan $(x+x^3) = (x+x^3)-\frac{1}{3}(x+x^3)^3+o((x+x^3)^3)$

$= x+x^3-\frac{1}{3}x^3+o(x^3) = x+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)$

Analogamente $\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)$

$$\sin(x-x^3) = (x-x^3) - \frac{1}{6}(x-x^3)^3 + o((x-x^3)^3)$$

$$= x - x^3 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = x - \frac{7}{6}x^3 + o(x^3)$$

Numeratore $= \arctan(x+x^3) - \sin(x-x^3) =$

$$= \cancel{x} + \frac{2}{3}x^3 - \cancel{x} + \frac{7}{6}x^3 + o(x^3) = \frac{11}{6}x^3 + o(x^3)$$

In conclusione

$$\text{Frazione} = \frac{\frac{11}{6}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)} = \frac{\cancel{x^3}\left(\frac{11}{6} + \overset{0}{\boxed{\frac{o(x^3)}{x^3}}}\right)}{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{3} + \underset{0}{\boxed{\frac{o(x^3)}{x^3}}}\right)} \to \frac{11}{2}.$$

—o —o —

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 038

Titolo nota 20/10/2012

SERIE NUMERICHE Data una successione a_n, si indica con

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ la somma degli infiniti termini della successione.

Cosa vuol dire sommare infiniti numeri?
Si definiscono somme parziali gli elementi della successione

$$S_0 = a_0, \quad S_1 = a_0 + a_1, \quad S_2 = a_0 + a_1 + a_2, \quad S_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \dots$$

$$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = \boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k}$$ Sommatoria (non serie): somma di un numero FINITO di numeri

Si definisce la serie $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n}$ Serie, cioè somma di un numero INFINITO di addendi (numeri) come il limite della successione S_n

Procedimento: data a_n, si costruisce S_n, ed il limite di S_n è la serie.

Essendo un limite, una serie ha 4 possibili comportamenti
→ converge ad un certo $\ell \in \mathbb{R}$ se $S_n \to \ell$
→ diverge a $+\infty$ se $S_n \to +\infty$
→ " " $-\infty$ " $S_n \to -\infty$
→ è indeterminata se S_n non ha limite.

Esempio banale 1 $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} 0$
Si verifica facilmente (ufficialmente per induzione) che $S_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$
Quindi $S_n \to 0$, quindi $\sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$.

Esempio banale 2 $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora (facile induzione) che
$S_n = \boxed{n+1}$, quindi $S_n \to +\infty$, quindi $\sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$ (la serie diverge a $+\infty$)
c'è anche a_0

Esempio banale 3 $a_n = (-1)^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si verifica che

$S_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$. Quindi $S_{2n} \to 1$, $S_{2n+1} \to 0$, quindi S_n non ha limite dunque

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{ è INDETERMINATA}$$

—o —o —

SERIE TELESCOPICHE

Esempio 1 $a_n = \frac{1}{n^2+n}$ per $n \geq 1$ considero solo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Come sono fatte le somme parziali S_n? $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Allora: $S_1 = a_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$; $S_2 = a_1 + a_2 = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}, \dots$

L'idea è che venga $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

Dim per induzione. Passo base $n=1$ fatto sopra

Passo induttivo: Ipotesi $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ Tesi: $S_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+2}$

Dim. passo induttivo: $\boxed{S_{n+1}} = \underset{\boxed{a_1+a_2+\dots+a_n}+\boxed{a_{n+1}}}{S_n + a_{n+1}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso Hp}}}{=} 1 - \cancel{\frac{1}{n+1}} + \cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2}$

$= 1 - \frac{1}{n+2}$

Uguagliando 1° e ultimo ho la tesi

Ora $S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$, quindi la serie converge a 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1$$

—o —o —

Esempio 2 $\displaystyle\sum_{n\geq1}^{\infty} \underbrace{\boxed{\log\left(1+\frac{2}{n}\right)}}_{a_n}$

Per costruire le somme parziali osservo che $a_n = \log\left(1+\frac{2}{n}\right) = \log\frac{n+2}{n}$

$= \log(n+2) - \log n$

Quindi $S_1 = a_1 = \log 3 - \log 1$

$S_2 = a_1 + a_2 = \log 3 - \log 1 + \log 4 - \log 2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \cancel{\log 3} - \log 1 + \log 4 - \log 2 + \log 5 - \cancel{\log 3}$

$S_4 = \ldots = \cancel{\log 3} - \log 1 + \cancel{\log 4} - \log 2 + \log 5 - \cancel{\log 3} + \log 6 - \cancel{\log 4}$

L'idea è che sia $S_n = -\log 1 - \log 2 + \log(n+1) + \log(n+2)$

(la formula è stata dedotta dagli esperimenti fino ad $n=4$; ora andrebbe dimostrata per induzione: esercizio!)

Data per buona la formula abbiamo che $S_n \to +\infty$, quindi

$$\sum_{n\geq1}^{\infty} \log\left(1+\frac{2}{n}\right) = +\infty$$

(la serie diverge a $+\infty$)

— o — o —

SERIE GEOMETRICHE Una serie geometrica è una serie del tipo

$$\sum_{n\geq0}^{\infty} a^n$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro $(= 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots)$

In questo caso si ha che $S_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$

Formula dimostrata a suo tempo per induzione $(a \neq 1)$

Facciamo il limite di S_n per $n \to +\infty$. Distinguiamo vari casi

Caso $a > 1$ $\quad S_n = \dfrac{\overset{\nearrow +\infty}{\boxed{a^{n+1}}} - 1}{\underbrace{\boxed{a-1}}_{>0}} \to +\infty$, quindi la serie diverge

Caso $-1 < a < 1$ In questo caso $a^{n+1} \to 0$, quindi

$$S_n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \to \frac{-1}{a-1} = \frac{1}{1-a}$$

dunque la serie converge a questo valore

$\boxed{\text{Caso } a=-1}$ È l'esempio banale 3, in cui la serie non converge

$\boxed{\text{Caso } a<-1}$ In questo caso a^{n+1} "tende a $+\infty$ per n dispari (che fa diventare n+1 pari) e tende a $-\infty$ per n pari".

Detto meglio

$$S_{2n} = \frac{\overset{-\infty}{\boxed{a^{2n+1}}}-1}{\underset{<0}{\boxed{a-1}}} \to +\infty \qquad S_{2n+1} = \frac{\overset{+\infty}{\boxed{a^{2n+2}}}-1}{\underset{<0}{\boxed{a-1}}} \to -\infty$$

Quindi S_n non ha limite, dunque la serie è indeterminata.

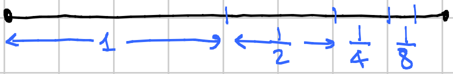
$\boxed{\text{Caso } a=1}$ La formula per le somme parziali non vale in questo caso, tuttavia $S_n = n+1$ (siamo nell'esempio banale 2), quindi $S_n \to +\infty$, dunque la serie diverge.

Riassumendo

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1+a+a^2+\dots = \begin{cases} \text{diverge a } +\infty & \text{se } a\geq 1 \\ \text{converge a } \frac{1}{1-a} & \text{se } a\in(-1,1) \\ \text{è indeterminata} & \text{se } a\leq -1 \end{cases}}$$

— o — o —

<u>Interpretazione "filosofica"</u> Freccia di Zenone



Somma di tutti i tempi di percorrenza $= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \text{geometrica con } a=\frac{1}{2}$$

$$= \text{converge a } \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 039

Titolo nota 20/10/2012

Le serie telescopiche e geometriche sono sostanzialmente gli unici casi in cui si riesce a scrivere una formula esplicita per S_n.

Problema: capire il comportamento di una serie (converge / diverge / indeterm.) senza avere una formula esplicita per S_n.

Oss. Per le serie convergenti, è quasi sempre impossibile trovare esplicitamente il valore a cui convergono.
Esistono metodi per trovare in modo approssimato il valore della somma (con una precisione arbitraria) PUR DI SAPER GIÀ che la serie converge.

—o—o—

Strumenti per studiare le serie

- → Teoremi algebrici
- → Condizione necessaria
- → Tabellina di serie di cui è noto il comportamento
- → Criteri di convergenza. Ci sono due casi

Serie a termini di segno costante ($a_n \geq 0$)	Serie a termini di segno variabile
→ criterio della RADICE	→ Criterio di LEIBNITZ
→ criterio del RAPPORTO	→ Criterio dell'ASSOLUTA CONVERGENZA
→ criterio del CONFRONTO	

→ criterio del CONFRONTO ASINTOTICO ↗ casi STANDARD ↘ casi LIMITE

—o—o—

Teoremi algebrici

① Sia a_n una successione, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda \neq 0$. Allora

$$\sum_{n\geq 0}^{\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n$$

(con ovvio significato in $\overline{\mathbb{R}}$)

[<u>Dim.</u> $\lambda a_0 + \lambda a_1 + \dots + \lambda a_n = \lambda (a_0 + a_1 + \dots + a_n)$]

② Siano a_n e b_n due successioni. Allora

$$\sum_{n\geq 0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n + \sum_{n\geq 0}^{\infty} b_n$$

(con tutte le limitazioni della somma in $\overline{\mathbb{R}}$, cioè NON VALE in caso di $+\infty - \infty$)

[<u>Dim.</u> Pongo $c_n = a_n + b_n$. Indichiamo

$$S_n^a = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

$$S_n^b = b_0 + b_1 + \dots + b_n$$

$$S_n^c = c_0 + c_1 + \dots + c_n = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n) \underset{\uparrow}{\textcircled{=}} S_n^a + S_n^b$$

proprietà commutativa su somme finite

Quindi $\lim_{n\to\infty} S_n^c = \lim_{n\to+\infty} S_n^a + \lim_{n\to+\infty} S_n^b$ perché valga il teo per la somma dei limiti]

<u>Achtung!</u> Non è vero che $\boxed{\sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n\geq 0}^{\infty} b_n}$ NO!!!

[$(a_0 + a_1 + a_2 + \dots) \cdot (b_0 + b_1 + b_2 + \dots)$ = non vengono solo termini $a_k b_k$, ma anche "termini misti"]

—o —o —

$\boxed{\text{CONDIZIONE NECESSARIA}}$ Se $\sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n$ converge, allora $a_n \to 0$.

<u>Utilizzo operativo</u>: se a_n NON TENDE a 0 (cioè tende ad altro, compresi $\pm\infty$, oppure non ha limite), allora di sicuro la serie NON CONVERGE (dunque le restano aperte 3 possibilità: divergere a $\pm\infty$, essere indet.)

Dim condizione necessaria Partiamo da $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, oppure in maniera equivalente $S_n = S_{n-1} + a_n$, cioè

$$a_n = \underset{\ell}{\underset{\downarrow}{\boxed{S_n}}} - \underset{\ell}{\underset{\downarrow}{\boxed{S_{n-1}}}} \to 0$$

Questo si può fare solo se $\sum a_n$ converge, cioè se $S_n \to \ell \in \mathbb{R}$ (in questo caso anche $S_{n-1} \to \ell$, perché è sostanzialmente la stessa successione).

—o—o—

Achtung! Se $a_n \to 0$, allora posso solo dire che la serie POTREBBE convergere, ma non è obbligata a farlo.

—o—o—

SERIE NOTE ① Serie geometriche (già viste)

② Serie ARMONICHE GENERALIZZATE (l'armonica classica è con $a = 1$)

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} \nearrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \le 1 \\ \searrow \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}}$$

Dim. più avanti con gli integrali

③ Parente dell'armonica generalizzata

$$\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n} = \begin{cases} \nearrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \le 1 \\ \searrow \text{converge} & \text{se } a > 1 \end{cases}}$$

Dim. con gli integrali

Oss.1 La serie armonica generalizzata ha $a_n = \frac{1}{n^a}$. Ora $a_n \to 0$ se $a > 0$, dunque la cond. nec. è verificata $\forall a > 0$, mentre si ha convergenza solo per $a > 1$. Riassumendo

- per $a \le 0$ la cond. nec. non è verificata e la serie DIVERGE
- per $0 < a \le 1$ la cond. nec. è verificata, MA la serie diverge
- per $a > 1$ la cond. nec. è verificata e la serie converge

—o—o—

Serie a termini di segno costante = serie con termini $a_n \geq 0$, altrimenti "basta portare il segno − fuori dalla serie"

Fatto decisivo Se $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora S_n è debolmente crescente $(S_{n+1} = S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq S_n)$, dunque ci sono due possibilità:

- $S_n \to l \in \mathbb{R}$, cioè la serie converge
- $S_n \to +\infty$, cioè la serie diverge a $+\infty$.

CRITERIO DELLA RADICE Sia $a_n \geq 0$ (definitivamente). Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} \to l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Allora

- se $l > 1$, la serie diverge (e non verifica nemmeno la cond. nec.)
- se $l < 1$, la serie converge
- se $l = 1$, allora BOH.

CRITERIO DEL RAPPORTO Stessa cosa con $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l \in \overline{\mathbb{R}}$

CRITERIO DEL CONFRONTO Supponiamo che $a_n \geq b_n \geq 0$ definitiv.
Allora valgono queste due implicazioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \implies \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ converge}$$

Achtung! Ogni altra implicazione è ABUSIVA.

Oss. 2 Se ad una serie si cambiano un numero finito di termini, non cambia il tipo di comportamento (al più cambia il valore della somma nel caso di serie convergenti). Quindi a_n conta per quello che è definitivamente.

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 040

Titolo nota 20/10/2012

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO Supponiamo che $a_n \geq 0$ definitivamente $b_n > 0$ definitivamente.

Supponiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \begin{smallmatrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{smallmatrix} \quad \text{(casi standard)}$$

Allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso comportamento, cioè una converge se e solo se converge l'altra (ma il valore a cui convergono potrebbe essere diverso)

Utilizzo operativo Devo studiare $\sum a_n$. Cerco in tabellina una $\sum b_n$ in maniera tale che $\frac{a_n}{b_n} \to \ell \neq 0 \neq +\infty$. Se la trovo, allora la serie iniziale si comporta come $\sum b_n$.

Esempio 1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underset{\text{"}a_n}{\boxed{\frac{n^2+2n+3}{n^2+7}}}$ Non si trova una formula per le somme parziali.

Intanto $a_n \geq 0$ sempre, quindi o converge o diverge a $+\infty$

Ora $a_n \to 1$ (banale limite), quindi manca la condizione necessaria, quindi di sicuro non converge. Resta come unica possibilità che DIVERGA a $+\infty$.

Esempio 2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{n^2+6}{2^n}}$ $a_n \geq 0$ sempre e $a_n \to 0$, quindi POTREBBE convergere.

Criterio della radice : $\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{\boxed{\sqrt[n]{n^2+6}} \to 1 \text{ (radice } n\text{-esima di polinomio)}}{2} \to \dfrac{1}{2}$

$\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ la serie converge.

Criterio del rapporto : $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)^2+6}{2^{\cancel{n}+1}} \cdot \dfrac{\cancel{2^n}}{n^2+6} = \dfrac{1}{2} \underset{\downarrow \atop 1}{\boxed{\dfrac{n^2+2n+7}{n^2+6}}} \to \dfrac{1}{2}$

$\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ come sopra

Esempio 3 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{n^2+3n+5}{7n^3+4}}$ "a_n"

$a_n \geq 0$ sempre

$a_n \to 0$, quindi POTREBBE convergere

Radice e rapporto non funzionano (viene $\ell = 1$)

Brutale: $a_n \sim \frac{n^2}{7n^3} = \frac{1}{7n} = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{n}$. Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum \frac{1}{n}$ la quale diverge in quanto armonica gen. con $a=1$

Rigoroso: faccio il confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\cdots}{\cdots}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n+5}{7n^3+4}\cdot n = \frac{1}{7} \begin{array}{l}\neq 0\\ \neq +\infty\end{array}$$

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$, cioè diverge.

Esempio 4 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{20}+3}{n^{22}+5n+7}$ $a_n \geq 0$ e $a_n \to 0$ quindi può convergere

Brutale: $a_n \sim \frac{n^{20}}{n^{22}} = \frac{1}{n^2}$ $\Rightarrow$ armonica con $a=2$ $\Rightarrow$ converge

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{20}+3}{n^{22}+5n+7}\cdot n^2 = 1 \begin{array}{l}\neq 0\\ \neq +\infty\end{array}$$

La serie data si comporta come $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$, cioè converge.

Esempio 5 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{3^n}{n!}}$ "a_n"

$a_n \geq 0$ e $a_n \to 0$ (fattoriale vs esponenziale)

Criterio del rapporto: $\displaystyle\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{3^n}$

$$= \frac{\cancel{3^n}\cdot 3}{(n+1)\cdot\cancel{n!}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{\cancel{3^n}} = \frac{3}{n+1} \to 0 < 1$$

Quindi la serie data converge

Esempio 6 $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^n+5^n}{3^n+6^n}$ $\qquad a_n \geq 0$

Brutale: $a_n \sim \frac{5^n}{6^n} = \left(\frac{5}{6}\right)^n$ e $\sum \left(\frac{5}{6}\right)^n$ è una serie geometrica con $a \in (-1,1) \Rightarrow$ converge

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{5^n}{6^n}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^n+5^n}{3^n+6^n}\cdot\frac{6^n}{5^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{5^n}\left(\overset{\overset{0}{\uparrow}}{\boxed{\left(\frac{2}{5}\right)^n}}+1\right)}{\cancel{6^n}\left(\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\boxed{\left(\frac{3}{6}\right)^n}}+1\right)}\cdot\frac{\cancel{6^n}}{\cancel{5^n}} = 1 \overset{\neq 0}{\neq +\infty}$$

Quindi la serie data si comporta come $\sum b_n$, cioè converge.

Esempio 7 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underset{= a_n}{\boxed{\sin\left(\frac{n+3}{n^2+5}\right)}}$

Problema segno non c'è. Infatti $\frac{n+3}{n^2+5} \to 0^+$, quindi $0 < \frac{n+3}{n^2+5} < \pi$ definitivamente, quindi $a_n = \sin(\dots) > 0$ definitivamente.

Brutale: $a_n \sim \sin\left(\frac{n}{n^2}\right) = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sviluppino}}}{\sim} \frac{1}{n} \Rightarrow$ si comporta come $\sum \frac{1}{n}$, cioè diverge.

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin\left(\frac{n+3}{n^2+5}\right)}{\frac{1}{n}} = \underset{\downarrow 1}{\boxed{\frac{\sin\left(\frac{n+3}{n^2+5}\right)}{\frac{n+3}{n^2+5}}}} \cdot \underset{\downarrow 1}{\boxed{\frac{n+3}{n^2+5}\cdot n}} = 1 \overset{\neq 0}{\neq +\infty}$$

quindi...

Esempio 8 $\displaystyle\sum_{n\geq 1}^{\infty} \boxed{\left(\sin\frac{1}{n} - \arctan\frac{1}{n}\right)} = a_n$ $\qquad a_n \to 0$

Brutale: $a_n = \sin\frac{1}{n} - \arctan\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$ ← Troppo brutale !!!

$$a_n \sim \underbrace{\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{6n^3}}_{\sin x \sim x - \frac{x^3}{6}} - \underbrace{\cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{3}\frac{1}{n^3}}_{\arctan x \sim x - \frac{x^3}{3}} = \frac{1}{6n^3} \Rightarrow \text{converge}$$

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{1}{n^3}$. Si ritrova il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sin \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} \underset{\substack{\uparrow \\ x = \frac{1}{n}}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x^3} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylor}}}{=} \frac{1}{6}$$

$\frac{1}{6} \neq 0 \neq +\infty$, quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum \frac{1}{n^3}$, cioè converge.

—o—o—

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 041

Titolo nota 24/10/2012

Criteri per serie a termini di segno variabile

ASSOLUTA CONVERGENZA Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Utilizzo operativo Devo studiare $\sum a_n$ con i termini a_n a segno variabile. Provo a studiare $\sum |a_n|$. Questa è una nuova serie a termini ≥ 0, alla quale posso applicare tutti i criteri relativi. Ci sono 2 possibilità

- $\sum |a_n|$ converge. Allora per il criterio anche $\sum a_n$ converge.
- $\sum |a_n| = +\infty$. Allora purtroppo BOH, cioè restano aperte 4 possibilità.

Nomenclatura Si dice che $\sum a_n$ converge assolutamente se $\sum |a_n|$ converge.

$\boxed{\text{Assoluta convergenza} \Rightarrow \text{convergenza}}$ ma non viceversa.

