A.A. 2023/2024
Modulo di Algebra Lineare

Stampato integrale delle lezioni

Massimo Gobbino

Contents

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 01

Note Title 26/09/2023

$$\left.\begin{array}{l}\text{1 – Geometria analitica}\\ \text{2 – Sistemi lineari}\\ \text{3 – Spazi vettoriali e applicazioni lineari}\\ \text{4 – Prodotti scalari}\end{array}\right\}\ \text{MATRICI}$$

— o — o —

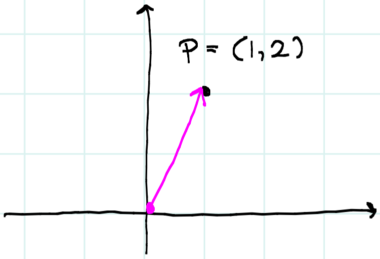
Vettori geometrici Idea: pensare ai p.ti nel piano cartesiano

$\mathbb{R}^2$ = p.ti con due coordinate (x,y)

$\mathbb{R}^3$ = " tre " (x,y,z)

$\vdots$

$\mathbb{R}^{37}$ = " 37 " $(x_1, x_2, \dots, x_{37})$



Un p.to lo posso indicare con una lettera singola

$\underset{\in \mathbb{R}^2}{P = (1,2)}$ $\underset{\in \mathbb{R}^3}{Q = (3,-2,\sqrt{5})}$ $\underset{\in \mathbb{R}^3}{\vec{v} = (1,2,7)}$

Operazioni tra vettori

- SOMMA (componente per componente)

$$(1,2,3) + (2,-4,5) = (3,-2,8)$$

- PRODOTTO TRA UN VETTORE E UN NUMERO

$$\underset{\text{numero}}{\underset{\uparrow}{7}}\ \underset{\text{vettore}}{\underset{\uparrow}{(1,2,3)}} = \underset{\text{vettore}}{\underset{\uparrow}{(7,14,21)}}$$

- PRODOTTO SCALARE TRA DUE VETTORI

→ INPUT: 2 vettori → OUTPUT: numero

$\vec{u} = (x_1, \dots, x_n)$ $\vec{v} = (y_1, \dots, y_n)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Esempio In $\mathbb{R}^4$: $\vec{u} = (1,0,-1,2)$

$\vec{v} = (2,1,1,3)$

$$\langle \vec{u},\vec{v} \rangle = 2+0-1+6 = 7$$

"Scalare" è sinonimo di numero

- NORMA DI UN VETTORE

Dato $\vec{u} = (x_1,\dots,x_n)$ si pone

$$\|\vec{u}\| = |\vec{u}| = \underbrace{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}}_{\text{Pitagora a } n \text{ variabili}} = \text{lunghezza del vettore}$$

- DISTANZA TRA DUE VETTORI $\vec{u}$ e $\vec{v}$ come prima

$$\text{dist}(\vec{u},\vec{v}) = \sqrt{(y_1-x_1)^2+\dots+(y_n-x_n)^2}$$

Relazioni ovvie

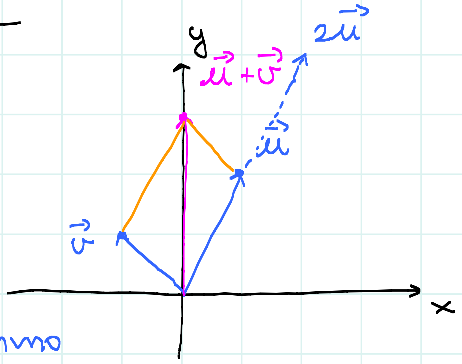
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u},\vec{u} \rangle}$
- $\vec{v}-\vec{u} = (y_1-x_1, \dots, y_n-x_n) = \vec{v} + (-1)\vec{u}$
- $\text{dist}(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{v}-\vec{u}\| = \|\vec{u}-\vec{v}\|$

— o — o —

Esempi in $\mathbb{R}^2$

$\vec{u} = (1,2)$

$\vec{v} = (-1,1)$



$\vec{u}+\vec{v} = (0,3)$

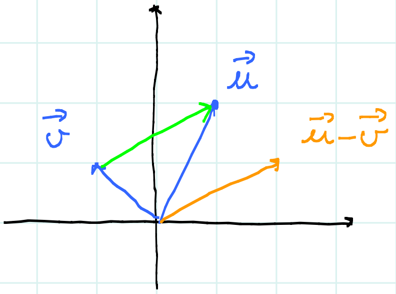
Somma = regola del parallelogrammo

$2\vec{u} = (2,4)$ raddoppio il vettore

$-2\vec{u} = (-2,-4)$ capovolgo se il segno è negativo

$\vec{u}-\vec{v} = (2,1)$ = vettore che parte da $\vec{v}$ e arriva a $\vec{u}$

= "quello che bisogna aggiungere a $\vec{v}$ per ottenere $\vec{u}$"



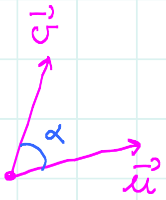
Da qui è evidente che dist $(\vec{u},\vec{v})$ è la norma di $\vec{u}-\vec{v}$

$$\vec{v}-\vec{u} = -(\vec{u}-\vec{v})$$

$\boxed{\text{Significato geometrico del prodotto scalare}}$

$$\boxed{\langle \vec{u},\vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\alpha}$$

↑ angolo compreso tra u e v



$\vec{u} = (1,2)$ $\quad \vec{v} = (-1,1)$ $\quad \|\vec{u}\| = \sqrt{5}$ $\quad \|\vec{v}\| = \sqrt{2}$

$$\langle \vec{u},\vec{v} \rangle = -1+2 = 1$$

Dalla formula precedente

$$1 = \sqrt{5}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\alpha \quad \rightsquigarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Il segno del $\cos\alpha$ ci dice se l'angolo è acuto, ottuso, retto
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad >0 \quad <0 \quad =0$

<u>Oss.</u> Se i due vettori sono diversi da $\vec{0}$, quindi hanno norma $\neq 0$, allora

$$\langle \vec{u},\vec{v} \rangle = 0 \iff \cos\alpha = 0 \iff \alpha = \frac{\pi}{2}$$ cioè i vettori sono perpendicolari

Proprietà del prodotto scalare

Siano $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tre vettori di $\mathbb{R}^n$

Sia λ un numero.

Allora

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

$$\langle \lambda\vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

$$\langle (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), (y_1, \dots, y_m) \rangle = \lambda x_1 \cdot y_1 + \dots + \lambda x_n \cdot y_n$$
$$= \lambda (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle$$
$$= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \underbrace{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}_{\text{uguali}} + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$$
$$= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

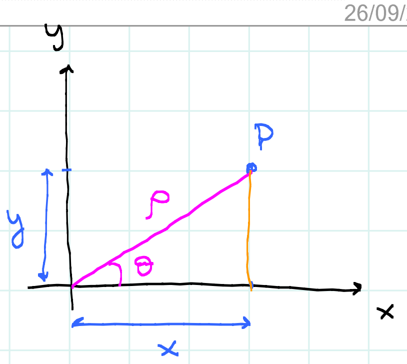
[Fare la verifica usando le componenti].

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 02

Note Title 26/09/2023

COORDINATE POLARI NEL PIANO



Coord. cartesiane : (x,y)

Coord. polari : ρ, θ

Relazioni

→ Se conosco ρ e θ, allora $\boxed{x = \rho\cos\theta}$ $\boxed{y = \rho\sin\theta}$

→ Se conosco x e y, allora $\boxed{\rho = \sqrt{x^2+y^2}}$

Come trovo θ ? $\begin{matrix} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{matrix} \rightsquigarrow \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{y}{x} \rightsquigarrow \tan\theta = \dfrac{y}{x}$

$\boxed{\tan\theta = \dfrac{y}{x}}$ con mille cautele :

- ci sono problemi quando $x=0$ (in questi casi $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$)
- ci sono due angoli fra 0 e 2π che hanno la stessa tangente. Per stabilire quello giusto guardiamo la figura.

— o — o —

Coord. polari e prod. scalare nel piano

$\vec{u} = (x_1, y_1)$ $\vec{v} = (x_2, y_2)$

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2$

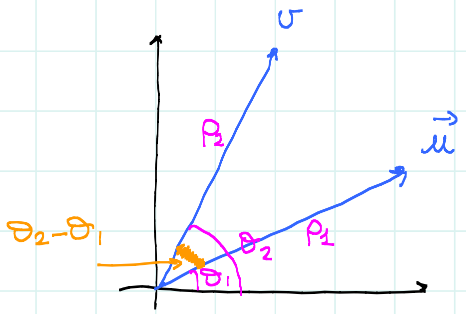
Scriviamo i due vettori in coord. polari :

$\vec{u} = (\rho_1\cos\theta_1, \rho_1\sin\theta_1)$ $\vec{v} = (\rho_2\cos\theta_2, \rho_2\sin\theta_2)$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \rho_1 \rho_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \rho_1 \rho_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2$$

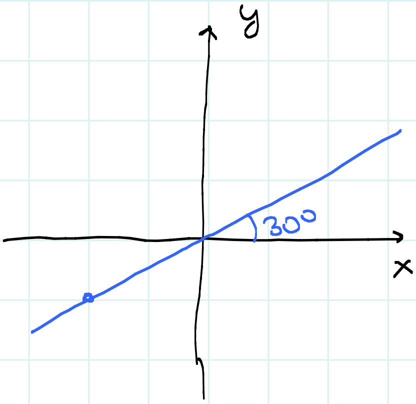
$$= \rho_1 \rho_2 [\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2]$$

$$= \underset{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}{\rho_1 \rho_2} \cos \underbrace{(\theta_1 - \theta_2)}_{\text{angolo compreso}}$$

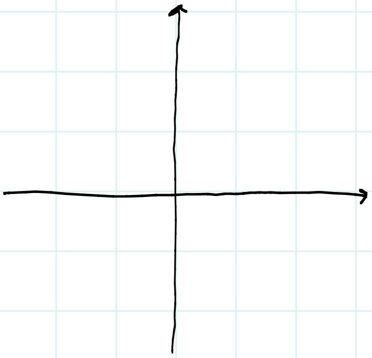


— o — o —

x	y	ρ	θ
1	0	1	0
0	1	1	$\frac{\pi}{2}$
-1	0	1	π
1	1	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$
1	-1	$\sqrt{2}$	$-\frac{\pi}{4}$ $\frac{7\pi}{4}$ $\frac{15\pi}{4}$
-4	4	$4\sqrt{2}$	$\frac{3\pi}{4}$ 135°
1	$-\sqrt{3}$	2	$-\frac{\pi}{3}$
0	0	0	qualunque
$-\sqrt{3}$	-1	2	210° $\frac{7\pi}{6}$
0	2	2	$\frac{\pi}{2}$
-3	0	3	π
-1	0	1	5π
0	0	0	π
0	0	0	$\frac{\pi}{4}$
$\sqrt{3}$	1	2	$\frac{\pi}{6}$
0	-6	6	$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\sqrt{2}$	$-\frac{4\pi}{3}$



$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$\rho \cos\theta$ $\qquad$ $\rho \sin\theta$

$\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\qquad$ $\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

— o — o —

Trovare tutti i p.ti del piano tali che

① $x = 2013 \qquad \rho = 2014$

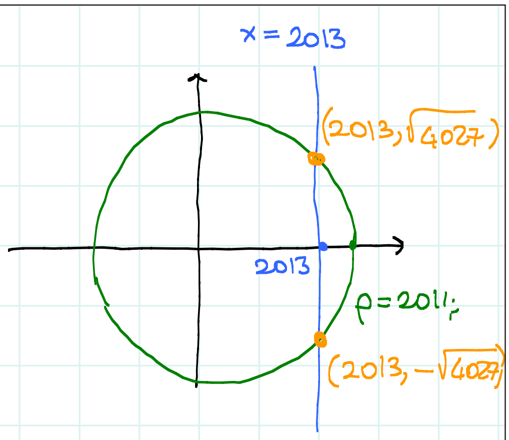
Dalla figura sono due punti

Come li trovo? Risolvo

$$\begin{cases} x = 2013 \\ \sqrt{x^2+y^2} = 2014 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2013 \\ x^2+y^2 = 2014^2 \end{cases}$$