CRITERIO DI LEIBNITZ (Criterio per serie a segno alterno)

Consideriamo la

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{(-1)^n \alpha_n}}_{\text{"} a_n}$$

Supponiamo che

(i) $\alpha_n \geq 0$ definitivamente (la serie è a segni alterni)

(ii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ definitivamente (α_n è debolmente decrescente)

(iii) $\alpha_n \to 0$ (α_n è infinitesima)

Allora la serie converge.

Achtung! Se le 3 ipotesi sono verificate, allora la serie converge.
Se almeno una delle ipotesi non è verificata, allora BOH (restano aperte 4 possibilità)

Oss. È facile osservare che $a_n \to 0$ se e solo se $\alpha_n \to 0$ (convincersene). Quindi l'ipotesi (iii) è in realtà la condizione necessaria. Quindi se l'ipotesi che fallisca è la (iii), allora manca la cond. necessaria, quindi la serie non può convergere, dunque restano aperte solo 3 possibilità.

Oss. Cosa vuol dire che l'ipotesi (iii) non è verificata? Vuol dire che $\alpha_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$ con $l \neq 0$, oppure che α_n non ha limite.

* * *

Esempio 1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underset{= \alpha_n}{\boxed{\frac{1}{n}}}$ Provo ad applicare Leibnitz con $\alpha_n = \frac{1}{n}$.

(i) $\alpha_n \geq 0$ defin. : banale

(ii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ defin., cioè $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ defin. Verifica da percorso: posso moltiplicare in quanto è roba >0 e ottengo $n \leq n+1$ che è banalmente vera.

(iii) $\alpha_n \to 0$: banale perché $\frac{1}{n} \to 0$.

Quindi la serie converge per Leibnitz.

Potevo applicare l'assoluta convergenza? NO! Avrei dovuto studiare

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \overset{\text{armonica con esponente 1}}{=} +\infty \implies \text{BOH}.$$

Conclusione: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ converge, ma non converge assolutamente.

Esempio 2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underset{= \alpha_n}{\boxed{\frac{1}{n^2}}}$

Faccio le verifiche: (i) $\alpha_n \geq 0$ definit. : banale

(ii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ definit. : $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$ $\implies$ come prima

(iii) $\alpha_n \to 0$: banale.

Quindi la serie converge per Leibnitz.

La serie converge assolutamente? Proviamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n^2} \right| = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ e questa converge (esponente $2>1$)

Conclusione: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ converge e converge assolutamente (quindi potevo dimostrare la convergenza SENZA usare Leibnitz, ma usando il criterio dell'assoluta convergenza.

<u>Esempio 3</u> $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\boxed{\frac{1}{n^a}}}_{\text{"}a_n\text{"}}$ dove a è un parametro $a>0$

Verifiche Leibnitz: (i) $a_n \geq 0$ banale $\forall n \geq 1$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ cioè $\frac{1}{(n+1)^a} \leq \frac{1}{n^a}$ vero $\forall n \geq 1$ $\forall a > 0$ per il solito motivo (denom. + grande, frazione + piccola, valido se è tutto >0)

(iii) $a_n \to 0$: vero per ogni $a>0$.

Quindi per Leibnitz la serie converge per ogni $a>0$.
La convergenza assoluta c'è solo per $a>1$.
Riassumendo: la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^a}$$

- converge e converge assolutamente per $a>1$,
- converge ma non converge assolutamente per $0<a\leq 1$,
- non converge per $a\leq 0$ (in questo caso manca l'ipotesi (iii), quindi manca la condizione necessaria).

— o — o —

Punto debole di Leibnitz: verifica ipotesi (ii)

<u>Esempio 4</u> $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\boxed{\frac{n^2+2}{n^3+3}}}_{\text{"}a_n\text{"}}$

(i) $a_n \geq 0$: banale per ogni $n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to 0$: banale

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$, cioè $\frac{(n+1)^2+2}{(n+1)^3+3} \leq \frac{n^2+2}{n^3+3}$ se moltiplico il grado diventa alto.

Brutale : $a_n \sim \frac{1}{n}$, quindi sembra $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$, ma non c'è un criterio che giustifica questo modo di procedere (il confronto asintotico vale solo fra serie a termini ≥ 0)

Rimedio rigoroso: aggiungere e toglie $\frac{1}{n}$. Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n^2+2}{n^3+3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n^2+2}{n^3+3} - \frac{1}{n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

$\boxed{\text{SE}}$ le due serie a dx convergono, allora la serie a sx, che è la loro somma, converge pure lei (teo. algebrico).

La seconda serie a dx converge per Leibnitz.

La prima si può scrivere come

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n^2+2}{n^3+3} - \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cancel{n^3}+2n-\cancel{n^3}-3}{n(n^3+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-3}{n^4+3n}$$

Se per questa provo ad usare Leibnitz, sono da capo con la disuguaglianza.

Se invece uso l'assoluta convergenza devo studiare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{2n-3}{n^4+3n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim \frac{1}{n^3}}{\boxed{\frac{2n-3}{n^4+3n}}} \boxed{< +\infty}$$

sinonimo di "converge"

(la convergenza segue da un confronto asintotico con $\sum \frac{1}{n^3}$)

Quindi la prima serie converge assolutamente.

Conclusione:

→ la serie di partenza è somma di 2 serie convergenti, quindi converge a sua volta

→ la serie di partenza NON è assolutamente convergente, in quanto $|a_n| \sim \frac{1}{n}$.

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 042

Titolo nota 24/10/2012

$\boxed{\text{Dim. criterio confronto}}$ Per ipotesi $0 \le b_n \le a_n$ definitivamente.

Pur di cambiare un numero finito di termini, posso supporre che sia $0 \le b_n \le a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. L'importante è che cambiare un numero finito di termini non cambia il comportamento delle serie.

$S_n^a = a_0 + a_1 + \dots + a_n \qquad S_n^b = b_0 + b_1 + \dots + b_n$

Dall'ipotesi segue che (formalmente si dim. per induzione)

$$S_n^a \ge S_n^b \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ci sono 2 casi

- Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$, allora vuol dire che $S_n^b \to +\infty$, ma allora $S_n^a \to +\infty$ (per il confronto tra limiti), ma allora $\sum a_n < +\infty$ (cioè converge)
- Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora vuol dire che $S_n^a \to \ell \in \mathbb{R}$, ma allora S_n^b non può tendere a $+\infty$, quindi (avendo per forza un limite in quanto debolmente crescente) dovrà per forza tendere ad un numero reale $\ell_1 \le \ell$, quindi $\sum b_n$ converge.

—o —o —

Achtung! Siano A_n e B_n 2 successioni tali che $A_n \le B_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Se $A_n \to +\infty$, per forza anche $B_n \to +\infty$
- Se $B_n \to \ell \in \mathbb{R}$, allora restano aperte 3 possibilità per A_n:
  - → tendere a $-\infty$
  - → tendere ad un numero $\ell_1 \le \ell$
  - → non avere limite.

Achtung 2! Siano A_n e B_n 2 successioni tali che $A_n \overset{\text{stretto.}}{<} B_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Supponiamo che $A_n \to \ell_1 \in \mathbb{R}$ e che $B_n \to \ell_2 \in \mathbb{R}$.

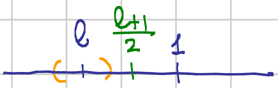
Allora $\boxed{\ell_1 < \ell_2}$ NO!!! Posso solo dire che $\ell_1 \le \ell_2$

$\boxed{\text{LE DISUGUAGLIANZE STRETTE NON PASSANO AL LIMITE}}$

Esempio $\overset{A_n}{\boxed{\frac{1}{n}}} < \overset{B_n}{\boxed{\frac{5}{n}}}$ eppure $A_n \to 0$, $B_n \to 0$

$\boxed{\text{Dim. criterio della radice}}$ Ci sono due casi

- $\boxed{\sqrt[n]{a_n} \to \ell > 1}$ Applicando il criterio della radice per i limiti sappiamo che $a_n \to +\infty$, ma allora non c'è la cond. nec., quindi la serie non può convergere, dunque (essendo a termini ≥ 0) non le resta che divergere
- $\boxed{\sqrt[n]{a_n} \to \ell < 1}$ Ragionando come sopra otteniamo che $a_n \to 0$, quindi c'è la cond. necessaria, quindi la serie POTREBBE convergere. Così non ho dimostrato nulla ☹



Nuova partenza:
se $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$, allora definitivamente

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\ell+1}{2}$$

da cui

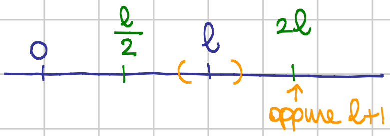
$$a_n \leq \underbrace{\boxed{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n}}_{= b_n} \quad \text{definitivamente}$$

Ora $\sum b_n$ converge in quanto serie geometrica con parametro $\in (-1,1)$, quindi anche $\sum a_n$ converge per il criterio del confronto. ☺

—o —o —

$\boxed{\text{Dim. confronto asintotico}}$ Ipotesi: $a_n \geq 0$, $b_n > 0$, $\frac{a_n}{b_n} \to \ell \neq 0 \neq +\infty$

Per definizione di limite abbiamo che



$$\frac{\ell}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2\ell$$

Moltiplico per b_n (che è >0) e ottengo che $\boxed{\frac{\ell}{2} b_n \leq a_n \leq 2\ell b_n \text{ definitivamente}}$

- Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, allora anche $\sum_{n=1}^{\infty} 2\ell b_n$ converge (teo. algebrico), dunque (grazie al confronto e alla disug. dx) anche $\sum a_n$ converge
- Se $\sum b_n = +\infty$, allora $\sum \frac{\ell}{2} b_n = +\infty$, $\boxed{\text{quindi}}$ $\sum a_n = +\infty$
  ↑confronto + disug. sx

—o —o —

$\boxed{\text{Confronto asintotico – Casi limite}}$ Supponiamo $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$.

- Se $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$ [allora definitiv. $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$, quindi $a_n \geq b_n$, quindi]

$$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$$

$$\sum b_n < +\infty \Rightarrow \text{BOH}$$

- Se $\frac{a_n}{b_n} \to 0$ [allora definitiv. $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$, quindi $a_n \leq b_n$ defin., quindi]

$$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \text{BOH}$$

$$\sum b_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$

— o — o —

Esempio $\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{\cos(n!)}{n^2}} = a_n$ $\underset{\text{"}a_n\text{"}}{\boxed{\frac{\cos(n!)}{n^2}}} \leq \underset{\text{"}b_n\text{"}}{\boxed{\frac{1}{n^2}}}$

$\boxed{\sum b_n \text{ converge (armonica con esponente } 2>1) \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}}$

NO bbbb

Il criterio del confronto vale SOLO tra serie a termini ≥ 0, e non abbiamo garanzie che $a_n \geq 0$ almeno definitivamente.

Provo con l'assoluta convergenza (Leibniz non potrebbe funzionare)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(n!)}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n!)|}{n^2}$$

Ora ho che $0 \leq \frac{|\cos(n!)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ quindi posso dire che

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge}}_{\substack{\text{solita armonica} \\ \text{con } 2>1}} \quad \underset{\boxed{\substack{\text{confronto fra} \\ \text{serie a termini} \\ \geq 0}}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{\Rightarrow}}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n!)|}{n^2} \text{ converge} \quad \underset{\boxed{\substack{\text{Assoluta} \\ \text{convergenza}}}}{\underset{\uparrow}{\Rightarrow}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{n^2}$$

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. assoluta convergenza}}$

$$a_n = a_n - |a_n| + |a_n|$$
$$= |a_n| - (|a_n| - a_n)$$

quindi

$$\sum a_n = \sum |a_n| - \sum (|a_n| - a_n)$$

Se le 2 serie a dx convergono, allora converge quella di sx (teo. algebrico).
La prima converge per ipotesi.
Per la seconda vale la disuguaglianza

$$0 \leq |a_n| - a_n \leq 2|a_n|$$

→ per entrambe le disug. si tratta di fare i casi $a_n \geq 0$ e $a_n \leq 0$

Ora $\sum 2|a_n|$ converge per ipotesi, quindi anche $\sum(|a_n| - a_n)$ converge per confronto tra serie a termini ≥ 0.

—o—o—

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 043

Titolo nota 25/10/2012

SERIE DI POTENZE Una serie di potenze è una serie del tipo

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots}$$

dove i c_n sono numeri assegnati, detti <u>coefficienti</u>, ed $x \in \mathbb{R}$ è un parametro.

Brutalmente: serie di potenze = polinomio di grado infinito.

<u>Domande</u>: ① Per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la serie converge?

② Per i valori di x per cui la serie converge, quanto fa la somma (cioè il limite delle somme parziali).

<u>Oss.</u> Una serie di potenze converge sempre ALMENO per $x=0$. In tal caso la somma fa c_0.

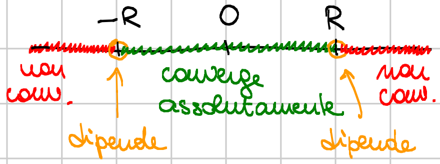
Teorema 1 (<u>Raggio di convergenza</u>) Data una serie di potenze, esiste un R (con $R \geq 0$ oppure $R = +\infty$) tale che

(i) Se $|x| < R$ la serie converge e converge assolutamente,

(ii) se $|x| > R$ la serie NON converge, anzi non verifica nemmeno la condizione necessaria,

(iii) se $|x| = R$, cioè $x = \pm R$, allora dipende dai casi (e può essere anche una situazione diversa in R e $-R$).

<u>Interpretazione</u>



La zona di convergenza è un intervallo centrato nell'origine e di ampiezza R a dx e sx

raggio di convergenza

Casi speciali ① Se $R = +\infty$, allora la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$.
② Se $R = 0$, allora la serie converge a c_0 per $x = 0$, e non converge per ogni $x \neq 0$.

Nella dimostrazione si otterrebbe che $R = \sup\{x : \text{la serie converge in } x\}$.

$\boxed{\text{Teorema 2}}$ (Calcolo del raggio di convergenza)

Supponiamo che

$$\sqrt[n]{|c_n|} \longrightarrow L \qquad (\text{con } L \geq 0 \text{ oppure } L = +\infty)$$

Allora

$$\boxed{R = \frac{1}{L}} \qquad (\text{con ovvio significato se } L = 0 \text{ oppure } L = +\infty)$$

Osservazione La formula permette di calcolare R purché il limite esista. Se il limite non esiste, allora R esiste comunque (lo dice il teorema 1), ma non si calcola con questa formula.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia L come nell'enunciato. Supponiamo per semplicità che sia $L > 0$ e $L \in \mathbb{R}$ (lascio fuori i casi $L = 0$ e $L = +\infty$).

(i) Studio $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{c_n x^n}}_{a_n}$ usando l'assoluta convergenza. Mi riduco a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |x|^n$$

Questa la studio con il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{|c_n| \cdot |x|^n} = \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x| \longrightarrow L\,|x|$$

Dal criterio della radice otteniamo che se $L|x| < 1$, cioè $|x| < \frac{1}{L}$ si ha che

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |x|^n \text{ converge, dunque anche}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge e converge assolutamente.

(ii) Se $L|x| > 1$, cioè $|x| > \frac{1}{L}$, allora per il criterio della radice applicato ai limiti abbiamo che

$$|a_n| = |c_n| \cdot |x|^n \longrightarrow +\infty$$

quindi non è possibile che $a_n \to 0$, quindi manca la condizione necessaria.

[Esercizio: adattare la dimostrazione ai casi $L = 0$ oppure $L = +\infty$]

—o—o—

SERIE DI TAYLOR Sia $f(x)$ una funzione derivabile infinite volte. Si dice serie di Taylor di $f(x)$, con centro $x_0 = 0$, la serie di potenze che ha come somme parziali i polinomi di Taylor di $f(x)$.

Detto altrimenti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}}_{c_n} x^n = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

TEOREMA 3 (Somme di serie di Taylor).

Data la serie di Taylor di una funzione $f(x)$, sotto opportune ipotesi si ha che, per i valori di x per cui la serie converge (cioè quelli all'interno del raggio di convergenza più eventuali estremi) la somma della serie è proprio $f(x)$, quindi

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad \forall x \text{ per cui la serie converge}}$$

Notazione Una funzione si dice ANALITICA se verifica le opportune ipotesi. Tutte le funzioni ottenute a partire da quelle elementari mediante op. algebriche e/o composizioni sono analitiche dove non presentano problemi burocratici

Oss. Taylor diceva che se mi fermo al grado n (cioè uso una somma parziale) commetto un errore che è $o(x^n)$. Se non mi fermo, cioè prendo tutta la serie, allora ottengo proprio $f(x)$.

<u>Esempio</u> Consideriamo la serie

$$1+\frac{8}{1!}+\frac{8^2}{2!}+\frac{8^3}{3!}+\frac{8^4}{4!}+\dots = \sum_{n\geq 0}^{\infty}\frac{8^n}{n!}$$

Questa è il caso speciale $x=8$ della serie di potenze

$$\sum_{n\geq 0}^{\infty}\underbrace{\boxed{\frac{1}{n!}}}_{c_n} x^n = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$$

① Per quali valori di x converge? Provo ad usare il teorema 2. Calcolo

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!}\right|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\underbrace{\boxed{\sqrt[n]{n!}}}_{\to+\infty \text{ (tabellina)}}} = 0 = L$$

Allora $R=\frac{1}{L}=+\infty$, cioè la serie converge per ogni $x\in\mathbb{R}$, dunque in particolare la serie converge anche per $x=8$ (come avremmo potuto dimostrare direttamente con radice o rapporto).

② A cosa converge? Basta osservare che la serie di potenze è la serie di Taylor di $f(x)=e^x$, quindi per il teorema 3 converge a e^x per tutti gli x per cui converge (cioè sempre). In particolare

$$\sum_{n\geq 0}^{\infty}\frac{8^n}{n!} = e^8.$$

ANALISI MATEMATICA 1 — LEZIONE 044

Titolo nota 25/10/2012

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ Serie di potenze con $c_n = \frac{1}{n}$

① Per quali x converge? $\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 = L$

$\uparrow \sqrt[n]{\text{polinomio}} \to 1$

Quindi $R = \frac{1}{L} = 1$, quindi la serie di sicuro converge per $x \in (-1,1)$ e non converge per $x < -1$ e $x > 1$.

Restano da vedere a mano $x = 1$ e $x = -1$.

Per $x = 1$ ottengo la serie armonica $\sum \frac{1}{n}$ che diverge.

Per $x = -1$ ottengo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

la quale converge per Leibnitz.

Conclusione: la serie converge se e solo se $x \in [-1,1)$

② A cosa converge quando converge? Bisogna vederla come serie di Taylor.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

Assomiglia $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

$\uparrow$ cambiamo segni termini dispari

Quindi $\boxed{-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots}$

La formula vale per tutti gli x per cui la serie converge, cioè $\forall x \in [-1,1)$

In particolare ponendo $x = -1$ (che è nella zona di conv.) abbiamo

$$-\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$$

<u>Esempio 3</u> Voglio calcolare $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$

Ricorda il caso $x=1$ della serie di potenze $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots$

Questa è la serie di potenze di $f(x)=\arctan x$, quindi quando la serie converge la sua somma è proprio $\arctan x$.
Quindi se la serie converge la sua somma è $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$.

Calcoliamo il raggio di convergenza della serie $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots$
In notazione compatta

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Chi è c_n? $c_n = \begin{matrix} \nearrow 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \searrow \pm\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{matrix}$

Quindi $\sqrt[n]{|c_n|} = \begin{matrix} \nearrow 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \searrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{matrix}$

Quindi $\sqrt[n]{|c_n|}$ NON ha limite, dunque L non esiste e non posso applicare immediatamente il teo. 2.

Rimedio: $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{y=x^2}}}{=} x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^n}{2n+1}$$

Mi chiedo per quali valori di y converge la serie.
Quella in y è una nuova serie di potenze con $c_n=\frac{(-1)^n}{2n+1}$ a cui posso applicare il teorema 2:

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}} \to 1 = L \implies R=\frac{1}{L}=1.$$

Quindi la serie in y converge quando $|y|<1$, quindi quella in x converge quando $|x^2|<1$, cioè per $x\in(-1,1)$.
Resterebbero da vedere a mano $x=1$ e $x=-1$. In entrambi i casi converge per Leibniz.

Esempio 3 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{3^n+7^n}{2^n+5^n}}}_{c_n} x^n$

Domanda: per quali valori di x converge? Uso teorema 2.