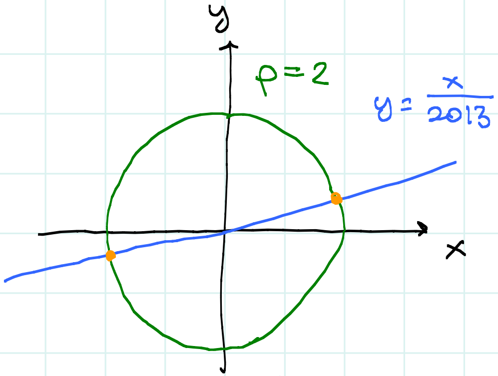
$$y^2 = 2014^2 - x^2 = 2014^2 - 2013^2 = 4027 \rightsquigarrow y = \pm\sqrt{4027}$$

$$(a^2-b^2) = (a+b)(a-b)$$



② $x = 2013y \qquad \rho = 2$

$$y = \frac{1}{2013}x$$

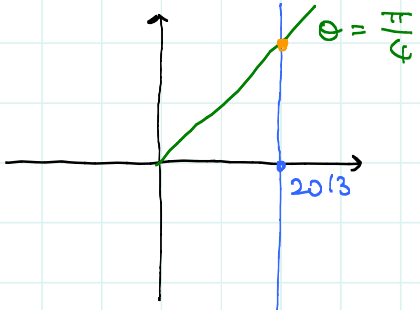


Ho due punti, che trovo risolvendo

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 4 \qquad (\rho = 2) \\ x = 2013y \end{cases} \rightsquigarrow \text{sostituisco nella } 1^a \text{ e risolvo eq. di } 2^\circ \text{ grado}$$

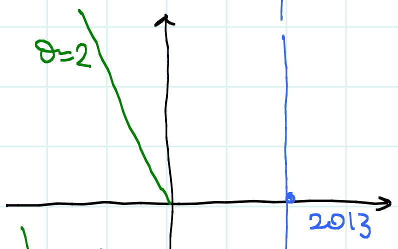
③ $x = 2013 \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$

L'unico p.to è $(2013, 2013)$



④ $x = 2013 \qquad \theta = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{radianti}}}{2}$

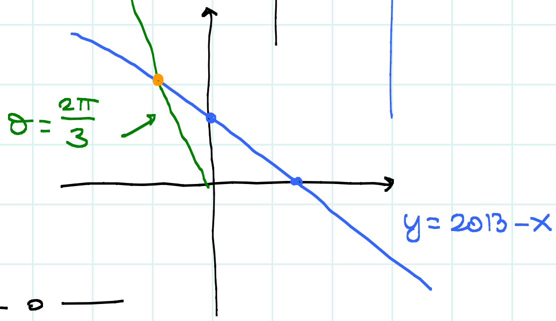
Nessuna soluzione



⑤ $x + y = 2013 \qquad \theta = \frac{2\pi}{3}$

$y = 2013 - x$. Una soluzione che risolve il sistema

$$\begin{cases} x+y = 2013 \\ y = -\sqrt{3}\,x \end{cases} \qquad \frac{y}{x} = \tan\theta = -\sqrt{3}$$



— o — o —

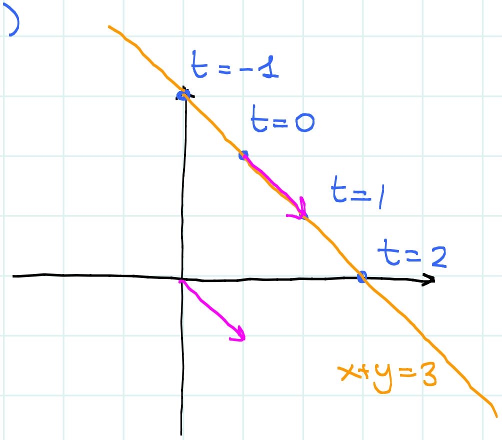
ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 03

Note Title 26/09/2023

EQUAZIONE DELLA RETTA NEL PIANO

→ CARTESIANA
- ↗ esplicita $y = mx + n$ oppure $x = x_0$
- ↘ implicita $ax + by + c = 0$

→ PARAMETRICA $(a,b) + t(c,d)$



Esempio $(1,2) + t(1,-1)$

Al variare di $t \in \mathbb{R}$ rappresenta il percorso di un omino

$t = 0 \rightsquigarrow (1,2)$

$t = 1 \rightsquigarrow (2,1)$

$t = 2 \rightsquigarrow (3,0)$

$t = -1 \rightsquigarrow (1,2) - (1,-1) = (0,3)$

Nella scrittura $(a,b) + t(c,d)$, il vettore
- (a,b) rappresenta il p.to di partenza $(t = 0)$
- (c,d) " la direzione ed il verso in cui ci stiamo muovendo

Passaggio parametrica ⇝ cartesiana

$(1,2) + t(1,-1)$

1° modo → Dare 2 valori a t e trovare 2 p.ti della retta
→ Scrivo l'eq. della retta per 2 p.ti

2° modo Scrivo $(x,y) = (1,2) + t(1,-1) = (\underset{x}{1+t}, \underset{y}{2-t})$

$1 + t = x \rightsquigarrow t = x - 1 \rightsquigarrow y = 2 - t = 2 - (x-1) = 3 - x \rightsquigarrow y = 3 - x$

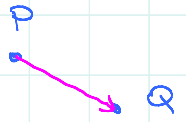
Passaggio cartesiana ⇝ parametrica

Scelgo 2 p.ti a caso della retta, diciamo P e Q, poi scrivo

$$P + t(Q-P)$$

per $t=0$ viene P

per $t=1$ viene Q



Esercizio Scrivere l'eq. cartesiana della retta che passa per $\underbrace{(1,3)}_{A}$ e $\underbrace{(-2,1)}_{B}$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ La cerco del tipo $y = mx+n$

Impongo i 2 passaggi

$$\begin{cases} 3 = m+n \\ 1 = -2m+n \end{cases} \rightsquigarrow \text{risolvo e trovo } m \text{ ed } n$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Scrivo la parametrica $(1,3) + t\,(3,2)$

$A + t\,(B-A)$

$(A-B)$

↑ vanno bene entrambi

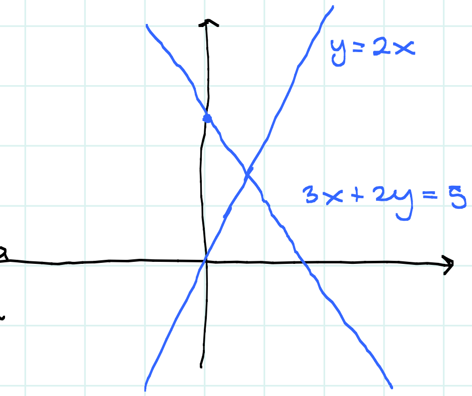
$$\left(\underset{\underset{x}{\shortparallel}}{1+3t},\ \underset{\underset{y}{\shortparallel}}{3+2t}\right)$$

$$1+3t = x \rightsquigarrow t = \frac{x-1}{3} \rightsquigarrow y = 3+2t = 3+\frac{2(x-1)}{3} = \frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$$