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{3^n+7^n}{2^n+5^n}} \longrightarrow \frac{7}{5} = L \qquad \Rightarrow R = \frac{1}{L} = \frac{5}{7}$$

raccolgo 7^n sopra e 5^n sotto...

Quindi la serie

- converge di sicuro per $x \in \left(-\frac{5}{7}, \frac{5}{7}\right)$
- non converge di sicuro per $x < -\frac{5}{7}$ e $x > \frac{5}{7}$
- restano da vedere $x = \pm \frac{5}{7}$.

$\boxed{x = \frac{5}{7}}$ Ottengo $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{3^n+7^n}{2^n+5^n} \frac{5^n}{7^n}}}_{a_n \to 1}$ che non converge perché manca la cond. necessaria

$\boxed{x = -\frac{5}{7}}$ Ottengo $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\boxed{\frac{3^n+7^n}{2^n+5^n} \cdot \frac{5^n}{7^n}}}_{d_n \to 1}$ e ancora una volta manca la cond. necessaria.

Conclusione: La serie data converge $\Leftrightarrow$ $x \in \left(-\frac{5}{7}, \frac{5}{7}\right)$.

Esempio 4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \cdot 3^n}$ Serie di potenze con $c_n = \dfrac{1}{n^2 \cdot 3^n}$

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2 \cdot 3^n}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \to \frac{1}{3} = L \quad \Rightarrow \quad R = 3$$

Controllo $x = \pm 3$. $\boxed{x = 3}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{3^n}}{n^2 \cdot \cancel{3^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ converge

$\boxed{x = -3}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^2 \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow$ converge

(sia per Leibnitz
sia per assoluta c.)

Conclusione: La serie data converge, e anzi converge assolutamente, per ogni $x \in [-3, 3]$

— o — o —

Esempio 5 $\sum_{n \geq 0}^{\infty} \frac{n^2+3n+1}{n^a+n+2}$ Per quali valori di a converge ?

Brutale : se $a \leq 1$ si ha $a_n \sim \frac{n^2}{n} = n \Rightarrow$ diverge

se $a > 1$ si ha $a_n \sim \frac{n^2}{n^a} = \frac{1}{n^{a-2}}$ e questa converge quando $a-2>1$, cioè $a>3$.

Rigoroso : confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^{a-2}}$ (per lo meno per $a>1$)
D'altra parte per $a \leq 1$ manca pure la cond. necessaria.

Esempio 6 $\sum_{n \geq 0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{n^a+n^5-14}{n^{17}+3n^{12}-22}}}_{a_n}$

Osservazione iniziale: $a_n > 0$ almeno definitivamente (num e denom tendono a $+\infty$, quindi sono definitiv. >0)

Si ha convergenza se e solo se $a < 16$

Brutale : $a_n \overset{\text{se } a>5}{\sim} \frac{n^a}{n^{17}} = \frac{1}{n^{17-a}}$ e questa converge $\Leftrightarrow 17-a>1$

$\Leftrightarrow a<16$

Se $a \leq 5$, allora $a_n \sim \frac{n^5}{n^{17}} = \frac{1}{n^{12}}$ e la serie converge.

[Rigoroso: esercizio]

Esempio 7 $\sum_{n \geq 0}^{\infty} \frac{n^2+3n+5}{n^a+n^4+7}$ Questa converge per tutti i valori di a. Questo perché sotto c'è GIÀ n^4 che sconfigge il termine n^2

Rigoroso: confronto asintotico da subito con $b_n = \frac{1}{n^2}$ (occhio che ci si può ritrovare nel caso limite, ma dalla parte giusta, quando $a>4$).

— o — o —

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 045

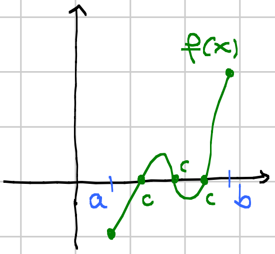
Titolo nota 26/10/2012

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI Sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \qquad \text{(cioè } f(a) \text{ e } f(b) \text{ hanno segno diverso)}$$

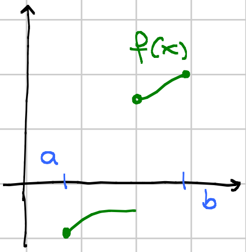
Allora esiste almeno un punto $c \in (a,b)$ tale che $f(c) = 0$.

Disegno: il punto c non è obbligato ad essere unico.



Oss. ① La continuità è fondamentale

② È fondamentale avere a che fare con i numeri reali.



Ad esempio se prendo $f(x) = x^2 - 2$ $[a,b] = [0,2]$ ho che $f(0) = -2$, $f(2) = 2$, il punto in mezzo in cui si annulla è $x = \sqrt{2}$. La funzione f andrebbe bene anche vista come $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, ma l'annullamento avviene in un p.to $c \notin \mathbb{Q}$.

Idea della dimostrazione Facciamo il caso in cui $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ (l'altro caso è simmetrico).

Pongo $c = \inf \{x \in [a,b] : f(x) > 0\}$

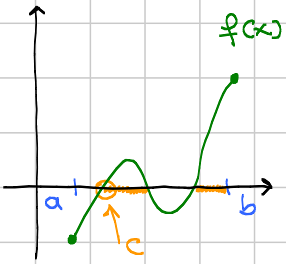
Dico che $f(c) = 0$.

Cosa vuol dire che c è l'inf dell'insieme.

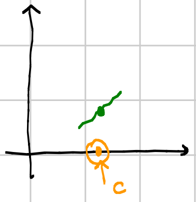
Vuol dire 2 cose

(i) $f(x) \leq 0$ se $x < c$ (e $x \in [a,b]$)

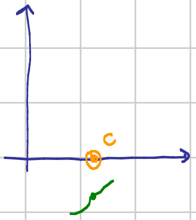
(ii) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $x \in [c, c+\varepsilon]$ tale che $f(x) > 0$



Voglio dimostrare che $f(c) = 0$. Basta che escludo che $f(c) > 0$ oppure $f(c) < 0$.



- Se fosse $f(c)>0$, allora $f(x)$ sarebbe >0 in tutto un intervallino centrato in c, ma questo andrebbe contro (i), in quanto $f(x)$ sarebbe >0 anche un po' prima di c



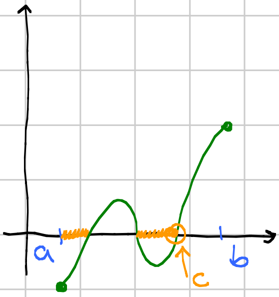
- Se fosse $f(c)<0$, allora $f(x)$ sarebbe <0 in tutto un intervallino centrato in c, e questo sarebbe contro (ii).

L'unica possibilità rimasta è che sia $f(c)=0$.

— o — o —

Oss. Potevo scrivere la dimostrazione anche in "versione sup" ponendo

$$c = \sup\{x \in [a,b] : f(x)<0\}$$



Il ragionamento per escludere che $f(c)>0$ o $f(c)<0$ è del tutto analogo (rifare per esercizio).

Si noti che le due costruzioni hanno prodotto c diversi, ma non importa.

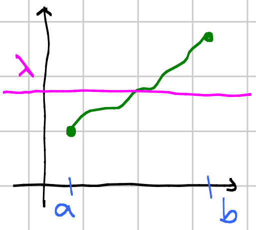
Esercizio: potevo fare la stessa cosa usando $f(x) \geq 0$ e $f(x) \leq 0$.

— o — o —

Prima variante Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

Supponiamo che $f(a)<\lambda$ e $f(b)>\lambda$, o viceversa. Allora esiste almeno un punto $c \in (a,b)$ tale che

$$f(c) = \lambda.$$



Dim. Pongo $g(x) = f(x) - \lambda$ e ho che

- $g(x)$ è continua
- $g(a)<0$ e $g(b)>0$

Per il teorema precedente $\exists c \in (a,b)$ t.c. $g(c)=0$, cioè $f(c)-\lambda=0$, cioè $f(c)=\lambda$.

— o — o —

Esempio 1 Dimostrare che l'equazione $x^2 - \sin(x^3) = 2012$ ha almeno una soluzione $x > 0$.

Pongo $f(x) = x^2 - \sin(x^3)$. Si tratta di una funzione continua in $\mathbb{R}$. Osservo che $f(0) = 0 < 2012$ e $f(1000) = 1.000^2 - \sin(1.000^3) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{abbondante}}}{>} 2012$

Per il teorema di esistenza degli zeri (prima variante) applicato con $[a,b] = [0, 1.000]$ sappiamo che $\exists\, c \in (0, 1.000)$ t.c. $f(x) = 2012$. Questa è la soluzione $x > 0$ cercata.

Oss. Al posto di 1.000 potevo usare un qualunque valore x con $x^2 > 2013$ (il sin al max toglieva 1).

Oss. 2 Allo stesso modo posso dimostrare che l'eq. $x^2 - \sin(x^3) = 2012$ ha almeno una soluzione $x < 0$. Basta usare il teorema in $[-1.000, 0]$.

Esempio 2 Sia $f(x) = x^7 + \log(1 + x^4) - \sin(x^5)$.
Domanda: vista come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è surgettiva?

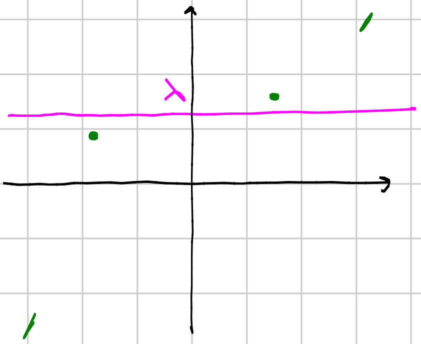
Devo vedere se, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, l'equazione $f(x) = \lambda$ ha almeno una soluzione reale. Essendo $f(x)$ continua, basta trovare un p.to a in cui $f(a) < \lambda$ e un p.to b in cui $f(b) > \lambda$ e poi usare il teorema.
Osservo che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{(potenza batte log.)}$$

Questo basta per garantire l'esistenza di a e b come sopra. La fatica la fa la definizione di limite:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ vuol dire che

$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \exists K$ t.c. $f(x) \geq \lambda$ per ogni $x \geq K$



$\boxed{\text{Fatto generale}}$ Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua t.c.

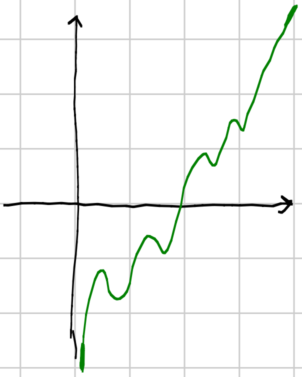
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$ (o viceversa)

Allora f è surgettiva.

<u>Variante</u> Sia $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua t.c.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty.$$

Allora è automaticamente surgettiva.



<u>Esempio</u> $f(x) = \log x + \arctan(e^x + x^3)$ è surgettiva come $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 046

Titolo nota 26/10/2012

STUDIO LOCALE DI FUNZIONI

Obiettivo: capire come è fatto il grafico di una funzione vicino ad un p.to x_0 dato.

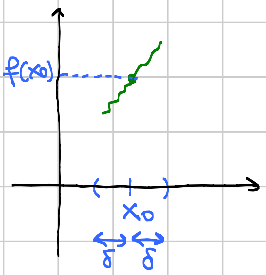
Teo. Monotonia 1 Supponiamo che $f'(x_0) > 0$. Allora esiste $\delta > 0$ t.c.

$f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0, x_0+\delta]$

$f(x) < f(x_0)$ per ogni $x \in [x_0-\delta, x_0)$

(un po' prima di x_0 la funzione vale meno che in x_0

un po' dopo x_0 la funzione vale più che in x_0)



Oss. Se fosse $f'(x_0) < 0$ la tesi sarebbe

$f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in [x_0-\delta, x_0)$ ← un po' prima di x_0

$f(x) < f(x_0)$ " " $x \in (x_0, x_0+\delta]$ ← un po' dopo x_0.

Dim. $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0$ ↑ per ipotesi

Questo dice che, per valori di h vicini a 0, il rapporto incrementale è >0.
Più precisamente $\exists\, \delta > 0$ t.c. rapp. increm. >0 per ogni $h \in [-\delta, \delta], h \neq 0$.
Allora ci sono due casi

① Se $h \in (0, \delta]$ il denom. è >0, quindi anche num. >0, quindi $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$, cioè $\underbrace{f(x_0+h) > f(x_0)}$
un po' dopo x_0, f vale di più che in x_0

② Se $h \in [-\delta, 0)$ il denom. è <0, quindi num <0, quindi
$f(x_0+h) < f(x_0)$ ← un po' prima di x_0, f vale di meno che in x_0.

—o—o—

Achtung! NON HO DETTO che esiste $\delta > 0$ t.c. $f(x)$ è monotona in $[x_0-\delta, x_0+\delta]$.

—o—o—

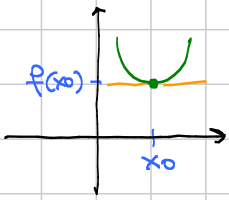
Oss. L'ipotesi di monotonia 1 riguarda il segno di f' in un solo p.to x_0.

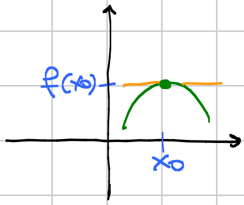
Domanda: cosa accade se $f'(x_0) = 0$.

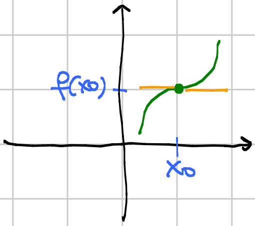
<u>Definizione</u> I p.ti x tali che $f'(x)=0$ si dicono <u>punti stazionari</u> di $f(x)$.

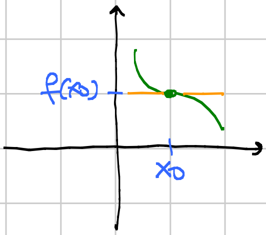
Domanda tradotta: come è fatto il grafico di $f(x)$ vicino ad un p.to x_0 stazionario.

Ci sono 5 possibilità:



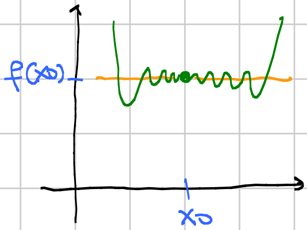






MINIMO LOCALE (RELATIVO)	MASSIMO LOCALE (RELATIVO)	FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE ASCENDENTE	FLESSO A TG. ORIZZ. DISCENDENTE
un po' dopo vale di +	- - .	un po' dopo vale di +	- - .
un po' prima vale di +	- -	un po' prima vale di −	- - .

La quinta possibilità è che sia prima sia dopo la funzione valga sia di più sia di meno



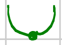
Come riconoscere in quale situazione ci si trova?

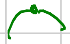
$\boxed{\text{CRITERIO DELLE DERIVATE SUCCESSIVE}}$ $f'(x_0)=0$. Cerco una derivata successiva che sia $\neq 0$. Supponiamo quindi che ci sia un intero $k \geq 2$ tale che

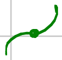
$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$$
$$f^{(k)}(x_0) \neq 0$$

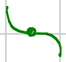
(La prima derivata $\neq 0$ in x_0 è la k-esima)

Allora

① Se k è pari e $f^{(k)}(x_0) > 0$ abbiamo minimo locale 

② Se k è pari e $f^{(k)}(x_0) < 0$ " massimo locale 

③ Se k è dispari e $f^{(k)}(x_0) > 0$ abbiamo ... 

④ Se k è dispari e $f^{(k)}(x_0) < 0$ " ... 

Oss. Il caso ⑤ si può presentare solo se le derivate smettono di esistere prima di diventare $\neq 0$ oppure sono tutte nulle.

Dim.: Le derivate successive, calcolate in x_0, entrano in gioco nei polinomi di Taylor con centro in $x_0 = 0$.
Considero il polinomio di grado k:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + o(h^k)$$

$$= f(x_0) + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + o(h^k)$$ (tutte le altre derivate sono 0 per ipotesi)

Quindi $f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + o(h^k)$ per $h \to 0$

Divido per h^k e faccio il limite per $h \to 0$. Ottengo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h^k} = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + \underbrace{\boxed{\frac{o(h^k)}{h^k}}}_{\downarrow\, 0} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Ci sarebbero 4 casi

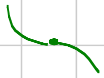
① Supponiamo $f^{(k)}(x_0) > 0$ e k pari. Poiché il limite viene > 0, esiste $\delta > 0$ t.c. la frazione è > 0 per $h \in [-\delta, \delta]$ con $h \neq 0$.

- Se $h \in (0, \delta]$ il denom. è pos., quindi num è pos., quindi $f(x_0+h) > f(x_0)$, quindi un po' dopo vale di +.
- Se $h \in [-\delta, 0)$ il denom. è pos. (k è pari), quindi num è pos., quindi $f(x_0+h) > f(x_0)$, quindi un po' prima vale di +.

Questa è la situazione del minimo locale

④ Supponiamo che $f^{(k)}(x_0) < 0$ e k dispari. Poiché il limite viene <0, esiste $\delta > 0$ t.c. la frazione è <0 per $h \in [-\delta, \delta]$ con $h \neq 0$.

- se $h \in (0, \delta]$ il denom. è >0, quindi num. <0, cioè $f(x_0+h) < f(x_0)$, cioè un po' dopo vale di −
- se $h \in [-\delta, 0)$ il denom. è <0, quindi num. >0, cioè $f(x_0+h) > f(x_0)$, cioè un po' prima vale di +



Questa è la situazione del flesso a tg. orizz. discendente

—o—o—

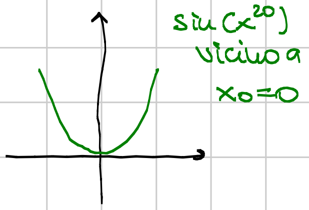
[Esercizio: fare i 2 casi restanti].

Traduzione del criterio delle derivate successive Una funzione si comporta vicino ad un suo p.to stazionario come il primo termine non nullo e non costante del suo sviluppo di Taylor.

Esempio 1 $f(x) = \sin(x^{20})$ $x_0 = 0$ (si verifica che è un p.to staz.)

$$f(x) = \boxed{x^{20}} + o(x^{20})$$

↑ primo termine non nullo e non costante

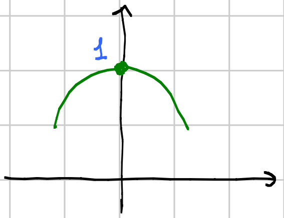


Quindi $f(x)$ si comporta come x^{20}, cioè ha un minimo locale

Esempio 2 $f(x) = \cos(\arctan x)$ $x_0 = 0$ (stazionario)

$$f(x) = \cos(x + o(x^2))$$
$$= 1 \boxed{-\frac{1}{2}x^2} + o(x^2)$$

↑ primo termine non nullo e non costante



Quindi c'è un massimo locale,

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 047

Titolo nota 26/10/2012

Esempio 1 Dimostrare che l'equazione

$$x^5 - \arctan(x^3) = 2012$$

ha almeno una soluzione reale.

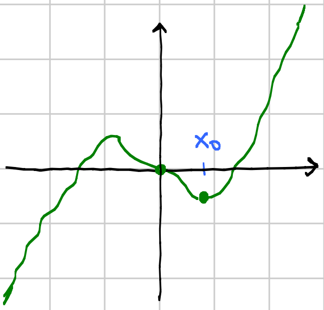
$\boxed{1° \text{ modo}}$ Pongo $f(x) = x^5 - \arctan(x^3)$. Osservo che è continua in $\mathbb{R}$ e che $f(0) = 0$, $f(10) = 10^5 - \arctan(10^3) > 2.012$.
Applico il teo. dei valori intermedi in $[0,10]$ e ottengo l'esistenza di almeno una soluzione $x \in (0,10)$.

Oss. Il teo. fornisce l'esistenza. Non dice nulla
- → sull'unicità eventuale (aspettiamo domani)
- → su come trovare la soluzione (ma quando si sa che le soluzioni esistono ci sono dei metodi per calcolarle in maniera approssimata)

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Osservo che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Quindi f, vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è surgettiva, quindi per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione ha almeno una soluzione reale.

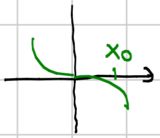
Esempio 2 Dimostrare che l'equazione $x^5 - \arctan(x^3) = 0$ ha almeno 3 soluzioni reali.