La cartesiana è $y = \frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$ oppure $3y-2x-7=0$

Esercizio Trovare l'angolo tra la retta $y=2x$ e la retta $3x+2y=5$

$$y = -\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$$



Idea: se scrivo le rette in parametrica poi faccio l'angolo tra le direzioni

$y = 2x$ $\qquad (0,0) + t(1,2)$ $\qquad (0,0)+t(3,6)$

$(0,0)+t(-2,-4)$

$3x+2y=5$ $\qquad (2,4)+t(-3,-6)$

$(1,1)+t(2,-3)$

L'angolo tra le 2 rette è l'angolo tra i vettori $(1,2)$ e $(2,-3)$ cioè

$$\cos\alpha = \frac{\langle (1,2),(2,-3)\rangle}{\|(1,2)\|\cdot\|(2,-3)\|} = \frac{-4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}}$$

Questo è l'angolo OTTUSO tra le 2 rette.

Alternativa per la parametrica della retta $3x+2y = 5$:

Scelgo 2 p.ti : $x=0 \quad y=\frac{5}{2} \qquad A=\left(0,\frac{5}{2}\right)$

$x=1 \quad y=1 \qquad B=(1,1)$

$$A+t(B-A) = \left(0,\frac{5}{2}\right)+t\underbrace{\left(1,-\frac{3}{2}\right)}_{\text{metà della precedente quindi ok}}$$

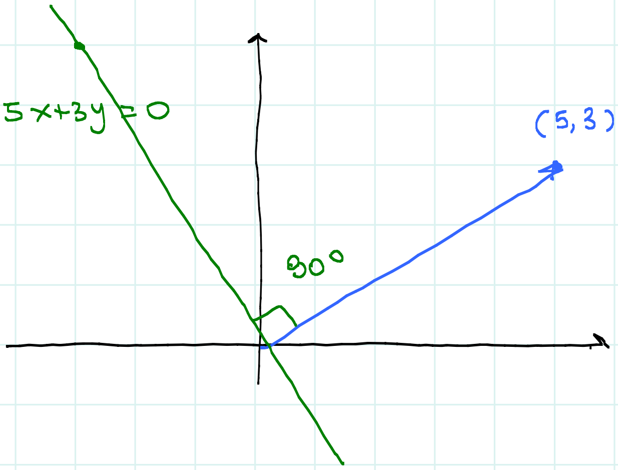
— o — o —

Retta $\quad 5x+3y=0$ ⇝ passa per l'origine

$\langle (5,3),(x,y)\rangle = 0$

La retta è costituita da tutti i vettori ⊥ a $(5,3)$

La retta $5x+3y=7$ è una parallela alla precedente



In generale, data una retta $ax+by+c=0$, questa è parallela alla retta $ax+by=0$ che passa per l'origine, ed è costituita da tutti i vettori (x,y) che sono $\perp$ ad (a,b)

In particolare: la direzione della retta nella PARAMETRICA ha prodotto scalare nullo con i coeff (a,b) che compaiono nella forma implicita

Esempio Scrivere la cartesiana della retta per $\underbrace{(1,2)}_{A}$ e $\underbrace{(5,1)}_{B}$

3° modo $A+t(B-A)$

$\dots + t(4,-1)$

$ax+by+c=0$

con $(a,b) \perp a\ (4,-1)$

Una possibile scelta è $(a,b)=(1,4)$ da cui

$x+4y+c=0$

Per calcolare c impongo il passaggio per A ⇝ $c=-9$

$$\boxed{x+4y-9=0}$$

Verificare che passi per entrambi i p.ti

—o—o—

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 04

Note Title 29/09/2023

$$\begin{cases} 2x-3y=5 \\ x+2y=7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-3y=5 \\ -4x+6y=10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-3y=5 \\ -4x+6y=-10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x=y-3 \\ 2y=6+4x \end{cases}$$

Studiare un sistema lineare vuol dire decidere in quale categoria si situa. Tre possibilità

- → sol. unica ⇝ trovarla
- → non ha soluzione
- → infinite soluzioni, dipendenti da un certo numero di parametri

$$\begin{cases} 2x-3y=5 \\ x+2y=7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-3y=5 \\ 2x+4y=14 \end{cases} \qquad 2^a-1^a: \ 7y=9 \rightsquigarrow y=\frac{9}{7}$$

$$\rightsquigarrow 2x=3y+5$$

$$\rightsquigarrow 2x=\frac{27}{7}+5=\frac{62}{7} \rightsquigarrow x=\frac{31}{7}$$

⇝ soluzione unica $\boxed{(x,y)=\left(\frac{31}{7},\frac{9}{7}\right)}$ → Perdere 15 sec. a fare la verifica

$$\begin{cases} 2x-3y=5 \\ -4x+6y=10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x-6y=10 \\ -4x+6y=10 \end{cases} \qquad 1^a+2^a: \ 0=20 \ ☹$$

⇝ NO SOLUZIONI

$$\begin{cases} 2x-3y=5 \\ -4x+6y=-10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-3y=5 \\ -2x+3y=-5 \end{cases}$$

⇝ riga inutile, perché uguale alla prima moltiplicata per −1

$2x-3y=5$ ⇝ tutti gli ∞ p.ti della retta sono soluzioni!

Volendo posso porre $y=t$ e trovare $2x=3y+5=3t+5$

$$x=\frac{3}{2}t+\frac{5}{2}$$

Le infinite soluzioni sono

$$\underbrace{\left(\frac{3}{2}t+\frac{5}{2},\ t\right)}_{\text{verifica}} \quad \text{oppure} \quad \left(\frac{5}{2},0\right)+t\left(\frac{3}{2},1\right)$$

$$\text{oppure} \quad \left(\frac{5}{2},0\right)+t\,(3,2)$$

$$\begin{cases} 2y = x+1 \\ x = 2y-1 \\ 2x-4y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y+1 \\ 2y = x-y \\ 4y = 2x-1 \end{cases}$$

① ②

$$① \begin{cases} -x+2y = 1 \\ x-2y = -1 \\ 2x-4y = 2 \end{cases} \text{ ne basta una } \quad \begin{cases} x-2y = -1 \\ 2x-4y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y = -1 \\ x-2y = 1 \end{cases}$$