Una soluzione si vede subito: $x = 0$
Se avessi un valore $x_0 > 0$ t.c. $f(x_0) < 0$ avrei un'altra soluzione $x > x_0$.
Come si comporta $f(x)$ vicino a $x = 0$?
Taylor: $f(x) \underset{\uparrow}{=} -x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$.
$\arctan x^3 = x^3 + o(x^3)$ ← che mangia x^5

Studio locale ⇒ $f(x)$ si comporta vicino a $x=0$ come $-x^3$, cioè ha un flesso a tang. orizz. discendente.

Questo vuol dire che un po' a dx di 0 la funzione vale meno che in $x=0$, quindi vale negativo. Questo fornisce l'esistenza dell' x_0 cercato



Per ottenere la 3ª soluzione ci sono 2 metodi

→ o si ripete il ragionamento per $x<0$ (esiste un p.to $x_1<0$ t.c. $f(x_1)>0$ e quindi per il limite a $-\infty$ ci sarà una soluzione $x<x_1$)

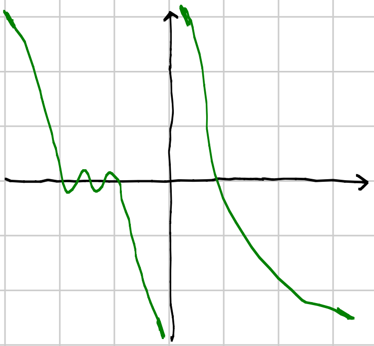
→ o si sfrutta che $f(x)$ è dispari, quindi se $f(x)=0$ ha una soluzione $x>0$ allora ha per forza la soluzione $-x$.

Oss. Ora so anche che $f(x)$ NON è iniettiva (passa almeno 3 volte da 0)

Esempio 3 Consideriamo l' eq. $\frac{1}{x} - x^3 + \arctan(x^2) = 0$.
Ha almeno una soluzione?

Considero $f(x) = \frac{1}{x} - x^3 + \arctan(x^2)$. Questa è continua per $x \neq 0$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



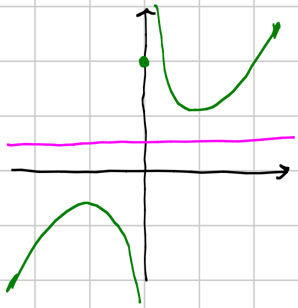
$\boxed{\text{Quindi } f \text{ è surgettiva}}$ NO!! Questo valeva solo se era continua su tutto $\mathbb{R}$ e in questo caso non lo è

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

Ora, E SOLO ORA, posso dire che $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è surgettiva e anche $f:(-\infty,0) \to \mathbb{R}$ è surgettiva

Questo assicura che l'equazione ha almeno una soluzione $x>0$ e almeno una soluzione $x<0$.

Achtung! Se f NON è continua su tutto $\mathbb{R}$, sapere che



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

non bastano a garantire la surgettività.
L'esempio a fianco è continua ovunque, tranne in $x=0$.

—o —o —

Esempio 4 Sia $a_n = \sin\frac{1}{n} - \arctan\frac{1}{n}$.

Domanda: qual è il segno di a_n, per lo meno per n grandi?
(Ad esempio potrebbe servire per lo studio di $\sum a_n$).

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Risolvere la disequazione, ma non si riesce.

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ $a_n \underset{\uparrow}{\sim} \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$ (troppo brutale, cioè mi sono fermato troppo presto nello sviluppo)

$\arctan x \sim x$
$\sin x \sim x$

$$a_n \sim \underbrace{\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{6n^3}}_{\sin x \sim x - \frac{x^3}{6}} - \Big(\underbrace{\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{3n^3}}_{\arctan x \sim x - \frac{x^3}{3}}\Big) = \frac{1}{6n^3} > 0$$

Questo sembra suggerire che $a_n > 0$ definitivamente.
Come dimostrarlo rigorosamente?

$\boxed{1^a \text{ alternativa}}$ Calcolo $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot n^3 \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{6}$

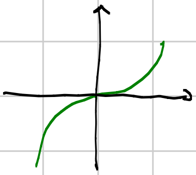
si calcola con Taylor

Ma allora definitivamente $a_n \cdot n^3 > 0$, quindi anche $a_n > 0$.

$\boxed{2^a \text{ alternativa}}$ Pongo $f(x) = \sin x - \arctan x$. Come è fatta $f(x)$ vicino a $x = 0$?

$$f(x) \overset{\substack{\text{Taylor}\\ \downarrow}}{=} \cancel{x} - \frac{x^3}{6} - \Big(\cancel{x} - \frac{x^3}{3}\Big) + o(x^3) = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

Quindi si comporta come $\frac{1}{6}x^3$ cioè così:



Quindi $f(x) > 0$ per x positivo piccolo.

Pertanto $f\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ per n abbastanza grande

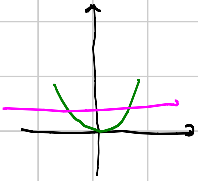
Oss. È ora facile dire che $\sum a_n$ converge (C.A. con $\frac{1}{n^3}$)

— o — o —

Esempio 5 Consideriamo $f(x) = x^7 + \sin(x^3) + \arctan(x^6)$
Vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva? È surgettiva?

Surgettiva SI: basta fare i limiti per $x \to \pm\infty$. Vengono $\pm\infty$ per colpa (o merito) del $\sin$.

Iniettiva NO: vicino a 0 si comporta come x^6 in quanto
$$f(x) = x^6 + o(x^6)$$



$\Rightarrow$ minimo locale $\Rightarrow$ addio iniettività.

— o — o —

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 048

Titolo nota 27/10/2012

TEOREMI CALCOLO DIFFERENZIALE

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, Rightarrow] & R \arrow[r, Rightarrow] & C \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & L \arrow[d, Rightarrow] \\
 & & H \arrow[d, Rightarrow, "\text{già vista}"'] & M \\
 & & T &
\end{tikzcd}$$

WEIERSTRASS
ROLLE
CAUCHY
LAGRANGE

HOPITAL
TAYLOR
MONOTONIA

Definizioni Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$. Si dice che

$$M = \max\{f(x) : x \in A\}$$

← Massimo di f in A, cioè massima quota raggiunta da $f(x)$ quando x varia in A "Mondo y"

se

(i) $f(x) \leq M$ per ogni $x \in A$,

(ii) $\exists\, x \in A$ t.c. $f(x) = M$.

Per il minimo la situazione è analoga: $m = \min\{f(x) : x \in A\}$ se

(i) $f(x) \geq m$ per ogni $x \in A$,

(ii) $\exists\, x \in A$ t.c. $f(x) = m$.

Gli eventuali valori della x in cui $f(x) = M$ oppure $f(x) = m$ si dicono p.ti di max oppure p.ti di min

Achtung terminologico! Massimo = massimo valore (è una y)

Punto di massimo = ciascuno dei valori della x in cui f vale il massimo

↑ sono delle x

Idem per il minimo.

Osservazioni ① Massimo e minimo non sono obbligati ad esistere (inf e sup invece sì)

② Se esistono sono per forza unici

③ I p.ti di max/min esistono $\Leftrightarrow$ esistono max e min e non sono obbligati ad essere unici.

$\boxed{\text{TEOREMA DI WEIERSTRASS}}$ Sia $f : \underbrace{[a,b]} \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

↑intervallo (quindi insieme limitato) estremi COMPRESI

Allora $\max\{f(x) : x \in [a,b]\}$ e $\min\{f(x) : x \in [a,b]\}$ esistono per forza.

Achtung! Se le ipotesi non sono verificate, ad esempio perché l'insieme è del tipo (a,b), cioè non ci sono gli estremi, allora max e min potrebbero non esistere, ma anche esistere.

Esempi

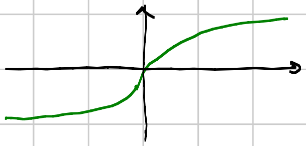
$\max\{\arctan x : x \in \mathbb{R}\}$ N.E.

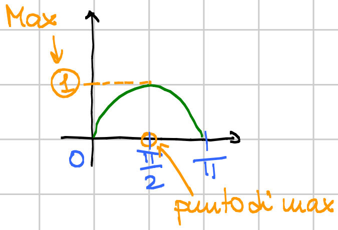
$\sup\{\arctan x : x \in \mathbb{R}\} = \frac{\pi}{2}$

perché non c'è nessun $x \in \mathbb{R}$ tale che $\arctan x = \frac{\pi}{2}$

$\inf\{\arctan x : x \in \mathbb{R}\} = -\frac{\pi}{2}$

$\min\{\quad " \quad\} = $ N.E.





$\max\{\sin x : x \in (0,\pi)\} = 1$

In questo caso esiste ma W non si applica

$\min\{\sin x : x \in (0,\pi)\} = $ N.E.

$\inf\{\sin x : x \in (0,\pi)\} = 0$

non c'è nessun p.to $x \in (0,\pi)$ in cui $\sin x = 0$.

—o—o—

$\boxed{\text{RICERCA DEI PUNTI DI MAX / MIN}}$

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Per W so che max e min esistono. Come li trovo?

Basta trovare i p.ti di max / min e poi sostituire i valori.

Come li trovo? Cercandoli in 3 categorie di p.ti

① P.ti $\boxed{\text{STAZIONARI INTERNI}}$: p.ti $x \in (a,b)$ t.c. $f'(x) = 0$

② P.ti $\boxed{\text{SINGOLARI INTERNI}}$: p.ti $x \in (a,b)$ t.c. $f'(x)$ non esiste

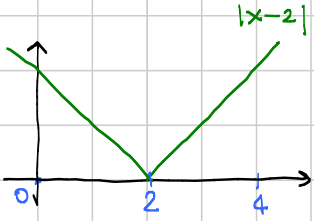
③ P.ti del $\boxed{\text{BORDO}}$: $x = a$ e $x = b$

Operativamente si procede così:

→ si trovano tutti i p.ti di tipo ①,②,③ : questi sono i candidati ad essere i punti di max / min

→ li sostituisco tutti in $f(x)$: dove vale di + è il max, dove vale di meno è il min.

—o —o —



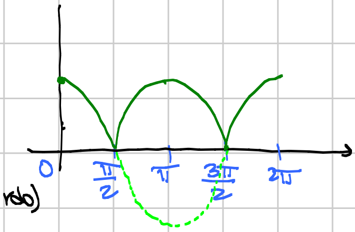
Esempio 1 $f(x) = |x-2|$ $[a,b] = [0,4]$

$\max\{|x-2| : x \in [0,4]\} = 2$

P.ti di max: $x = 0$ e $x = 4$ (categoria bordo)

$\min\{|x-2| : x \in [0,4]\} = 0$

P.to di min: $x = 2$ (categoria singolare interno)



Esempio 2 $f(x) = |\cos x|$ $[a,b] = [0,2\pi]$

$\max\{|\cos x| : x \in [0,2\pi]\} = 1$

p.ti di max: $x = 0$ (bordo), $x = \pi$ (staz. int.), $x = 2\pi$ (bordo)

$\min\{|\cos x| : x \in [0,2\pi]\} = 0$

p.ti di min: $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$ (singolari interni).

—o —o —

Dim. del fatto che i p.ti di max/min rientrano in una delle 3 tipologie.

Facciamo il caso dei p.ti di max.

Per W. esistono, quindi da qualche parte devono stare. Sia x_0 p.to di max.

→ Se x_0 è sul bordo, allora è in categoria 3.

→ Se x_0 è interno e $f'(x_0)$ non esiste, allora è in categoria 2.

→ Se x_0 è interno e $f'(x_0)$ esiste, devo dimostrare che $f'(x_0) = 0$, così finisce in categoria 1.

Primo approccio: uso monotonia 1. Se fosse $f'(x_0) > 0$, allora un po' a dx di x_0 si ha che $f(x) > f(x_0)$, il che non è possibile perché $f(x_0)$ è il max. Se fosse $f'(x_0) < 0$, allora $f(x) > f(x_0)$ per gli x un po' a sx di x_0, il che non è possibile. L'unica possibilità è che sia $f'(x_0) = 0$.

Secondo approccio: visto che $f'(x_0)$ esiste la calcolo con il rapporto incrementale.

$\le 0 \leftarrow$ perché x_0 è p.to di max

Per $h>0$ ho che $\dfrac{\boxed{f(x_0+h)-f(x_0)}}{\underset{>0}{\boxed{h}}} \le 0$, ma allora

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \le 0 \quad (\text{limite di roba } \le 0).$$

≤ 0 (come prima)

Per $h<0$ ho che $\dfrac{\boxed{f(x_0+h)-f(x_0)}}{\underset{<0}{\boxed{h}}} \ge 0$, ma allora

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \ge 0 \quad (\text{limite di roba } \ge 0)$$

Poiché $f'(x_0)$ esiste i due limiti devono essere uguali e coincidere con $f'(x_0)$, che quindi può solo essere $=0$.

—o—o—

Esercizio: ripetere tutti i ragionamenti per i p.ti di minimo.

—o—o—

Esempio 3 $\quad f(x) = x - x^3 \qquad [a,b] = [0,1]$

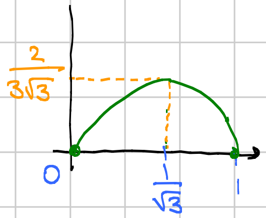
Max e min non si vedono "a occhio". Cerco i candidati

① Staz. interni: $f'(x) = 0$, $1-3x^2=0$, $x^2 = \frac{1}{3}$, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Quindi l'unico p.to in $(0,1)$ è $\boxed{x = \frac{1}{\sqrt{3}}}$

② Sing. interni: $\varnothing$ perché $f'(x)$ esiste ovunque

③ Bordo: $\boxed{x=0}$ e $\boxed{x=1}$



$$f(0) = 0, \quad f(1) = \overset{\text{MIN}}{\boxed{0}}, \quad f\left(\boxed{\tfrac{1}{\sqrt{3}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} = \overset{\text{MAX}}{\boxed{\frac{2}{3\sqrt{3}}}}$$

p.ti di min

p.to di max

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 049

Titolo nota 27/10/2012

$\boxed{W \Rightarrow R \Rightarrow C \Rightarrow L}$

Teorema di ROLLE Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Supponiamo che

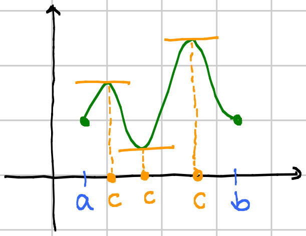
(i) f continua in $[a,b]$,

(ii) f derivabile in (a,b), (se è derivabile in $[a,b]$ ancora meglio)

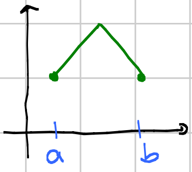
(iii) $f(a) = f(b)$.

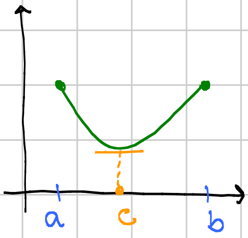
Allora esiste almeno un p.to $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Oss. Il punto c può anche non essere unico.



Oss. 2 Basta che f sia non derivabile anche in un solo p.to interno e la tesi salta.





In questo esempio $f'(x)$ non si annulla mai (ma c'è un pto in cui non esiste).

Dim. Grazie all'ipotesi (i) posso applicare W., il garantisce l'esistenza di punti di max / min, i quali rientrano nelle 3 tipologie.

→ Se i pti di max / min fossero tutti sul bordo, allora max e min coinciderebbero per l'ipotesi (iii), quindi $f(x)$ sarebbe costante, quindi $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a,b)$, quindi avrei infiniti c. In realtà tutti i pti sarebbero sia di max sia di min.

→ Pertanto esiste almeno un p.to di max o min che è in (a,b). Non può essere singolare interno per l'ipotesi (ii). Quindi è stazionario interno, cioè è il c cercato.

—o —o—

Teorema di CAUCHY Siano $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni.

Supponiamo che

(i) f e g sono continue in $[a,b]$,

(ii) f e g sono derivabili in (a,b).

Allora esiste almeno un valore $c \in (a,b)$ tale che

$$\boxed{(f(b)-f(a))\, g'(c) = (g(b)-g(a)) \cdot f'(c).}$$

1ª tesi

Se inoltre supponiamo che

(iii) $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$

allora abbiamo anche che $g(b) \neq g(a)$ e dividendo otteniamo

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.}$$

2ª tesi

Dim. Poniamo $\varphi(x) = (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x)$.

Proprietà di $\varphi(x)$:

(i) φ è continua in $[a,b]$ (multiplo di $g(x)$ ± multiplo di $f(x)$, o meglio combinazione lineare di $g(x)$ ed $f(x)$)

(ii) φ è derivabile in (a,b) (stesso motivo).

(iii) $\varphi(a) = \varphi(b)$. Si tratta di fare il conto

$$\begin{aligned}
\varphi(a) &= (f(b)-f(a))\,g(a) - (g(b)-g(a))\,f(a) \\
&= \boxed{f(b)g(a)} - \cancel{f(a)g(a)} \boxed{-g(b)f(a)} + \cancel{g(a)f(a)} \\
\varphi(b) &= (f(b)-f(a))\,g(b) - (g(b)-g(a))\,f(b) \\
&= \cancel{f(b)g(b)} \boxed{-f(a)g(b)} - \cancel{g(b)f(b)} + \boxed{g(a)f(b)}
\end{aligned}$$

Posso dunque applicare ROLLE a $\varphi(x)$. Ottengo che esiste $c \in (a,b)$ t.c. $\varphi'(c) = 0$. Ma $\varphi'(x) = (f(b)-f(a))\,g'(x) - (g(b)-g(a)) \cdot f'(x)$

Pertanto l'uguaglianza $\varphi'(c) = 0$ è equivalente alla 1ª tesi.

Supponiamo ora che $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$. Allora dico che $g(a) \neq g(b)$. Se infatti fosse $g(a) = g(b)$, potrei applicare ROLLE a $g(x)$ e otterrei che esiste $c \in (a,b)$ t.c. $g'(c) = 0$, il che è contro l'ipotesi.

Una volta che $g(a) \neq g(b)$ posso dividere e la prima tesi diventa la seconda tesi.

— o — o —

Oss. Prendiamo $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $[a,b] = [-1,1]$.

Allora $g(a) \neq g(b)$, quindi posso considerare

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{1-1}{1-(-1)} = \frac{0}{2} = 0$$

Quindi la frazione a sx della 2ª tesi ha senso. Esiste $c \in (-1,1)$ t.c. $\frac{f'(c)}{g'(c)} = 0$? NO! dovrebbe essere $f'(c) = 0$, cioè $2c = 0$, cioè $c = 0$, ma allora anche $g'(x) = 3x^2$ si annullerebbe.

Si noti che in questo caso vale la 1ª tesi, ma non vale la 2ª tesi (in realtà non è verificata l'ipotesi (iii) perché $g'(x)$ si annulla).

— o — o —

Teorema di LAGRANGE Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f continua in $[a,b]$,

(ii) f derivabile in (a,b).

Allora esiste almeno un p.to $c \in (a,b)$ tale che

$$\boxed{f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(c)}$$

Dim. 1 Posso riscrivere la tesi come $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(c)}{1}$

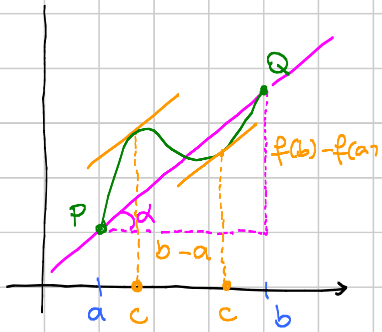
Questo è proprio Cauchy con $g(x) = x$ (infatti $g(b) - g(a)$ diventa $b-a$ e $g'(c) = 1$)

— o — o —

Interpretazione geometrica

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}} = \boxed{f'(c)} \rightarrow \text{coeff. ang. retta tangente al grafico in } (c, f(c))$$

↓ coefficiente angolare della retta PQ



Lagrange dice che esiste almeno un p.to $c \in (a,b)$ in cui la retta tangente è parallela alla retta PQ

Oss. Se P e Q fossero alla stessa altezza, cioè $f(b) = f(a)$, avrei almeno un p.to in cui la retta tangente è orizzontale, cioè il teorema di Rolle.

Brutalmente: Lagrange è un Rolle "storto"!

$\boxed{\text{Dim. 2}}$ Considero $\varphi(x) = f(x) -$ equazione della retta PQ

Si osserva facilmente che

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0 \qquad (f(x) \text{ e retta coincidono in P e Q}).$$

Quindi posso applicare Rolle a $\varphi(x)$ ottenendo un p.to c t.c. $\varphi'(c) = 0$.

Ma

$$\varphi'(c) = f'(c) - \text{coeff. ang. retta}$$ (ho usato che la derivata di una retta è il coeff. angolare)

Essendo $\varphi'(c) = 0$ sarà

$$f'(c) = \text{coeff. ang. retta} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

— o — o —

Oss. La $\varphi(x)$ della dim. 2 è praticamente la stessa di Cauchy.

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 050

Titolo nota 27/10/2012

$\boxed{C \Rightarrow H}$ Dimostriamo un caso speciale di De L'Hôpital, cioè il caso in cui si fa

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{con } x_0 \in \mathbb{R} \text{ e del tipo } \frac{0}{0}$$

Posso estendere $f(x)$ e $g(x)$ per $x = x_0$ ponendo $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

In questo ottengo funzioni f e g che sono

- continue in $[x_0, x]$
- derivabili in (x_0, x)
- inoltre $g'(x) \neq 0$ tra x_0 e x

} ipotesi burocratiche del teorema di De L'Hôpital

Applico CAUCHY in $[x_0, x]$. Ottengo

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(x_0)}}}{g(x) - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{g(x_0)}} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{per un opportuno } c \in (x_0, x)$$

Ad essere preciso, c dipende da x, quindi sarebbe più corretto scrivere

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$$

Ora faccio il limite per $x \to x_0$. Essendo

$$\underset{\underset{x_0}{\downarrow}}{\boxed{x_0}} \leq \underset{\underset{x_0}{\downarrow}}{c(x)} \leq \underset{\underset{x_0}{\downarrow}}{\boxed{x}}$$

per i Carabinieri ho che $c(x) \to x_0$, quindi

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pongo} \\ y = c(x)}}{=} \lim_{y\to x_0} \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

— o — o —

Esercizio Rifare il discorso per $x \to x_0^-$

$\boxed{L \Rightarrow M}$ $\boxed{\text{Teorema di monotonia 2}}$ (segno di f' in un intervallo)

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione, che supponiamo continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora valgono queste conclusioni.

① f debolmente crescente in $[a,b]$ $\Rightarrow$ $f'(x)\geq 0$ per ogni $x\in(a,b)$

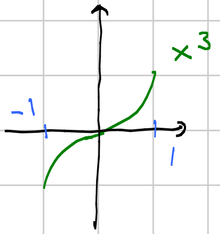
② f strettamente " " $\Rightarrow$ $f'(x)>0$ "

③ $f'(x)\geq 0$ per ogni $x\in(a,b)$ $\Rightarrow$ f debolmente crescente in $[a,b]$

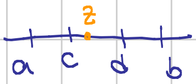
④ $f'(x)>0$ " $\Rightarrow$ f strettamente " " .

Achtung! Se anche f è strettamente crescente, posso solo dedurre che $f'(x)\geq 0$ per ogni $x\in(a,b)$

Esempio $[a,b]=[-1,1]$, $f(x)=x^3$
f è strett. cresc., ma $f'(x)=3x^2$ si annulla in $[-1,1]$ (in un p.to).



Dim di ③ Siano c e d due p.ti in $[a,b]$ con $c<d$
Voglio dimostrare che $f(c)<f(d)$.



Applico Lagrange nell'intervallo $[c,d]$. Ottengo che $\exists\, z\in(c,d)$ t.c.

$$f(d)-f(c)=\underbrace{(d-c)}_{>0}\cdot\underbrace{f'(z)}_{\geq 0 \text{ per ipotesi}}\geq 0\ ,\quad \text{cioè } f(d)\geq f(c).$$

Dim. di ④ Come prima arrivo a

$$f(d)-f(c)=\underbrace{(d-c)}_{>0}\cdot\underbrace{f'(z)}_{>0 \text{ per ipotesi}}>0,\quad \text{cioè } f(d)>f(c).$$

Dim. di ① Per ipotesi f è debolmente crescente. Voglio dim. che $f'(x)\geq 0$.

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{\overset{\geq 0 \text{ in quanto } f(x_0+h)\geq f(x_0)}{\boxed{f(x_0+h)-f(x_0)}}}{\underset{>0}{\boxed{h}}}$$

Ne segue che il limite è ≥ 0 essendo limite di roba ≥ 0.

Esercizio: vedere che succede quando $h\to 0^-$.

$\boxed{\text{Non Dim. di ②}}$ Cosa succede se f è strett. cresc.. Per $h>0$ ho che

$$\frac{\overset{>0}{\boxed{f(x_0+h)-f(x_0)}}}{\underset{>0}{\boxed{h}}} > 0$$, quindi il rapporto incrementale è sempre >0.

Tuttavia le disuguaglianze strette non passano al limite, quindi quando faccio il lim per $h \to 0^+$ ottengo solo ≥ 0.

— o — o —

<u>Oss.</u> Monotonia 2 vale con ovvie modifiche nel caso decrescente.

— o — o —

<u>Esempio 1</u> Consideriamo l'equazione $x^5+2x = \sin x + 2012$

Quante soluzioni ha ? E se cambio 2012 con un $\lambda \in \mathbb{R}$ generico ?

Pongo $f(x) = x^5+2x-\sin x$ e l'eq. diventa $f(x) = \lambda$

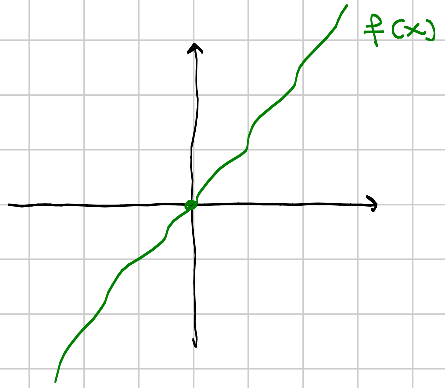
Osservo intanto che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e f è

continua in ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi f, vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è surgettiva, quindi per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste almeno una soluzione.

Ora $f'(x) = 5x^4+2-\cos x \geq 5x^4+1 \geq 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

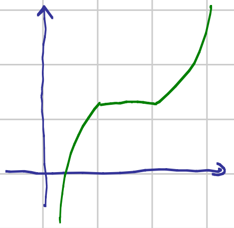
Poiché $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, abbiamo che f è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, quindi iniettiva, quindi c'è al massimo una soluzione.

Conclusione: per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha esattamente una soluzione.



$\boxed{\text{MONOTONIA 3}}$ Supponiamo che $f'(x) \geq 0$ in (a,b).
Supponiamo inoltre che $f'(x)$ si annulli al più SPORADICAMENTE, cioè che non si annulli in un intero intervallo.
Allora f è <u>strettamente</u> crescente.

<u>Dim.</u> Già sappiamo che è debolmente crescente perchè $f'(x) \geq 0$.
Se non fosse strett. crescente, vorrebbe dire che il grafico ha un tratto piatto.
Ma allora avremmo che $f'(x) = 0$ in tutto l'intervallo del tratto piatto, ma abbiamo supposto che questo non succeda.



<u>Conseguenza</u>. Per dim. che una funzione è iniettiva, basta dim. che $f'(x) \geq 0$ e si annulla al più sporadicament.

—o—o—

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 051

Titolo nota 31/10/2012

STUDIO GLOBALE DI FUNZIONI Obiettivo: tracciare approssimativamente il grafico di una funzione $f(x)$ in tutto il suo insieme di definizione.

Esempio 1 $f(x) = \frac{e^x}{x}$

Punto 1 Vedere se ci sono simmetrie (pari, dispari, periodica): se ci sono basta tracciare una parte del grafico.

In questo caso nessuna simmetria.

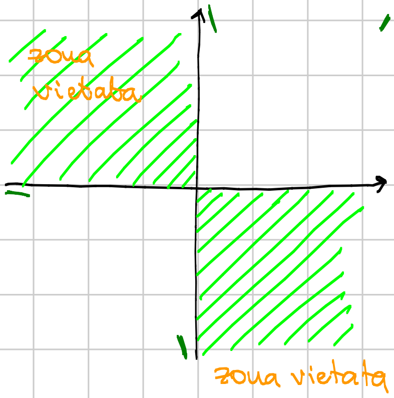
Punto 2 Zona di definizione, continuità, limiti agli estremi della zona

In questo caso f è definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, cioè per $x \neq 0$, e in tale zona è continua.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \overset{\substack{\text{espon. batte potenza}\\ \downarrow}}{=} +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{0^+}{-\infty}\right] = 0^-$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] +\infty \qquad \lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{e^x}{x} \underset{\substack{\uparrow\\ \frac{1}{0^-}}}{=} -\infty$$

Inizio a rappresentare in un grafico queste prime info.

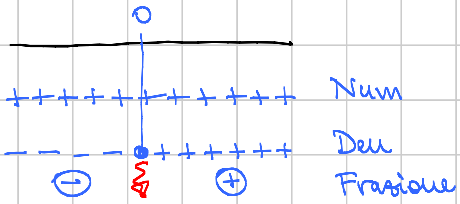


Punto 3 Zeri e segno: risolvere $f(x)=0$, $f(x)>0$, $f(x)<0$

$f(x) = 0 \iff \frac{e^x}{x} = 0$ MAI

$f(x) > 0$

$f(x) < 0$



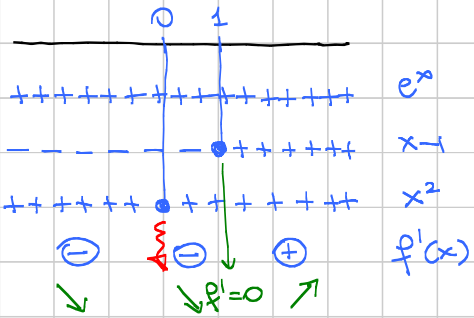
Punto 1

Studio della derivata e zone di monotonia. Determinare
→ dove esiste $f'(x)$
→ il segno di $f'(x)$ (cioè risolvere $f'(x)=0$, $f'(x)>0$, $f'(x)<0$)

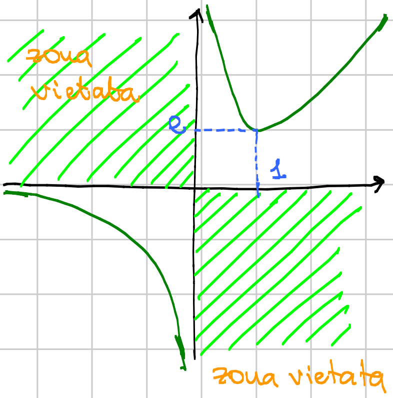
Nell' esempio $f(x)$ è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (composizione e/o op. algebriche a partire da funzioni derivabili) e

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^3}.$$

Studio zeri e segno di $f'(x)$



Quindi
$f'(x)=0 \iff x=1$
$f'(x)>0 \iff x\in(1,+\infty)$
$f'(x)<0 \iff x\in(-\infty,0)\cup(0,1)$



Siamo ora in grado di confermare il grafico con gli intervalli di monotonia.

Può essere utile calcolare $f(1) = \frac{e^1}{1} = e$

Andare avanti nello studio dipende dagli obiettivi per cui si sta studiando la funzione. Potrebbe essere interessante studiare: → asintoti
→ pti di max/min locale/globale
→ zone di convessità/concavità
→ LIPSCHITZIANITÀ

* * *

Possibili obiettivi per cui uno potrebbe aver studiato la funzione:

① Problema di inf/sup/max/min, ad esempio per l' insieme

$$\left\{ \frac{e^x}{x} : x>0 \right\} = \text{valori assunti da } f(x) \text{ al variare di } x>0$$

Nell' esempio sup = $+\infty$, max N.E. , inf = min = e con
p.to di minimo $x = 1$,

Altro esempio inf/sup/max/min $\left\{ \frac{e^x}{x} : x \in [-4,-2] \right\}$

In questo caso max = sup = $f(-4) = -\frac{1}{4e^4}$ con p.to max $x=-4$

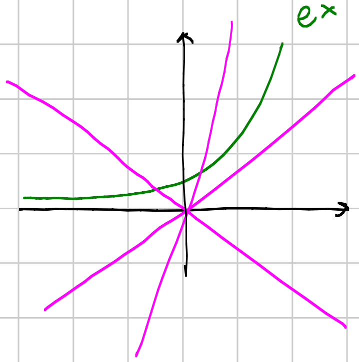
min = inf = $f(-2) = -\frac{1}{2e^2}$ con p.to di min $x=-2$.

② Risoluzione di equazioni: ad esempio l' equazione $\frac{e^x}{x} = 2012$ ha esattamente 2 soluzioni: una in $(0,1)$, una in $(1,+\infty)$.

Lo stesso discorso vale per equazioni parametriche: determinare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell' equazione

$$e^x = \lambda x$$

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Sovrapporre i grafici:
disegnare e^x e λx



Sconsigliatissimo: SPESSO è difficile stabilire la posizione relativa di 2 grafici

Ad esempio è quasi impossibile stabilire per quale valore di λ la retta è tangente a $y = e^x$

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Isolare il parametro e ridursi a $f(x) = \lambda$.

Nell' esempio $e^x = \lambda x$ diventa

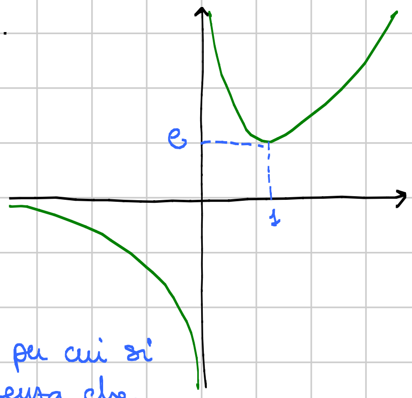
$\frac{e^x}{x} = \lambda$ e ci si riduce alla funzione prec.

L' equazione ha pertanto

→ 1 soluzione se $\lambda \in (-\infty,0) \cup \boxed{\{e\}}$

→ 0 soluzioni se $\lambda \in [0,e)$

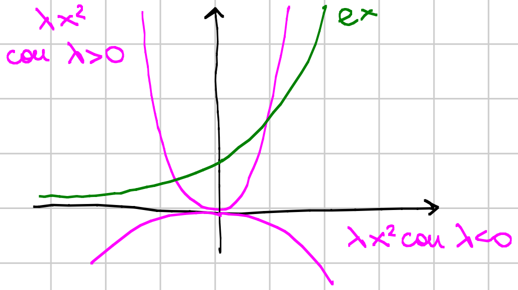
→ 2 soluzioni se $\lambda \in (e,+\infty)$



↑ valore di λ per cui si ha la tangenza che prima non si vedeva.

Esempio 2 $e^x = \lambda x^2$

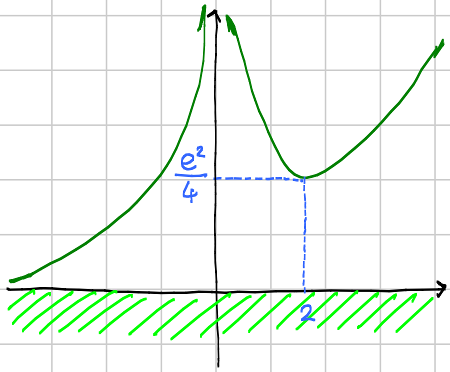
Se sovrappongo i grafici



Isolando il parametro ci ritroviamo a risolvere

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2} = \lambda$$

$\boxed{\text{Studio rapido di } f(x)}$



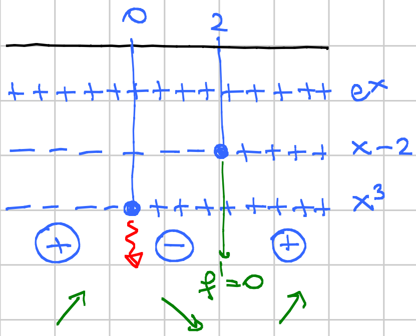
Punto 1 Nessuna simmetria

Punto 2 Definita e continua per $x \neq 0$

Punto 3 $f(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$

Punto 4 $f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - 2x \cdot e^x}{x^4} = \frac{e^x \cdot x - 2e^x}{x^3} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$

Studio zeri e segno di $f'(x)$



Quindi l'equazione ha

→ 0 sol. per $\lambda \in (-\infty, 0]$
→ 1 sol. per $\lambda \in (0, \frac{e^2}{4})$
→ 2 sol. per $\lambda = \frac{e^2}{4}$
→ 3 sol. per $\lambda > \frac{e^2}{4}$

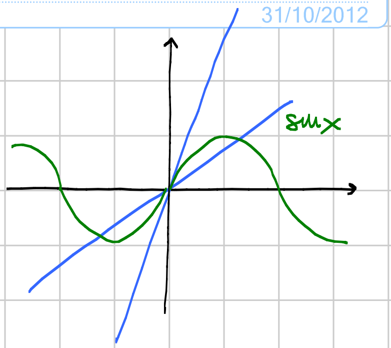
[Esercizio: interpretare a posteriori il numero di soluzioni alla luce dei due grafici sovrapposti]

Capire in particolare che succede per $\lambda = \frac{e^2}{4}$.

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 052

Titolo nota 31/10/2012

Esempio 1 Risolvere l' eq. $\sin x = x$



Se sovrappongo i grafici, non è chiaro come si intersecano. Quindi è PERICOLOSO !!!

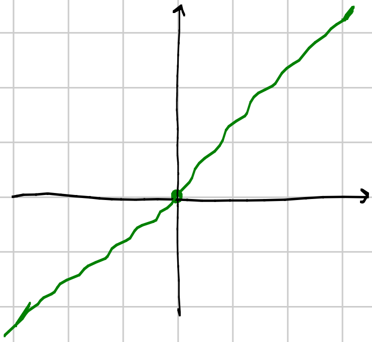
Metodo sicuro: risolvere $\underset{\overset{\shortparallel}{f(x)}}{\boxed{x - \sin x}} = 0$

Punto 1 $f(x)$ è DISPARI (differenza di 2 funzioni dispari). NON è periodica,

Punto 2 $f(x)$ definita e continua per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Da queste sole informazioni posso già concludere che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è surgettiva, quindi l' equazione ha almeno una soluzione.



Oss. $f(0) = 0$, quindi $x = 0$ è soluzione

Punto 3 Zeri e segno. Dovrei risolvere $f(x) = 0$, cioè $\sin x = x$, che è quello che non sono capace a fare.

Punto 4 Derivata e monotonia: f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 1 - \cos x$. È facile vedere che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Questo basta per dire che f è DEBOLMENTE crescente.

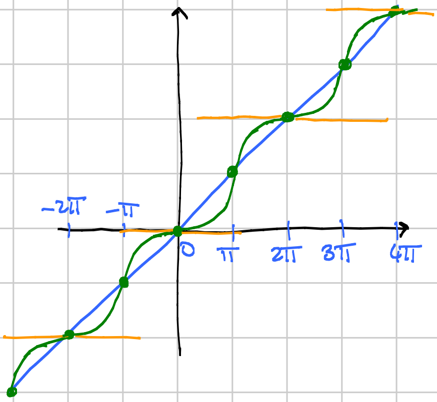
Ci piacerebbe che lo fosse strettamente

Vado a vedere dove $f'(x)$ si annulla. Risolvo
$f'(x) = 0 \iff \cos x = 1 \iff x = 2k\pi$
Quindi $f'(x) \geq 0$ sempre e $f'(x) = 0$ per $x = 2k\pi$, cioè sporadicamente (non in un intero intervallo)

Monotonia 3 $\Rightarrow$ f è strett. crescente su tutto $\mathbb{R}$.

Una volta che è strett. cresc. è iniettiva, dunque l'eq. ha sol. unica.

—o —o —



<u>Oss.</u> Abbiamo dim. che $f(x) = x - \sin x$ è strett. crescente.
Che succede alle oscillazioni causate dal sin x ?
Sappiamo che $f'(x) = 0 \iff x = 2k\pi$
Inoltre $f(x) = x \iff \sin x = 0$
$\iff x = k\pi$

<u>Oss.</u> I p.ti $x = 2k\pi$ sono p.ti in cui $f'(x) = 0$, quindi sono p.ti stazionari (retta tangente orizzontale). Si tratta per forza (essendo f monotona) di p.ti di flesso a tang. orizz. ascendenti (esercizio: verificarlo con il criterio delle derivate successive).