$1^a - 2^a$: $0 = -2$ ☹ ⇝ NO SOLUZIONI

$$② \begin{cases} x-y = 1 \\ -x+3y = 0 \\ -2x+4y = -1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2x-2y = 2 \\ \dots \\ -2x+4y = -1 \end{cases}$$

$1^a + 3^a$: $2y = 1 \rightsquigarrow y = \frac{1}{2}$

$x = y+1 = \frac{3}{2}$

Controllo la seconda: $-x+3y \overset{?}{=} 0 \qquad -\frac{3}{2}+\frac{3}{2} = 0$ ☺

Soluzione unica: $(x,y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ Verifica ok

$$\begin{cases} x+y+z = 2 \\ 2x+3y-z = 4 \\ x+2y+2z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z = 2 \\ y-3z = 0 \\ y+z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 2^a - 2\cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array}$$

$$\begin{cases} x+y+z = 2 \\ y-3z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases} \quad 3^a - 2^a \rightsquigarrow z = 0 \rightsquigarrow y = 3z = 0 \rightsquigarrow x = 2-y-z = 2$$

⇝ soluzione unica $\boxed{(x,y,z) = (2,0,0)}$

PIVOT ↓

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2-2R_1 \\ R_3-R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3-R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{4} & 0 \end{array}\right)$$

Lavorare alla GAUSS vuol dire prendere la tabella (matrice) e fare una delle seguenti operazioni

→ scambiare 2 righe

→ mettere al posto di una riga R_i la riga $aR_i + bR_j$ dove

- R_j è un'altra riga
- a e b sono due numeri con $a \neq 0$ (e $b \neq 0$)

Obiettivo: portare la matrice nella forma A SCALA

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-z=4 \\ x+2y-2z=2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2-2R_1 \\ R_3-R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ R_3-R_2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \boxed{x}+y+z=2 \\ \boxed{y}-3z=0 \\ 0=0 \end{array}$$

$$z=t \rightsquigarrow y=3z \rightsquigarrow y=3t \qquad x=2-y-z=2-3t-t=2-4t$$

Ho infinite soluzioni del tipo $(x,y,z)=(2-4t,\ 3t,\ t)$

$$= (2,0,0)+t(-4,3,1)$$

$$\begin{cases} -z+w=3 \\ x+y-w=1 \\ 2x+y+w=0 \\ x+z=2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \updownarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3-2R_1 \\ R_4-R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & \boxed{-3} & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \updownarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

[Dopo video: questo sarebbe +3]

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

$-y-3w=-2 \rightsquigarrow$ trovo y

$-z+w=3 \rightsquigarrow z=w-3$

$5w=6 \rightsquigarrow w=\frac{6}{5}$

$= \frac{6}{5}-3=-\frac{9}{5}$

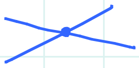
— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 05

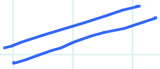
Note Title 29/09/2023

Mutua posizione di due rette nel piano :

- INCIDENTI : 1 p.to di intersezione



- PARALLELE E DISTINTE : nessuna inters.



- COINCIDENTI : sono la stessa retta

Come interseco due rette ?

→ se ho le due eq. cartesiane, le metto a sistema $\begin{matrix}\nearrow 1 \\ \to 0 \\ \searrow \infty\end{matrix}$ soluz.

→ se ho una cartesiana e una param. posso
- passare la param. in cartesiana ⇝ come prima
- sostituire la param. nella cartesiana

Esempio $3x+2y=5$ $(1,2)+t(-1,1)$

$\boxed{1° \text{ modo}}$ $(1,2)+t(-1,1) = (\underset{\overset{\shortparallel}{x}}{1-t}, \underset{\overset{\shortparallel}{y}}{2+t})$ $t=1-x$

$y=2+t=3-x$

$x+y=3$

$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ x+y=3 \end{cases}$ $\begin{matrix} 3x+2y=5 \\ y=4 \end{matrix}$ $3R_2-R_1$ $y=4 \nearrow 3x=-3$ $x=-1$

Intersezione : $(x,y)=(-1,4)$

$\boxed{2° \text{ modo}}$ $3(1-t)+2(2+t)=5 \rightsquigarrow 3-3t+4+2t=5 \rightsquigarrow -t=-2$

$\rightsquigarrow t=2 \rightsquigarrow$ vado nella parametrica $\rightsquigarrow (-1,4)$

[Ho cercato per quali valori di t l'omino che percorre la 2a retta si trova anche sulla 1a retta]

→ se entrambe le rette le conosco in parametrica, posso

- passare entrambe in cartesiana ...
- uguaglio le due parametriche usando due parametri diversi

Esempio Retta 1: $(1,1)+t(-2,3)$

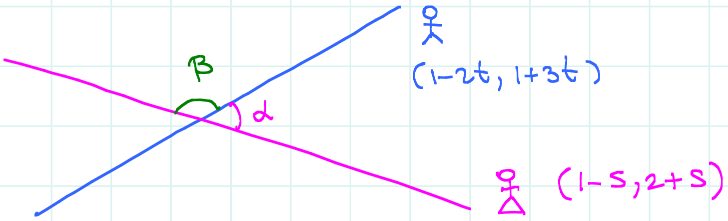
Retta 2: $(1,2)+t(-1,1)$] sono le stesse due rette di prima

retta 1: $(1-2t,1+3t)$ $(1-t,2+t)$ ← retta 2

$$\begin{cases} 1-2t = 1-s \\ 1+3t = 2+s \end{cases} \quad \begin{cases} s-2t=0 \\ s-3t=-1 \end{cases} \quad 1^a-2^a:\ t=1 \rightsquigarrow s=2$$

sostituisco s e/o t nelle parametriche

$t=1 \rightsquigarrow (-1,4)$ ☺ $s=2 \rightsquigarrow (-1,4)$ ☺



Se due rette sono incidenti, come trovo gli angoli che formano?

- Se ho le due parametriche, trovo l'angolo tra i due vettori direzione. Nell'esempio $v_1=(-2,3)$ $v_2=(-1,1)$, quindi

$$\cos\alpha = \frac{\langle(-2,3),(-1,1)\rangle}{\|(-2,3)\|\cdot\|(-1,1)\|} = \frac{5}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}} = \boxed{\frac{5}{\sqrt{26}}}$$

è l'angolo acuto

$$\cos\beta = \cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$$

- Se ho le due cartesiane, o passo in parametrica, oppure faccio l'angolo tra (a_1,b_1) e (a_2,b_2) se le cartesiane sono

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \qquad a_2x+b_2y+c_2=0$$

Funziona perché (a_1, b_1) è ⊥ alla direzione della 1ª retta

(a_2, b_2) " " " 2ª "

— o — o —

Esercizio $(1,3) + t\,(2,1)$

Scrivere la parallela che passa per $(5,7)$

$(5,7) + t\,(2,1)$ ⇝ passo in cartesiana se serve

Scrivere la perpendicolare per $(7,2)$

$(7,2) + t\,\underbrace{(-1,2)}$

ha prodotto scalare nullo con $(2,1)$

In alternativa

$(1,3) + t\,(2,1) = (1+2t, 3+t)$ $\quad x = 1+2t \quad x = 1+2(y-3)$

$y = 3+t$ ⇝ $t = y-3$

$x = 2y-5$ ⇝ $\boxed{y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}$

La generica ⊥ è $y = \underset{\overset{\uparrow}{-\frac{1}{m}}}{-2}x + m$

Impongo il passaggio per $(7,2)$ ⇝ $2 = -14 + m$ ⇝ $m = 16$

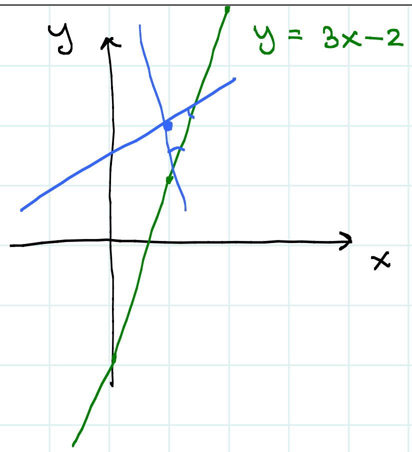
$\boxed{y = -2x + 16}$ $\quad$ Verifica: $(\underset{\substack{\shortparallel \\ x}}{7-t}, \underset{\substack{\shortparallel \\ y}}{2+2t})$ $\quad y = 2+2t$

$= 2 + 2(7-x)$

$= 16 - 2x$ ☺

$\boxed{\text{Esercizio}}$ Trovare le rette che passano per $(1,2)$ e formano un angolo di 60° con la retta

$y = 3x - 2$



Dalla figura si vede che ce ne sono due

Retta data in parametrica:

$$(0,-2)+t(1,3)$$

Retta cercata in parametrica

$$(1,2)+t(a,b)$$

Devo imporre che l'angolo tra $(1,3)$ e (a,b) sia $60°$

$$\frac{\langle (1,3),(a,b)\rangle}{\|(1,3)\|\cdot\|(a,b)\|} = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

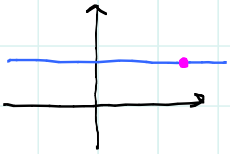
Metto i valori assoluti o $\pm\frac{1}{2}$ perché anche $120°$ va bene

$$\frac{a+3b}{\sqrt{10}\sqrt{a^2+b^2}} = \pm\frac{1}{2} \rightsquigarrow \frac{a^2+9b^2+6ab}{\cancel{10}_{5}\cdot(a^2+b^2)} = \frac{1}{\cancel{4}_{2}}$$

$$2a^2+18b^2+12ab = 5a^2+5b^2 \rightsquigarrow 3a^2-12ab-13b^2=0$$

Volendo posso dividere per b: $\quad 3\left(\frac{a}{b}\right)^2-12\left(\frac{a}{b}\right)-13=0$

Risolvendo trovo i due valori possibili di $\frac{a}{b}$ che corrispondono alle due rette.



Oss. Qual è la parametrica della retta $y=7$?

$(0,7)+t(1,0)$ $\qquad$ $(0,7)+t(-1,0)$

$$(14+5t,7) = (14,7)+t(5,0)$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 06

Note Title 03/10/2023

PIANI NELLO SPAZIO → Cartesiana

→ Parametrica

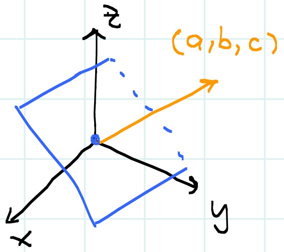
Cartesiana $ax+by+cz+d=0$, con $\underset{\uparrow \text{ non sono tutti nulli}}{(a,b,c)} \neq (0,0,0)$

Se $d=0$ il piano passa per l'origine $ax+by+cz=0$

e sono tutti i vettori $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ che sono $\overset{''}{<}(a,b,c),(x,y,z)>$

$\perp$ al vettore (a,b,c).

Se $d \neq 0$, il piano non passa per l'origine ed è // al precedente



Esempio $3x+2y-z+7=0$

$$3x+\underset{\uparrow}{2y}-\underset{\uparrow}{z}=-7$$

variabili libere

$z=t$, $y=s$, $3x=-7+z-2y=-7+t-2s \rightsquigarrow x=-\frac{7}{3}+\frac{1}{3}t-\frac{2}{3}s$

$$(x,y,z)=\left(-\frac{7}{3}+\frac{1}{3}t-\frac{2}{3}s,s,t\right)$$

$$=\boxed{\left(-\frac{7}{3},0,0\right)+t\left(\frac{1}{3},0,1\right)+s\left(-\frac{2}{3},1,0\right)}$$

rappresentazione parametrica del piano

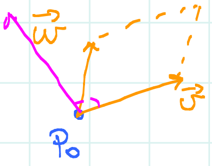
Volendo la posso scrivere come $\left(-\frac{7}{3},0,0\right)+t\,(1,0,3)+s\,(-2,3,0)$

(a,b,c)

PARAMETRICA $\boxed{\vec{P_0}+t\vec{v}+s\vec{w}}$

p.to qualunque del piano

vettori $\perp$ ai coeff. (a,b,c)



Mutua posizione di due piani nello spazio

→ paralleli e coincidenti ("stesso piano", se li interseco l'insieme delle soluzioni è ∞ e dipende da 2 param)

→ paralleli e distinti (nessuna intersezione)

→ incidenti (si intersecano in una retta: se li interseco l'insieme delle soluz. dipende da un parametro)

Come interseco due piani?

→ Se conosco le due cartesiane, le metto a sistema e risolvo

→ Se non le conosco, le trovo e poi procedo come prima (volendo si può evitare)

Come passo dalla parametrica alla cartesiana?