<u>Conclusione</u> La funzione $f(x) = x - \sin x$, vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva e surgettiva, quindi l'eq. $f(x) = \lambda$ ha sempre un'unica soluzione per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

—o —o —

<u>Esempio 2</u> Risolvere la disequazione $\underbrace{\boxed{x + 2\sin x}}_{\text{"}f(x)}\geq 0$

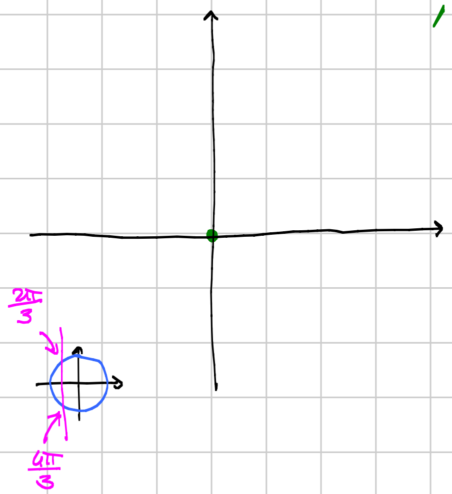
$\boxed{\text{Punto 1}}$ f è DISPARI

$\boxed{\text{Punto 2}}$ Definita e continua su tutto $\mathbb{R}$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\boxed{\text{Punto 3}}$ Zeri e segno. Non lo so fare (per ora).

$\boxed{\text{Punto 4}}$ Derivata e zone di monotonia. Derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 1+2\cos x$. Ora $f'(x)$ può essere sia >0 sia <0

<u>Oss.</u> $f(0)=0$ e $f'(0)=3$. Quindi dopo 0 per un po' cresce, ma prima o poi decresce.



Risolvo $f'(x)=0$, $f'(x)>0$, $f'(x)<0$

$f'(x)=0 \iff 1+2\cos x=0 \iff \cos x = -\frac{1}{2}$

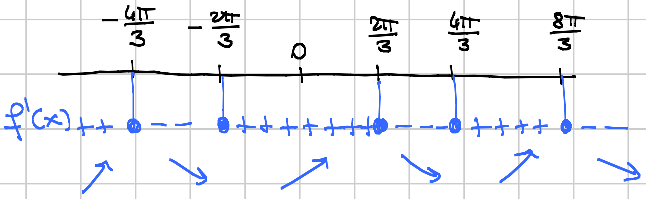
percorso ↓

$\iff x = \frac{2\pi}{3}+2k\pi$ oppure $x = \frac{4\pi}{3}+2k\pi$

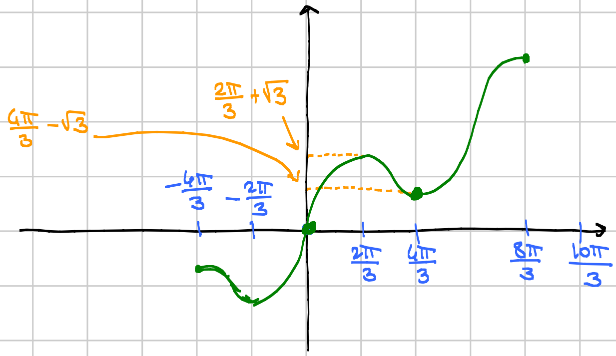
$f'(x)>0 \iff 1+2\cos x>0 \iff \cos x > -\frac{1}{2} \iff -\frac{2\pi}{3}+2k\pi < x < \frac{2\pi}{3}+2k\pi$

(evitare cose del tipo $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ o simili)

Rappresentiamo la situazione



Riportiamo questo sul grafico di $f(x)$



$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} + 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$$

Dopo $x = \frac{2\pi}{3}$, $f(x)$ scende. Ma quanto? Arriva sotto o oppure no?

Basta calcolare $f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + 2\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \underset{>4}{\boxed{\frac{4\pi}{3}}} - \underset{<2}{\boxed{\sqrt{3}}} > 2$

Quindi scende, ma anche nel minimo è >0.

Per $x<0$ la situazione è completamente analoga, solo ribaltata.

In $\frac{10\pi}{3}$ non c'è rischio che $f(x)<0$ per vari motivi

$\boxed{1^\circ \text{ motivo}}$ $\frac{10\pi}{3} > 10$, quindi $\frac{10\pi}{3} - 2\sin(\text{mostro}) > 8$

$\boxed{2^\circ \text{ motivo}}$ $\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ quindi

$$f\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \frac{10\pi}{3} - 2\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \frac{10\pi}{3} - 2\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$> \frac{4\pi}{3} - 2\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) > 0$$

Sostanzialmente: in tutti i p.ti pericolosi il sin vale uguale, ma x vale di più che in $\frac{4\pi}{3}$. Quindi se è andata bene in $\frac{4\pi}{3}$, va bene in tutti gli altri.

Conclusione: $x + 2\sin x \geq 0 \iff f(x) \geq 0 \iff x \geq 0$.
Questo risponde anche al punto 3.

—o—o—

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 053

Titolo nota 07/11/2012

Formula di Taylor con resto di Lagrange Caso con centro in $x_0 = 0$.

$$f(x) = \boxed{P_n(x)} + \boxed{o(x^n)} \qquad \text{per } x \to 0$$

resto di PEANO

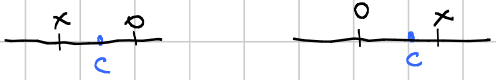
polinomio di Taylor di grado $\leq n$ ⇝ formula

$$f(x) = \boxed{P_n(x)} + \boxed{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\, x^{n+1}}$$

→ resto alla LAGRANGE

stesso polinomio di prima

Detto meglio: data una funzione $f(x)$ derivabile almeno $(n+1)$ volte, dato un intero $n \in \mathbb{N}$, e dato un punto $x \in \mathbb{R}$, esiste un p.to c compreso tra 0 e x per cui vale la formula di sopra.



Oss. Se scrivo esplicitamente la formula per $P_n(x)$ ottengo

al posto di 0

$$f(x) = \underbrace{\boxed{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\, x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n}}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\boxed{c})}{(n+1)!}\, x^{n+1}}$$

Resto di Lagrange, che è il "termine successivo" con c al posto di 0.

Oss. Per $n=0$ la formula diventa

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(c)}{1!}\, x, \qquad \text{cioè} \qquad f(x) = f(0) + f'(c)x$$

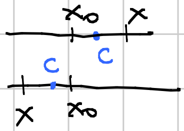
cioè $f(x) - f(0) = f'(c) \cdot x$, cioè il teorema di Lagrange.

$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$

Oss. Una formula analoga vale con centro in un p.to $x_0 \neq 0$.
Si ottiene

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$+ \boxed{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}} \leftarrow \text{resto di LAGRANGE}$$



Ovviamente c sta in un p.to misterioso tra x e x_0

Dim. Pongo $\varphi(x) = f(x) - P_n(x)$. Quali sono le proprietà di $\varphi(x)$.
Come visto a suo tempo, si ha che

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(n)}(0) = 0$$

Inoltre $\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \underset{\overset{\|}{0}}{\boxed{P_n^{(n+1)}(x)}} = f^{(n+1)}(x)$

perché la derivata $(n+1)$-esima di un polinomio di grado $\leq n$ è sempre $=0$.

Voglio dimostrare che

$$\frac{\varphi(x)}{x^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

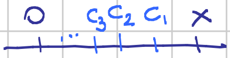
Questo è equivalente alla tesi.

Lemma Sia $\varphi(x)$ una funzione tale che $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(n)}(0) = 0$.
Allora

[all'epoca di Taylor-Peano la tesi era che $\varphi(x) = o(x^n)$]

si ha che esiste c compreso tra 0 e x tale che

$$\frac{\varphi(x)}{x^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$



Dim. Lemma

$$\frac{\varphi(x)}{x^{n+1}} = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^{n+1} - 0^{n+1}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchy con } f(x) = \varphi(x) \\ g(x) = x^{n+1}}}{=} \frac{\varphi'(c_1)}{(n+1)\cdot c_1^n} \begin{array}{l} \leftarrow f'(c_1) \\ \leftarrow g'(c_1) \end{array}$$

$$= \frac{\varphi'(c_1) - \varphi'(0)}{(n+1)\cdot c_1^n - (n+1)\cdot 0^n} \underset{\uparrow}{=} \frac{\varphi''(c_2)}{(n+1)\cdot n \cdot c_2^{n-1}} \quad \begin{matrix} \leftarrow f'(c_2) \\ \leftarrow g'(c_2) \end{matrix}$$

Cauchy con $f(x) = \varphi'(x)$ e $g(x) = (n+1)\cdot x^n$

Procedendo in questo modo per $(n+1)$ passaggi alla fine trovo $\dfrac{\varphi^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$

che è esattamente la tesi.

— o — o —

$\boxed{\text{Applicazione 1}}$ Calcolare $\sin \frac{1}{10}$ in maniera approssimata.

Uso Taylor con $n = 4$ $\qquad P_4(x) = x - \frac{1}{6}x^3$

Invece di scrivere $\sin \frac{1}{10}$ scrivo $P_4\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1000}$

$$= \frac{600 - 1}{6.000} = \frac{599}{6000}$$

Domanda: se approssimo $\sin \frac{1}{10}$ con $\frac{599}{6000}$, quale errore commetto?

$$\left| f(x) - P_4(x) \right| = \left| \frac{f^{(5)}(c)}{5!} x^5 \right| \qquad \text{Taylor-Lagrange con } n = 4$$

$$\left| \sin \frac{1}{10} - \frac{599}{6.000} \right| = \frac{|f^{(5)}(c)|}{120} \cdot \frac{1}{10^5} = \frac{|f^{(5)}(c)|}{12.000.000} \leq \frac{1}{12.000.000}$$

Infatti $|f^{(5)}(c)| = |\cos c| \leq 1$. Più in generale, per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha che $|f^{(k)}(c)| \leq 1$, qualunque sia c (se $f(x) = \sin x$).

Conclusione: l'errore commesso è $\leq \frac{1}{12.000.000}$

Riprova: $\frac{599}{6.000} = 0,099833\boxed{3}3 \qquad \sin \frac{1}{10} = 0,099833\boxed{4}\dots$

Quindi c'è un errore di 1 sulla settima cifra decimale.

— o — o —

Applicazione 2 Dimostrare che $e^x \geq 1+x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

1° modo Pongo $f(x) = e^x - 1 - x$ e dimostro, studiando la funzione, che $f(x) \geq 0$ sempre [Esercizio]

2° modo Taylor-Lagrange con $f(x) = e^x$ e $n = 1$

$$f(x) = P_1(x) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}x^2$$

$$e^x = 1 + x + \underbrace{\boxed{\frac{e^c}{2}x^2}}_{\geq 0} \geq 1 + x$$

—o —o —

Applicazione 3 Dimostrare che la serie di Taylor di $f(x) = \cos x$ converge per ogni x al valore $\cos x$, cioè

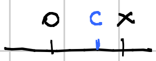
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

Devo dimostrare che le somme parziali convergono a $\cos x$, ma le somme parziali sono proprio i polinomi di Taylor. Allora per Taylor-Lagrange abbiamo che

$$\left|\cos x - \overset{\text{somma parziale}}{P_n(x)}\right| = \left|\frac{\overset{\text{compreso tra } -1 \text{ e } 1}{\boxed{f^{(n+1)}(c)}}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leq \boxed{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}$$

0 per $n \to +\infty$ perché fattoriale batte esponenziale

Oss. Funzionava in maniera simile anche con e^x:



$$|e^x - P_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = \frac{\overset{\leq e^x}{\boxed{e^c}}\,|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\leq e^x \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{\text{per } n \to +\infty} 0$$

—o —o —

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 054

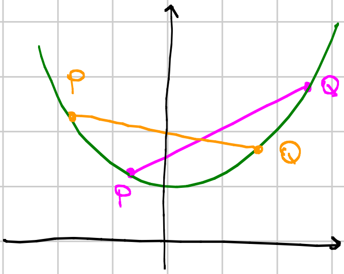
Titolo nota 07/11/2012

Funzioni convesse concave

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un insieme che rientra in una delle seguenti 3 tipologie

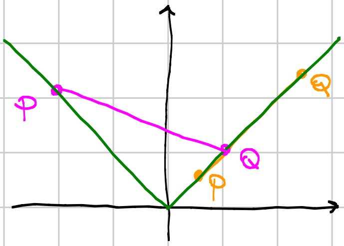
- tutto $\mathbb{R}$
- semiretta destra o sinistra, con o senza estremi: $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$
- intervallo, con o senza estremi: (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$.

Def. (geometrica) Sia I come sopra e sia $f: I \to \mathbb{R}$, Si dice che f è convessa in I se, comunque si prendano 2 p.ti P e Q sul grafico, si ha che tutto il segmento PQ sta "al di sopra" del grafico della funzione. Si dice che f è strettamente convessa se il segmento tocca il grafico solo in P e Q e altrimenti sta veramente sopra.



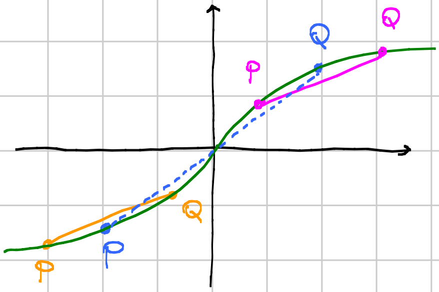
Esempi $f(x) = x^2$ è strettamente convessa su tutto $\mathbb{R}$.

$f(x) = |x|$ è convessa su tutto $\mathbb{R}$, ma non strettamente convessa (se prendo P e Q "dalla stessa parte", il segmento sta sopra al grafico in senso debole, perchè coincide con il grafico stesso.



Def. Una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ si dice concava o strettamente concava se vale un discorso simile, solo con il segmento che sta sotto il grafico.

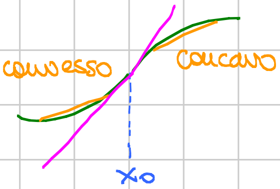
Esempio $f(x) = \log x$ è concava in $(0, +\infty)$



Esempio $f(x) = \arctan x$ è
- concava in $[0, +\infty)$
- convessa in $(-\infty, 0]$

Globalmente, cioè su tutto $\mathbb{R}$, non è né concava, né convessa.
Ci sono anche segmenti che non stanno né sopra, né sotto il grafico.

Def. Un p.to x_0 si dice p.to di flesso se $f(x)$ è convessa in un intorno sinistro di x_0 e concava in un intorno destro di x_0, o viceversa.



In un p.to di flesso la retta tangente, se esiste, "attraversa il grafico"

Come riconoscere i tratti di convessità / concavità

Oss. Una funzione convessa o concava non è obbligata ad avere nemmeno la derivata prima (basta pensare a $f(x) = |x|$).
Quindi una ricetta universale basata sulle derivate non c'è.

Teorema (convessità / concavità sulla base della derivata seconda).
Sia $f : I \to \mathbb{R}$. Supponiamo che $f''(x)$ esista per ogni $x \in I$.
Allora abbiamo che:

① $\boxed{f \text{ strett. convessa in } I \Rightarrow f''(x) > 0 \text{ per ogni } x \in I}$ FALSO
② f convessa in $I \Rightarrow f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$
③ $f''(x) > 0$ per ogni $x \in I \Rightarrow f$ strett. convessa in I
④ $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in I \Rightarrow f$ convessa in I.

Achtung! Se anche f è strett. convessa in I, posso dedurre solo che $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$.

Esempio $f(x) = x^4$ è convessa STRETTAMENTE su tutto $\mathbb{R}$. Tuttavia $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$ si annulla per $x=0$.

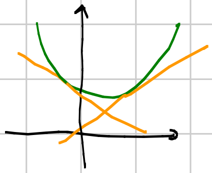
Oss. Per la concavità valgono discorsi analoghi solo con <0 e ≤ 0 per $f''(x)$

Achtung! Se in un p.to x_0 si annulla $f''(x)$, NON è detto che x_0 sia un p.to di flesso. Potrebbe essere un p.to di max/min, dipende dalle derivate successive.

Proprietà delle funzioni convesse Sia $f: I \to \mathbb{R}$ convessa

① $f'(x)$ è crescente (strettamente o debolmente a seconda dei casi).
[Se esiste $f''(x)$, il segno di $f''(x)$ è legato alla monotonia di $f'(x)$]

② $f(x)$ sta "sopra" le rette tangenti al suo grafico.



[Dim: supponiamo che esista $f''(x)$, allora per Taylor-Lagrange abbiamo che

$$\boxed{f(x)} = \boxed{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)} + \boxed{\frac{f''(c)}{2}(x-x_0)^2}$$

$\uparrow$ $f(x)$

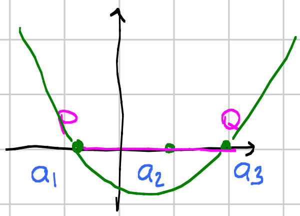
$\uparrow$ Equazione della retta tang. al grafico nel p.to $(x_0, f(x_0))$ (passa per il p.to giusto e ha coeff. angolare giusto)

≥ 0 perché $f''(c) \ge 0$ e $(x-x_0)^2 \ge 0$

$\ge f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ Quindi $f(x) \ge$ retta tangente.

Esercizio Se $f(x)$ è convessa, quante soluzioni al max può avere $f(x)=0$?
Infinite !!!
E se fosse strettamente convessa?
Al massimo 2 !!!
Perché?

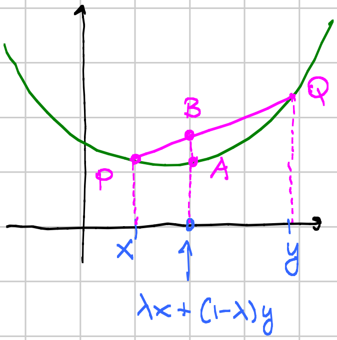
Supponiamo che ce ne siano almeno 3: a_1, a_2, a_3. Vuol dire che $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = 0$. Considero i p.ti P, Q corrispondenti ad a_1 ed a_3. Il grafico deve stare sotto (veramente) al segmento PQ, quindi in a_2 f non può valere 0.



— o — o —

Def. (vera) $f: I \to \mathbb{R}$ si dice convessa se

$$\underbrace{\boxed{f(\underbrace{\lambda x+(1-\lambda)y}_{\text{p.to generico compreso fra } x \text{ e } y})}}_{\text{ordinata di A}} \le \underbrace{\boxed{\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)}}_{\text{ordinata di B}} \qquad \forall x \in I \quad \forall y \in I \quad \forall \lambda \in [0,1]$$



[Esercizio] $f(x)$ e $g(x)$ strettamente convesse e senza tratti di grafico in comune. Quante sol. ha al max

$$f(x) = g(x) \quad ?$$

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE

Titolo nota 08/11/2012

ASINTOTI → ORIZZONTALI
→ VERTICALI
→ OBLIQUI

Asintoti orizzontali Una retta $y=a$ si dice asintoto orizz. di $f(x)$ per $x \to +\infty$ se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$$

Analogamente, $y=a$ si dice asintoto orizz. di $f(x)$ per $x \to -\infty$ se

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a,$$

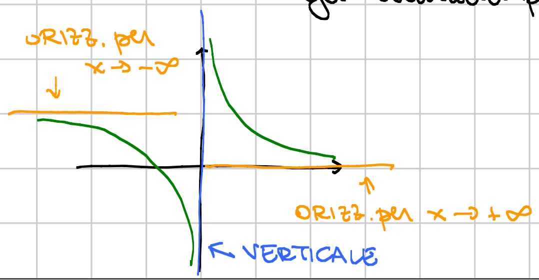
Operativamente: gli asintoti orizzontali, che non sono obbligati ad esistere e sono al max 2, si determinano facendo il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

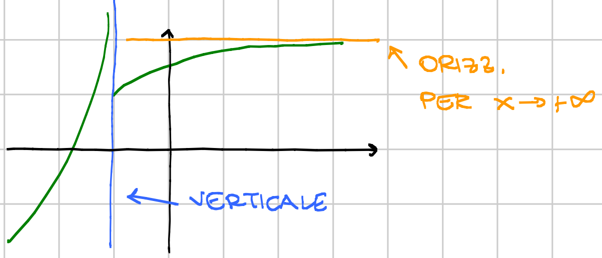
— o —

Asintoti verticali Una retta $x=a$ è asintoto verticale per $f(x)$ se succede almeno una di queste 4 possibilità

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

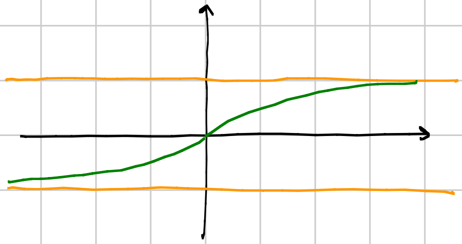
Operativamente: gli asintoti verticali, che non sono obbligati ad esistere, e possono essere quanti gli pare, si determinano cercando gli eventuali p.ti a in cui $f(x)$ tende a $\pm\infty$ (a dx o sx).