Esempio $(1,2,0)+t(1,1,2)+s(-3,0,1)$

$\boxed{1° \text{ modo}}$ BOVINO $ax+by+cz+d=0$

$(1+t-3s,\ 2+t,\ 2t+s)$

$a(1+t-3s)+b(2+t)+c(2t+s)+d=0$

$a+\underline{at}-\underline{3as}+2b+\underline{bt}+\underline{2ct}+\underline{cs}+d=0$

$$\begin{cases} a+b+2c=0 & \text{(coeff. di } t\text{)} \\ -3a+c=0 & \text{(coeff. di } s\text{)} \\ a+2b+d=0 & \text{(termine noto)} \end{cases}$$

Risolvo il sistema e ho finito (abbiamo 3 equ. e 4 incognite, quindi ci sarà un parametro libero che posso fissare a piacere).

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Ricordo che (a,b,c) deve essere $\perp$ a $(1,1,2)$ e $(-3,0,1)$

Ottengo

$\begin{cases} a+b+2c=0 \\ -3a \quad + c = 0 \end{cases}$ ⇝ risolvo e trovo (a,b,c) a meno di un parametro libero

Scelti (a,b,c), trovo d imponendo che il p.to dato $(1,2,0)$ soddisfi l'eq. del piano

$a=1, \; c=3, \; b=-7$ ⇝ $\boxed{x-7y+3z=-13}$

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ Uso la $\boxed{\text{FORMULA MISTERIOSA}}$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(v_2w_3 - v_3w_2, \overbrace{-v_1w_3 + v_3w_1}^{\text{cambio di segno}}, v_1w_2 - v_2w_1\right)$$

Questa formula produce misteriosamente (per ora) un vettore $\perp$ a (v_1,v_2,v_3) e (w_1,w_2,w_3)

[Dim: fare i prod. scalari e vedere che vengono 0!!!]

Nell'esempio $\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ⇝ $(1,-7,3) = (a,b,c)$

⇝ poi trovo d.

<u>Esempio</u> Trovare il piano che passa per

$A = (0,1,-1) \qquad B = (2,1,3) \qquad C = (-1,0,2)$

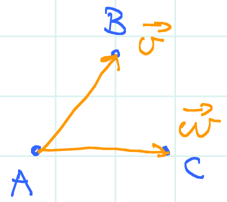
$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ (Bovino) $ax+by+cz+d=0$

[Segui corretti dopo video]

$\begin{cases} \overbrace{\quad +b-c}^{} + d = 0 \\ 2a + b + 3c + d = 0 \\ -a \quad + 2c + d = 0 \end{cases}$ ⇝ risolvo

2° modo Una parametrica del piano è

$$A + t(B-A) + s(C-A)$$



$$(0,1,-1) + t(2,0,4) + s(-1,-1,3)$$

che volendo posso scrivere come

$$(0,1,-1) + t(1,0,2) + s(1,1,-3)$$

Passo in cartesiana

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-2,5,1) \rightsquigarrow -2x+5y+z=4$$

$$\rightsquigarrow \boxed{2x-5y-z+4=0}$$

Verifico che A, B, C risolvano l'equazione!

Come determino l'angolo tra due piani incidenti ?

Basta osservare che l'angolo tra i due piani è lo stesso che c'è tra i vettori a loro ⊥, cioè l'angolo tra gli (a,b,c) delle cartesiane. Così si trova il cos dell'angolo (se voglio il + piccolo dei 2 angoli devo mettere il modulo al cos).

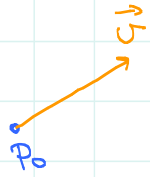
— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 07

Note Title 03/10/2023

RETTE NELLO SPAZIO

Parametrica $\vec{P_0} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{numero}\\ \text{reale}}}{t}\,\vec{v}$ [Esempio: $\underset{\substack{\uparrow\\ \text{p.to di}\\ \text{partenza}}}{(1,2,1)} + t\,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Direzione}}}{(-3,1,4)}$]



Cartesiana Una retta nello spazio si può rappresentare come intersezione di due piani (sistema di 2 equazioni) Questa rappresentazione è molto non unica.

Mutua posizione di due rette

→ COINCIDENTI (infinite intersezioni dipendenti da 1 parametro, direzioni una multipla dell'altra)

→ PARALLELE E DISTINTE (nessuna intersezione, direzioni multiple)

→ INCIDENTI (un p.to di intersezione)

→ SGHEMBE (nessuna intersezione, direzioni NON multiple)

Come interseco due rette? $P_0 + t v_0$ $P_1 + s v_1$

e metto a sistema

Esempio $(1,1,0) + t\,(2,1,3)$ $(1,0,-1) + t\,(2,1,1)$

$(1+2t, 1+t, 3t)$ $(1+2s, s, -1+s)$

$$\begin{cases} 1+2t = 1+2s & \rightsquigarrow t = s \\ 1+t = s & \rightsquigarrow t = s-1 \\ 3t = -1+s \end{cases} \rightsquigarrow \text{NESSUNA SOLUZIONE}$$

⇝ SGHEMBE perché le direzioni $(2,1,3)$ e $(2,1,1)$ non sono multiple

Mutua posizione di una retta e un piano

- → retta contenuta nel piano (infinite intersezioni dip da un parametro)
- → retta parallela al piano (nessuna intersezione)
- → incidenti (un solo punto di intersezione)

Come faccio retta ∩ piano? Sostituisco la parametrica della retta nella cartesiana del piano

Esempio Piano $x + 3z = 5$

Retta che passa per $A = (-1,0,3)$ $B = (1,1,1)$

Come sono messi?

La retta è $A + t\,(B-A)$ o variazioni

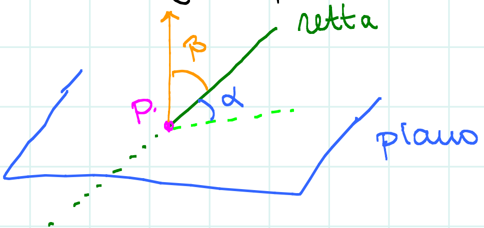
$$(-1,0,3) + t\,(2,1,-2) = (-1+2t,\ t,\ 3-2t)$$

$$-1+2t+9-6t = 5 \leadsto -4t = -3 \leadsto t = \frac{3}{4}$$

Sostituendo trovo il p.to P di intersezione $\boxed{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)}$

↑ verifico che sta nel piano

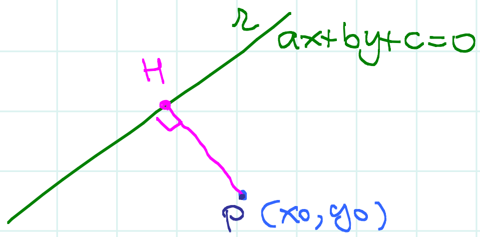
Quale angolo formano?