<u>Esempio 1</u> $f(x) = \arctan x$. Allora esistono 2 asintoti orizzontali

- $y = \frac{\pi}{2}$ per $x \to +\infty$
- $y = -\frac{\pi}{2}$ per $x \to -\infty$



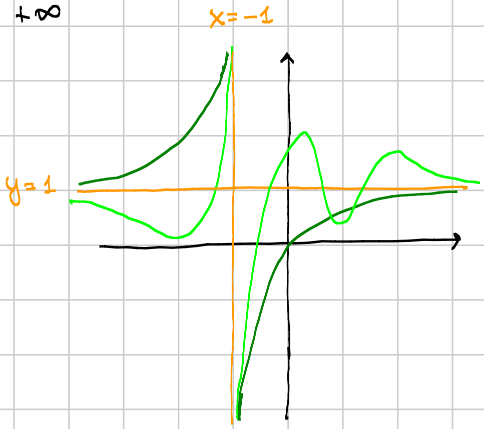
<u>Esempio 2</u> $f(x) = \frac{x}{x+1}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \Rightarrow y=1 \text{ è asint. orizz. per } x\to+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \Rightarrow y=1 \text{ è asint. orizz. per } x\to-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{x}{x+1} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty \Rightarrow x=1 \text{ è asint. vert.}$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x}{x+1} = \left[\frac{-1}{0^-}\right] = +\infty$$

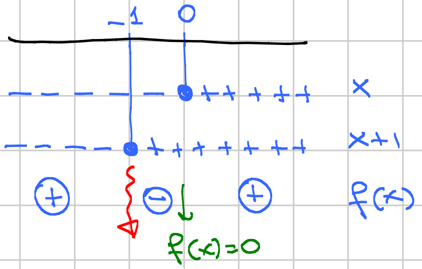


Studio di funzione per decidere tra le varie possibilità.

$\boxed{\text{Punto 1}}$ Simmetrie → nulla

$\boxed{\text{Punto 2}}$ Definita e continua in $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, cioè per $x \neq -1$.
Limiti agli estremi della zona di continuità: già fatti.

$\boxed{\text{Punto 3}}$ Zeri e segno: risolvere $f(x)=0$, $f(x)>0$, $f(x)<0$



$f(x) = 0 \iff x = 0$

$f(x) > 0 \iff x \in (-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$

$f(x) < 0 \iff x \in (-1,0)$

Si vede che il segno è coerente con i limiti trovati per $x \to -1^+$ e $x \to -1^-$

Per vedere il posizionamento del grafico rispetto all'asintoto orizzontale $y=1$ ci sono almeno 2 opzioni:

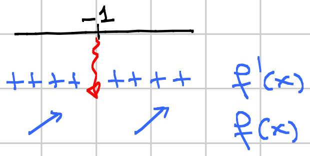
→ risolvere $f(x) = 1$, $f(x) > 1$, $f(x) < 1$ (provare per esercizio)

→ studiare le zone di monotonia di $f(x)$

$\boxed{\text{Punto 4}}$ Derivabilità e segno di $f'(x)$

$$f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$f'(x) = 0$ mai, $f'(x) > 0$ sempre per $x \neq -1$, $f'(x) < 0$ mai



Questo conferma il 1° grafico.

Achtung! Abbiamo dim. che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Questo NON vuol dire che $f(x)$ è crescente in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

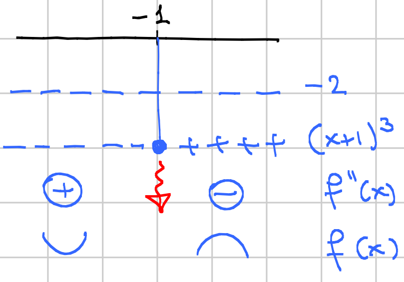
(ad esempio $3 > -3$, ma non è vero che $f(3) > f(-3)$)

L'implicazione $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crescente vale solo nelle zone "senza buchi".

Quindi nell'esempio posso dedurre che $f(x)$ è strett. crescente in $(-\infty, -1)$ e in $(-1, +\infty)$.

$\boxed{\text{Punto 5}}$ Zone di concavità-convessità.

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \qquad f''(x) = \frac{-2}{(x+1)^3} \qquad \left[(x+1)^{-2}\right]' = -2(x+1)^{-3} \cdot 1$$



$f''(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -1) \Rightarrow$ convessa

$f''(x) < 0$ per $x \in (-1, +\infty) \Rightarrow$ concava

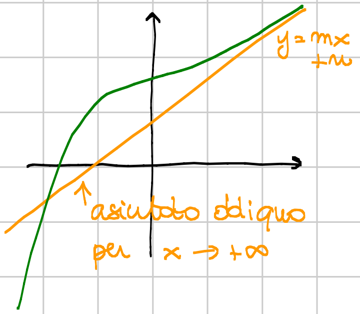
Asintoti obliqui Una retta $y=mx+n$ è asintoto obliquo di $f(x)$ per $x \to -\infty$ se

$$\lim_{x\to-\infty} \left(f(x)-mx-n\right)=0$$

Analogamente, la stessa retta è asintoto obliquo di $f(x)$ per $x\to+\infty$ se

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x)-mx-n\right)=0$$

Graficamente: la distanza tra $f(x)$ e la retta $y=mx+n$ tende a 0 per $x\to+\infty$ o per $x\to-\infty$



Operativamente: come calcolare m ed n?

$$\boxed{m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}} \qquad \boxed{n=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)}$$

(A $-\infty$ stessa cosa con limiti per $x\to-\infty$)

Oss. Se il limite che definisce m è del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$, si può provare ad usare Hôpital, riducendosi a $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$

$\boxed{\text{Dim.}}$

$$\frac{f(x)}{x} = \underbrace{\frac{\overset{\substack{0 \text{ se retta è}\\ \uparrow\ \text{asint. obliquo}}}{\boxed{f(x)-mx-n}}}{\underset{\substack{\downarrow\\+\infty}}{\boxed{x}}}}_{\substack{\downarrow\\0}} + \underbrace{\boxed{\frac{mx+n}{x}}}_{\substack{\downarrow\\m}} \to m$$

$$f(x)-mx = \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\boxed{f(x)-mx-n}} + \underset{\substack{\downarrow\\n}}{\boxed{n}} \to n$$

Quindi se la retta $y=mx+n$ è asint. obliquo, allora $\frac{f(x)}{x}\to m$

e $f(x)-mx\to n$

D'altra parte, se m ed n sono dati dalle formule precedenti, allora

$$\underset{n}{\boxed{f(x)-mx}}\ \underset{-n}{-n} \to 0$$, quindi la retta è asintoto obliquo.

— o —

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 056

Titolo nota 08/11/2012

Estensioni del teorema di Weierstrass

1° caso: funzioni periodiche $\max\{\log(10+3\cos^3 x)+\sin(5x) : x\in\mathbb{R}\}$ esiste o no?

La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$ perchè non ci sono problemi perché l'argomento di log vale ≥ 7. Peró $\mathbb{R}$ non è un intervallo $[a,b]$, quindi non sono autorizzato ad usare W. Allora BOH.

Tuttavia $f(x)$ è PERIODICA di periodo 2π perché $f(x+2\pi)=f(x)$.

Fatto generale Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è continua e periodica, allora esistono per forza $\max\{f(x) : x\in\mathbb{R}\}$

$\min\{f(x) : x\in\mathbb{R}\}$.

Questi a loro volta coincidono con $\max\{f(x) : x\in[0,T]\}$

$\min\{f(x) : x\in[0,T]\}$

dove T è un periodo di $f(x)$.

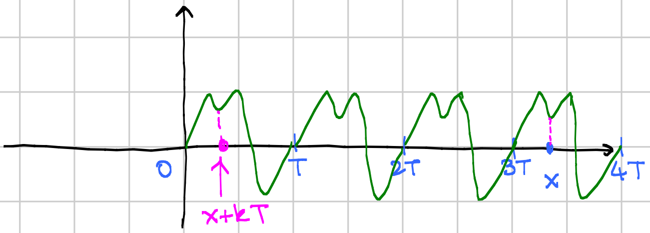
Dim. Sia $M=\max\{f(x) : x\in[0,T]\}$. Questo esiste per W. Sia $x_0\in[0,T]$ uno dei corrispondenti p.ti di max.

Voglio dim. che $M=\max\{f(x) : x\in\mathbb{R}\}$. Devo fare 2 verifiche:

(i) esiste $x\in\mathbb{R}$ t.c. $f(x)=M$ (basta prendere $x=x_0$)

(ii) per ogni $x\in\mathbb{R}$ si ha che $f(x)\leq M$. Ora per ogni $x\in\mathbb{R}$ esiste $k\in\mathbb{Z}$ t.c. $x+kT\in[0,T]$ (cioè aggiungendo o togliendo un multiplo di T casco in $[0,T]$). Ora

$$f(x) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{per periodicità}}}{=} f(x+kT) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{perchè } M \text{ è il max in } [0,T].}}{\leq} M$$



<u>Esempio 1</u> $\min\{ e^{\cos x} + \arctan(\sin x) : x \in \mathbb{R} \}$ esiste.

Quanti sono i p.ti di minimo in $\mathbb{R}$? Infiniti! Infatti ce n'è almeno uno in $[0, 2\pi]$, e poi ci sono tutti i suoi traslati.

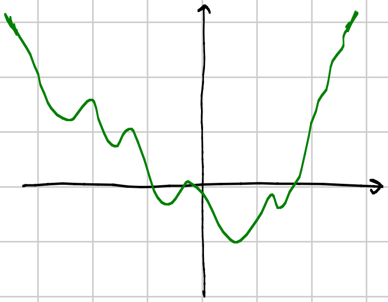
— o — o —

<u>Esempio 2</u> $\min\{ \underbrace{\sin x + \arctan(e^x) + x^4}_{f(x)} : x \in \mathbb{R} \}$ esiste!!

Si vede che $f(x)$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$ e

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Queste informazioni bastano per garantire l'esistenza del minimo.



$\boxed{\text{Fatto generale}}$ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua t.c.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Allora $\min\{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$ esiste per forza. (ovviamente $\sup = +\infty$)

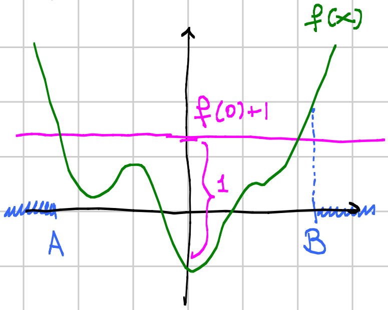
$\boxed{\text{Dim.:}}$ L'idea è che la battaglia per il minimo non si gioca agli estremi ma su un intervallo centrale in cui posso usare W.

Formalmente.

Considero $f(0)+1$.

Poichè $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$ esiste $B > 0$ t.c. $f(x) \geq f(0)+1$ $\forall x \geq B$

Poichè $f(x) \to +\infty$ per $x \to -\infty$ esiste $A < 0$ t.c. $f(x) \geq f(0)+1$ $\forall x \leq A$.



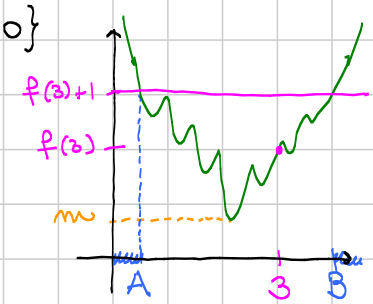
Pongo ora $m = \min\{ f(x) : x \in [A,B] \}$. Questo esiste per W.

Dico che m è anche $\min\{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$.

Sia x_0 un p.to di minimo in $[A,B]$. Dico che $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ci sono 3 casi

- Se $x \in [A,B]$ è banale (x_0 è p.to di min. in $[A,B]$)
- Se $x \geq B$, allora $f(x) \geq f(0)+1 \geq f(0) \underset{\uparrow \text{ perchè } 0 \in [A,B]}{\geq} f(x_0)$
- Se $x \leq A$, stessa cosa.

Esempio 3 $\min \left\{ \underbrace{\boxed{\frac{1}{x} + x^3 + \arctan(x^2)}}_{= f(x)} : x > 0 \right\}$



$f(x)$ è definita e continua in $(0,+\infty)$ e

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

Questo basta per garantire l'esistenza del minimo.

[Come prima, esiste un intervallo $[A,B]$ con $0 < A < 3 < B$ t.c.
$f(x) \geq f(3)+1 \quad \forall\, x \geq B$ e
$f(x) \geq f(3)+1 \quad \forall\, x \in (0,A]$.
Quindi la battaglia per il minimo si gioca in $[A,B]$ dove vale W.

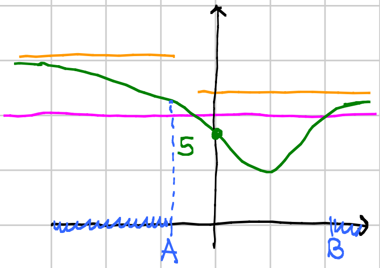
—o—o—

Altre varianti:

→ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua con $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Allora esiste $\max\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$

→ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua con $f(0) = 5$ e
$\lim_{x \to +\infty} f(x) > 5$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) > 5$



Allora esiste $\min\{f(x) ; x \in \mathbb{R}\}$

Oss. Una volta che so che il minimo esiste (ad esempio su tutto $\mathbb{R}$) i p.ti di minimo li cerco in 2 categorie

→ p.ti stazionari interni (quelli in cui $f'(x) = 0$)

→ p.ti singolari interni (quelli in cui $f'(x)$ non esiste).

Esempio $\{x^2-\sin(x^3) : x\in\mathbb{R}\}$

$\sup\{ \qquad \} = +\infty$ (basta fare $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$)

$\max\{ \qquad \}$ N.E.

Il minimo esiste perchè f è continua in $\mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

La funzione $f(x) = x^8 + \log(1+x^{10}) - \arctan(e^{x^2})$, vista come $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è iniettiva e/o surgettiva ?

NO! Basta osservare che è continua e $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

Infatti il minimo m esiste e ora

- per $\lambda < m$ l'eq. $f(x)=\lambda$ ha 0 sol.
  $\Rightarrow$ addio surgettività
- per $\lambda > m$ l'eq. $f(x)=\lambda$ ha almeno 2 sol.
  $\Rightarrow$ addio iniettività.

—o —o —

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 057

Titolo nota 09/11/2012

Disuguaglianze classiche

$\sin x \le x \quad \forall x \ge 0$ con = se e solo se $x=0$

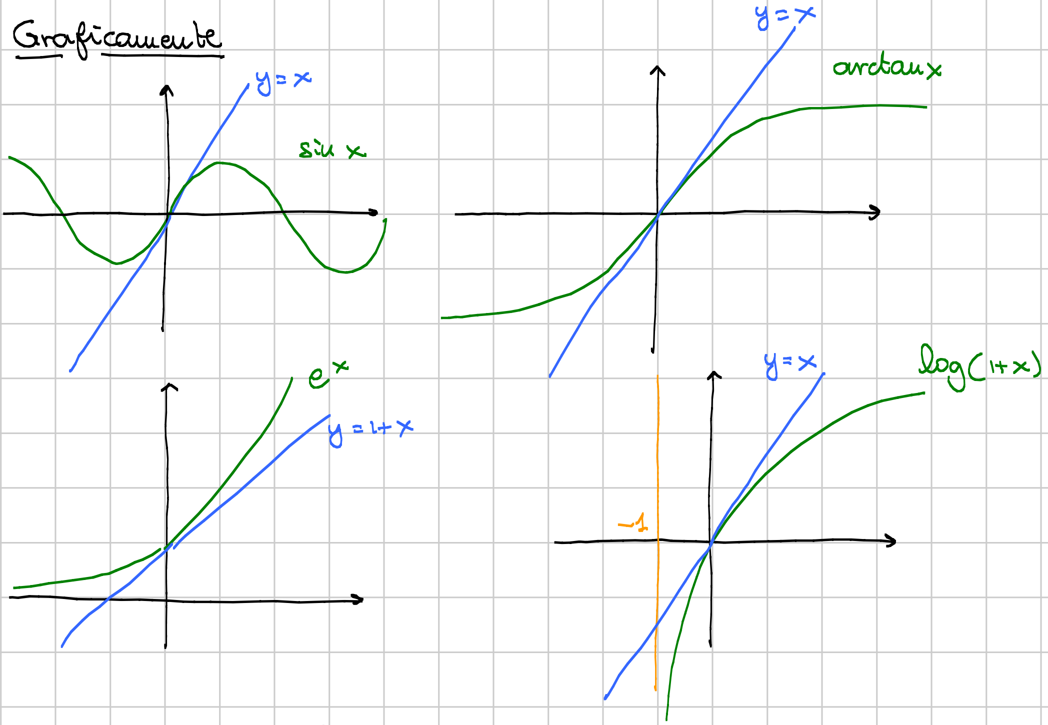
$\cos x \ge 1 - \frac{1}{2}x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ con = se e solo se $x=0$

$\arctan x \le x \quad \forall x \ge 0$ " " "

$e^x \ge 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ " " "

$\log(1+x) \le x \quad \forall x > -1$ " " "

Graficamente



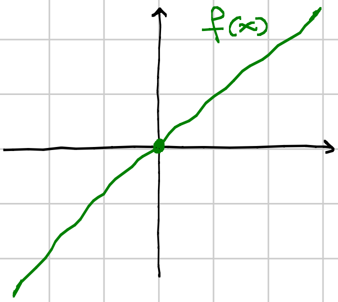
Come si dimostrano? Metodo universale: studio di funzioni o in alternativa Taylor-Lagrange.

$\boxed{\sin x \le x}$ Pongo $f(x) = x - \sin x$ e la studio.

Funzione dispari, definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$,

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 1 - \cos x$



$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \iff \cos x = 1 \iff x = 2k\pi$

Quindi ho $f'(x) \geq 0$ sempre con annullamento sporadico, quindi per Monotonia 3 si ha che $f(x)$ è strettamente monotona. Questo basta per concludere che

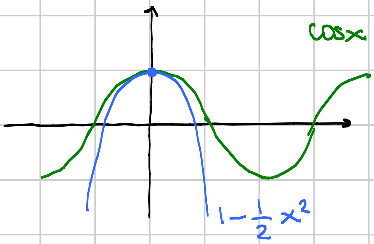
$f(x) = 0 \iff x = 0$, cioè $\sin x = x \iff x = 0$

$f(x) > 0 \iff x > 0$, cioè $\sin x < x \iff x > 0$

" $<$ " $\quad x < 0$ $\quad$ " $\quad \sin x > x \iff x < 0$.

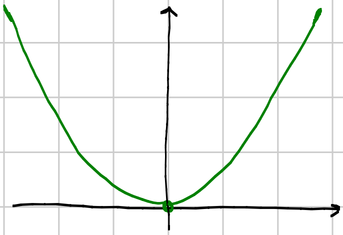
— o — o —

$\boxed{\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2}$



Studio la funzione $f(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$

Funzione pari, definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$



Per capire l'andamento, studio la monotonia.

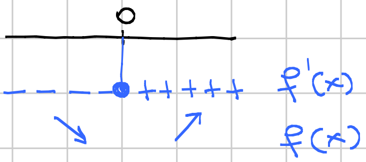
$f'(x) = -\sin x + x$ (esiste in tutto $\mathbb{R}$)

Studio il segno di $f'(x)$.

$f'(x) = 0 \iff \sin x = x \iff x = 0$

$f'(x) > 0 \iff -\sin x + x > 0 \iff x > \sin x \iff x > 0$

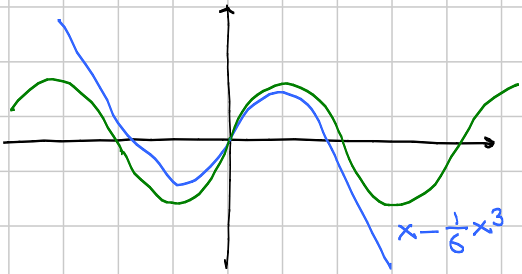
$f'(x) < 0$ .... $\iff x < 0$



Questo basta per concludere che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

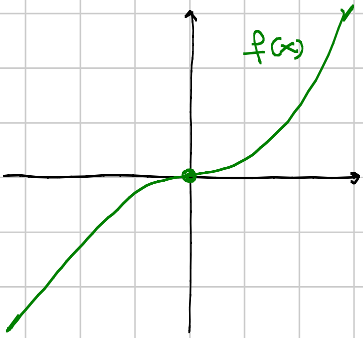
— o — o —

$\boxed{\sin x \geq x - \frac{1}{6}x^3}$



L'idea è che la disuguaglianza sia vera $\forall x \geq 0$ con $= \iff x = 0$

Come prima studio $f(x) = \sin x - x + \frac{1}{6}x^3$



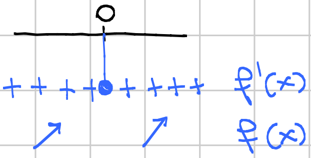
Funzione dispari, $f(0)=0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$

$f'(x) = 0 \iff \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 \iff x=0$ (studio precedente)

$f'(x) > 0 \iff \cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2 \iff x \neq 0$ (studio precedente)



Conclusione: $f(x) > 0 \iff x > 0$

$f(x) = 0 \iff x = 0$, cioè

$\sin x > x - \frac{1}{6}x^3 \iff x > 0$

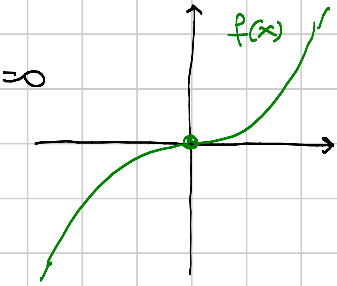
$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 \iff x = 0$

— o — o —

Esercizio: scrivere e dimostrare la successiva disuguaglianza (riguarda cos)

— o — o —

$\boxed{\arctan x \leq x}$ Considero $f(x) = x - \arctan x$



Funzione dispari, definita e continua in tutto $\mathbb{R}$, $f(0)=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Spero che sia strettamente crescente

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{\cancel{1}+x^2-\cancel{1}}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R} \\ f'(x) = 0 \iff x = 0 \text{ (sporadico)} \end{array}\right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Monotonia 3}}}{\Longrightarrow}$$ f è strettamente crescente, quindi

$f(x) > 0 \iff x > 0$, cioè $x > \arctan x \iff x > 0$

$f(x) = 0 \iff x = 0$, cioè $x = \arctan x \iff x = 0$.

<u>Soluzione alternativa</u>: Taylor-Lagrange con $n=1$

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(c)\,\frac{x^2}{2} \qquad \text{dove } c \text{ sta tra } 0 \text{ e } x$$

La applico con $f(x) = \arctan x$: $\quad \arctan x = \underbrace{\boxed{x}}_{P_1(x)} + \underbrace{\boxed{\frac{f''(c)}{2}\,x^2}}_{\text{resto}}$

Si tratta di capire il segno del resto

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,, \qquad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,.$$ Ci sono 2 casi

① Se $x>0$, allora $\underset{}{0 \quad c \quad x}$ $\quad c>0$, quindi $f''(c)<0$, quindi resto <0. Ma allora

$$\arctan x = x + \text{roba neg} < x$$

② Se $x<0$, allora $x \quad c \quad 0$ $\quad c<0$, quindi $f''(c)>0$ e resto >0

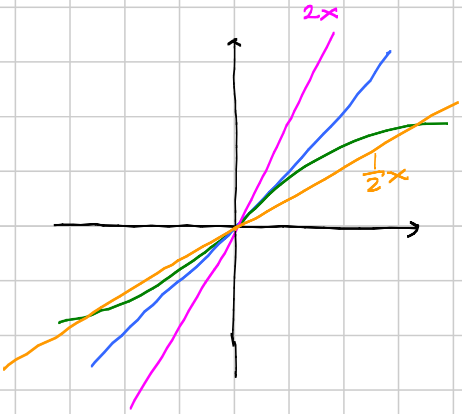
Ma allora

$$\arctan x = x + \text{roba pos.} > x.$$

Altra interpretazione: per $x>0$ si ha che $\arctan x$ è concava ($f''(x)<0$), quindi sta sotto alle sue rette tangenti, compresa $y=x$ che è la retta tangente nell'origine. Per $x<0$ diventa convessa, dunque sta sopra la retta tangente.

—o—o—

<u>Oss.</u> Come è messo il grafico di $\arctan x$ rispetto a $2x$ e a $\frac{1}{2}x$



$\arctan x \le 2x \quad \forall x \ge 0$ con $=$ $\iff$ $x=0$.

Invece con $\frac{1}{2}x$ ci sono 3 intersezioni

[Esercizio: verificarlo con studio di funzioni].

ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 058

Titolo nota 09/11/2012

FUNZIONI LIPSCHITZIANE

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che f è Lipschitziana in A (sempre precisare l'insieme) se esiste una costante L tale che

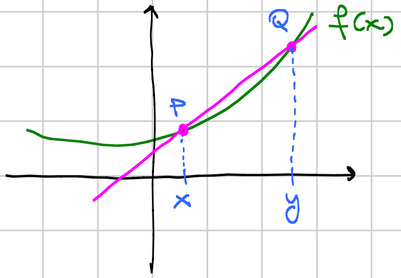
$$|f(y)-f(x)| \le L\,|x-y| \qquad \forall x \in A,\ \forall y \in A$$

Oss. Se un certo valore di L va bene, allora vanno bene anche i valori successivi. Il più piccolo valore di L che va bene si dice costante di Lipschitz di f in A.

Significato geometrico Dividendo (possibile quando $x \neq y$) si ottiene

$$\left|\boxed{\frac{f(y)-f(x)}{y-x}}\right| \le L$$

coeff. angolare della retta che congiunge i p.ti P e Q del grafico corrispondenti a x e y.

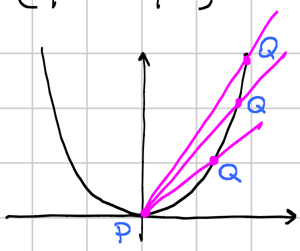


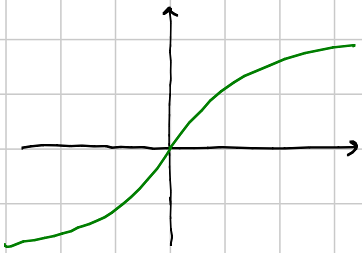
Quindi: funzione Lipschitziana $\Longleftrightarrow$ c'è un controllo sulla pendenza delle rette che congiungono 2 p.ti del grafico (qualunque)

Esempi $f(x) = x^2$, $A = \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$ NON è LIP su tutto $\mathbb{R}$

Idea: più sposto il punto Q verso l'alto, più la retta PQ diventa pendente.

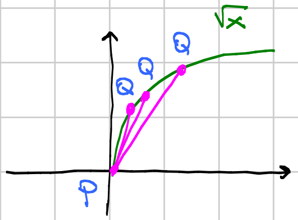




$f(x) = \arctan x$ è LIP su tutto $\mathbb{R}$ SI

$f(x) = x^2$ è LIP in $[-100,100]$ SI

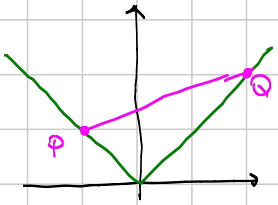
$f(x) = \sqrt{x}$ è LIP in $[1,+\infty)$ SI



$f(x) = \sqrt{x}$ è LIP in $[0,+\infty)$ NO

Su tutto $[0,+\infty)$ la risposta è no perché se prendo P nell'origine e Q sempre più vicino a P ottengo pendenze sempre più elevate (la tangente nell'origine è la retta verticale)

— o — o —



Oss. Una funzione Lipschitziana non è obbligata ad essere derivabile. Esempio: $f(x) = |x|$ è Lip. su tutto $\mathbb{R}$

— o — o —

Teorema Sia I un insieme come nella def. di funzione convessa (tutto $\mathbb{R}$, semiretta, intervallo), e sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione DERIVABILE.
Allora f è Lip. in I se e solo se $f'(x)$ è limitata in I.
Inoltre la costante di Lip. di f in I è data dalla formula

$$L = \sup\{|f'(x)| : x \in I\}$$

Dim. Supponiamo che $f'(x)$ sia limitata, sia $L = \sup\{|f'(x)| : x \in I\}$ e mostriamo che

$$|f(y) - f(x)| \leq L\,|y-x| \qquad \forall x \in I,\ \forall y \in I$$

Per il teo. di Lagrange abbiamo che

$$f(y) - f(x) = f'(c)\cdot(y-x)$$ dove c sta tra x e y, quindi

$$|f(y)-f(x)| = \underbrace{|f'(c)|}_{\leq L}\cdot|y-x| \leq L\cdot|y-x|$$

Viceversa, supponiamo $f(x)$ Lip. con costante L. Allora tutti i rapporti incrementali sono compresi tra $-L$ ed L, quindi anche la derivata è compresa tra $-L$ ed L, quindi è limitata.

— o — o —

Operativamente: una funzione derivabile è Lip. in un certo insieme se e solo se la sua derivata è limitata in quell'insieme.

Esempio 1 $f(x) = x^2$, $A = [0,+\infty)$

$f'(x) = 2x$ Ora

$$\sup\{|f'(x)| : x \in A\} = \sup\{|2x| : x \geq 0\} = +\infty$$

quindi x^2 non è Lip. in $[0,+\infty)$.

Esempio 2 $f(x) = x^2$, $A = [-100, 100]$ $f'(x) = 2x$

$$\sup\{|f'(x)| : x \in A\} = \sup\{|2x| : x \in [-100,100]\} = 200 = L$$

Quindi x^2 è Lip. in $[-100,100]$ con costante $L = 200$, cioè

$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y|$

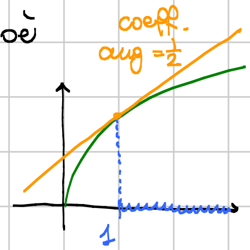
$$|x^2 - y^2| \leq 200\,|x-y| \qquad \forall x \in [-100,100], \ \forall y \in [-100,100].$$

Esempio 3 $f(x) = \sqrt{x}$, $A = [1,+\infty)$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\sup\{|f'(x)| : x \in A\} = \sup\left\{\frac{1}{2\sqrt{x}} : x \geq 1\right\} = \frac{1}{2} = L$$

Quindi $\sqrt{x}$ è Lip. in $[1,+\infty)$ con costante $L = \frac{1}{2}$, cioè

$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \frac{1}{2}\,|y-x| \qquad \forall x \geq 1, \ \forall y \geq 1$$



Esempio 4 $f(x) = \cos x$, $A = \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin x$

$$\sup\{|f'(x)| : x \in A\} = \sup\{|\sin x| : x \in \mathbb{R}\} = 1$$

Quindi è Lip. con costante $L = 1$, cioè $|\cos y - \cos x| \leq |y - x|$

Disuguaglianze classiche di Lipschitzianità

$$|\cos y - \cos x| \le |y-x| \qquad \forall x\in\mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R}$$
$$|\sin y - \sin x| \le |y-x| \qquad " \quad "$$
$$|\arctan y - \arctan x| \le |y-x| \qquad " \quad "$$

Per verificare l'ultima devo dim. che $f(x) = \arctan x$ è Lip. con $L=1$ su tutto $\mathbb{R}$:

$$L = \sup\{|f'(x)| : x\in\mathbb{R}\} = \sup\left\{\frac{1}{1+x^2} : x \in \mathbb{R}\right\} = 1.$$

<u>Esempio 5</u> $f(x) = \cos(x^2)$ $A = [-3,8]$

Sicuramente è lipschitziana. Devo fare

$$\sup\{\underbrace{\boxed{|f'(x)|}}_{\text{funzione continua}} : x \in \underbrace{[-3,8]}_{\text{intervallo con estremi}}\} \underset{\text{WEIERSTRASS}}{=} \max\{|f'(x)| : x\in[-3,8]\} = \text{Numero (non } +\infty)$$

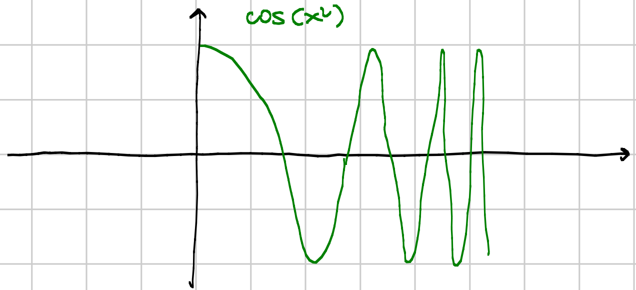
Il calcolo esplicito del sup/max serve solo per conoscere l'esatta costante L.

<u>Esempio 6</u> $f(x) = \cos(x^2)$ $A = \mathbb{R}$

$$\sup\{|f'(x)| : x\in\mathbb{R}\} = \sup\{|-2x\cdot\sin(x^2)| : x\in\mathbb{R}\} = +\infty$$

Basta prendere x grandi con $\sin(x^2) = 1$, cioè $x^2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, cioè

$$x = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}.$$

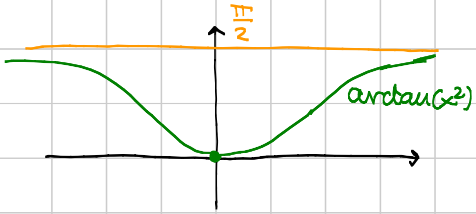


più le oscillazioni si avvicinano, più aumentano le pendenze sul grafico.

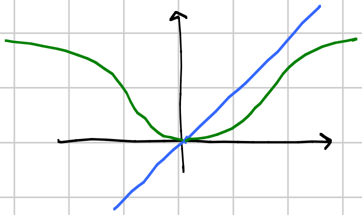
ANALISI MATEMATICA 1 – LEZIONE 059

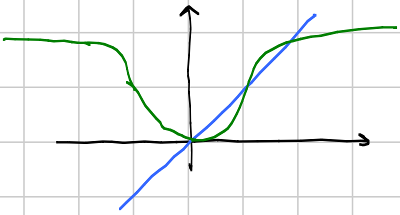
Titolo nota 09/11/2012

Esempio 1 Risolvere la disequazione $\arctan(x^2) \leq x$

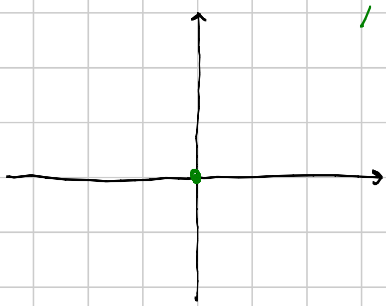


Come è fatta $\arctan(x^2)$?
Se vado a sovrapporre con x non è chiaro cosa succede





Non è chiara la situazione dalla sovrapposizione dei grafici.



Studio quindi $f(x) = x - \arctan(x^2)$
Nessuna simmetria
Definita e continua su tutto $\mathbb{R}$
$f(0) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Se fosse monotona... proviamo

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^4} = \frac{1+x^4-2x}{1+x^4}$$

. Denominatore ≥ 1 sempre, quindi il segno di $f'(x)$ dipende unicamente dal segno del numeratore.

Devo risolvere $x^4 - 2x + 1 = 0 \quad > 0 \quad < 0$.

Si vede a occhio che $x = 1$ è soluzione, quindi posso dividere per $(x-1)$

$$\begin{array}{l|l} x^4 \qquad -2x+1 & x-1 \\ \hline -x^4 + x^3 & x^3+x^2+x-1 \\ \hline // \quad x^3 \qquad -2x+1 & \\ -x^3 + x^2 & \\ \hline // \quad x^2 - 2x + 1 & \\ -x^2 + x & \\ \hline // \quad -x+1 & \\ x - 1 & \\ \hline // \quad // & \end{array}$$

Quindi

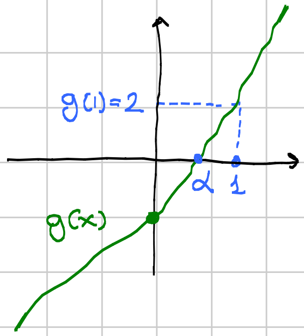
$(x^4 - 2x + 1) = (x-1)(x^3+x^2+x-1)$
Resta da capire il segno di
$x^3 + x^2 + x - 1$

Studio da una parte la funzione $g(x) = x^3+x^2+x-1$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \qquad g(0) = -1$

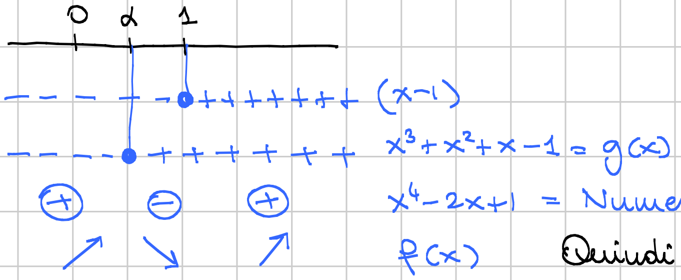
$g'(x) = 3x^2+2x+1$

$g'(x) = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{-2}}{3}$ NON CI SONO RADICI



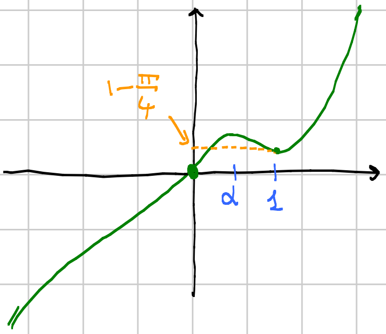
Quindi $g'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi g è strettamente crescente.

In particolare $g(x)$ si annulla in un UNICO p.to misterioso α. Devo capire se $\alpha < 1$ oppure $\alpha > 1$. Calcolo $g(1) = 2$



Quindi $f(x)$ non è monotona

Calcolo $f(1)$ per capire se scende sotto zero oppure no.



$f(1) = 1 - \arctan 1 = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$

Conclusione

$f(x) > 0$ per ogni $x > 0$ $\qquad \arctan(x^2) < x$ per ogni $x > 0$.

$f(x) = 0 \iff x = 0$

$f(x) < 0$ per ogni $x < 0$

— o — o —

Esempio 2 Consideriamo $\sqrt[1]{1}, \sqrt[2]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \dots$

Quale di questi numeri è il più grande? Sto facendo

$$\max\{\sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$$

Considero la funzione $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ e la studio.

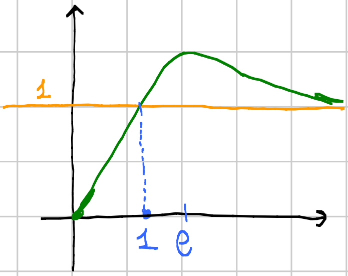
$\boxed{\text{Punto 1}}$ Nessuna simmetria

$\boxed{\text{Punto 2}}$ Definita e continua in $(0,+\infty)$. (potenza batte log.)

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} \left[= \infty^0 \text{ forma indet.}\right] = \lim_{x\to+\infty} e^{\overset{\nearrow 0}{\boxed{\frac{\log x}{x}}}} = e^0 = 1^+$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\log x}{x}} = \left[e^{-\infty}\right] = 0^+$$

$\boxed{\text{Punto 3}}$ Zeri e segno: $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$



$\boxed{\text{Punto 4}}$ Derivabile per ogni $x > 0$

$$f'(x) = e^{\frac{\log x}{x}} \cdot \left[\frac{\log x}{x}\right]'$$

$$= e^{\frac{\log x}{x}} \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1 \cdot \log x}{x^2} = \underbrace{\boxed{e^{\frac{\log x}{x}}}}_{>0} \frac{1-\log x}{\boxed{x^2}}$$

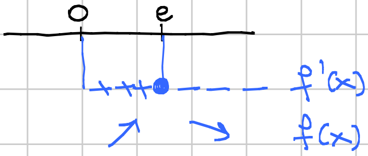
>0 perchè considero solo $x>0$

Quindi il segno di $f'(x)$ dipende solo dal segno di $1-\log x$

$f'(x) = 0 \iff \log x = 1 \iff x = e$

$f'(x) > 0 \iff \log x < 1 \iff x \in (0, e)$

$f'(x) < 0 \iff \log x > 1 \iff x > e$



Dov'è che $f(x)$ interseca l'asintoto? Risolvo $f(x) = 1$, $e^{\frac{\log x}{x}} = 1$

se e solo se $\frac{\log x}{x} = 0 \iff \log x = 0 \iff x = 1$

La domanda di partenza era $\max\{f(n) : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$, quindi sul grafico considero solo i p.ti con ascissa intera.

Devo determinare il punto più alto?

Se la giocano i due punti intorno ad e cioè per $n = 2$ e per $n = 3$. Si tratta di confrontare $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{3}$ ...

— o — o —