Osservo che $\alpha = 90° - \beta$, dove β è l'angolo tra la direzione della retta e la ⊥ al piano

Quindi $$\underset{\underset{\sin\alpha}{\parallel}}{\cos\beta} = \frac{|\langle (1,0,3),(2,1,-2)\rangle|}{\underset{\underset{\text{del piano}}{\underset{(a,b,c)}{\uparrow}}}{\|(1,0,3)\|}\cdot\underset{\underset{\text{della retta}}{\underset{\text{direzione}}{\uparrow}}}{\|(2,1,-2)\|}} = \frac{4}{\sqrt{10}\ 3}$$

Distanza p.to retta nel piano



Strategia trovo H sulla retta in modo che PH ⊥ retta, e poi calcolo dist (P,H).

→ Scrivo per P la ⊥ alla retta r data

$$(x_0, y_0) + t\underbrace{(a,b)}_{\text{vettore } \perp \text{ alla retta}} = (x_0+ta, y_0+tb)$$

Ora interseco e trovo H:

$$a(x_0+ta) + b(y_0+tb) + c = 0$$

e trovo $(a^2+b^2)t + ax_0+by_0+c = 0$

$$t = -\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$$

$$\text{dist}(P,H) = \| H-P \| = \| (x_0+ta, y_0+tb) - (x_0,y_0) \|$$

$$= \| (ta, tb) \| \quad [= \sqrt{t^2a^2+t^2b^2}$$

$$= |t|\sqrt{a^2+b^2}$$

$$= \frac{|ax_0+by_0+c|}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}$$

Formula generale

$$\boxed{\text{dist}(\text{p.to}, \text{retta}) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

nel piano

Allo stesso modo nello spazio

$$\boxed{\text{dist}(\text{pto}, \text{piano}) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Esempio $A=(1,0,2)$ $B=(-1,1,-1)$ $C=(2,1,1)$ $D=(1,0,3)$

→ Calcolare la distanza di D dal piano A,B,C

Piano in parametrica: $C+t(B-C)+s(A-C)$

$(2,1,1)+t(-3,0,-2)+s(-1,-1,1)$

$(2,1,1)+t(3,0,2)+s(1,1,-1)$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-2,5,3) \rightsquigarrow \boxed{-2x+5y+3z=4}$$

$$\text{Uso la formula: } \text{dist}(D, \text{piano } ABC) = \frac{\overset{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{|-2\cdot1+5\cdot0+3\cdot3-4|}}{\underset{\uparrow \atop \sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{38}}} = \frac{3}{\sqrt{38}}$$

→ Calcolare l'angolo tra piano ABC e retta BD

Direzione retta $BD = D-B = (2,-1,4)$

$$\underset{\uparrow \atop 90°-\alpha}{\cos\beta} = \frac{|\langle(-2,5,3),(2,-1,4)\rangle|}{\|(-2,5,3)\|\cdot\|(2,-1,4)\|} = \underset{\uparrow \atop \text{angolo tra retta e piano}}{\sin\alpha}$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 08

Note Title 03/10/2023

$(1,0,1)+t(2,-1,0)+s(-5,1,1)$	$x+2y+3z=0$	①
$(1,0,1)+t(2,-1,0)+s(-5,0,1)$	$x+2y+3z=0$	②
$(1,0,1)+t(2,-1,0)+s(-5,1,0)$	$x+2y+3z=0$	③

Stabilire la mutua posizione dei 2 piani

① 1° modo. Passo il primo in cartesiana

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 2 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-1,-2,-3) \rightsquigarrow \boxed{(1,2,3)}$$

verifico che è $\perp$ a $(2,-1,0)$ e $(-5,1,1)$

$$\rightsquigarrow x+2y+3z=4$$

↑ ho imposto il passaggio per $(1,0,1)$

$$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ x+2y+3z=0 \end{cases} \rightsquigarrow \text{nessuna int.} \Rightarrow \text{sono PARALLELI}$$

Calcolo la distanza di $(1,0,1)$ da $x+2y+3z=0$ $\rightsquigarrow$ formula

① 2° modo. $(1,0,1)+t\,(2,-1,0)+s\,(-5,1,1)$

$(1+2t-5s,\,-t+s,\,1+s)$

La inserisco nella cartesiana del secondo

$$1+2t-5s+2(-t+s)+3\,(1+s)=0$$

$$1+\cancel{2t}-\cancel{5s}-\cancel{2t}+\cancel{2s}+3+\cancel{3s}=0 \qquad 4=0\ !$$

Nessuna soluzione!

② 2° modo $(1,0,1)+t\,(2,-1,0)+s\,(-5,0,1)$

$(1+2t-5s,\,-t,\,1+s)$

Sostituisco nella cartesiana

$$\underbrace{1+\cancel{2t}-5s}_{x}\ \underbrace{-\cancel{2t}}_{+2y}+\underbrace{3+3s}_{+3z}=0 \rightsquigarrow -2s=-4 \rightsquigarrow s=2$$

Sostituisco $s=2$ nella parametrica del piano

$$(1,0,1)+t(2,-1,0)+(-10,0,2)$$
$$=\boxed{(-9,0,3)+t(2,-1,0)}$$

↑ Parametrica della retta inters. tra i due piani

[Esercizio: fare nel 1° modo]

Se voglio l'angolo tra i due piani devo andare in cartesiana

A	B	C	D	E				
(1,3,2)	(4,3,0)	(7,3,2)	(0,3,0)	(3,3,3)				

↑ Piano per ↑ retta per

Piano in parametrica $(1,3,2)+t(3,0,-2)+s(6,0,0)$

$(1,3,2)+t(3,0,-2)+s(1,0,0)$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (0,2,0) \rightsquigarrow (0,1,0) \rightsquigarrow \boxed{y=3}$$

verifico che A, B, C soddisfano

Retta: $(0,3,0)+t(3,0,3) \rightsquigarrow (0,3,0)+t(1,0,1)$

$(t,3,t)$

Sostituisco nella cartesiana e viene $3=3$ quindi la retta è contenuta nel piano.

* * *

(1,0,0)	(0,1,0)	(0,0,1)			①
(−1,−2,3)	(1,3,0)	(0,0,0)			②
(0,0,0)	(2,−4,6)	(−1,2,−3)			③
A	B	P			

Piano passante per P e ⊥ alla retta AB

[Direzione retta = (a,b,c) del piano]

① $B-A = (-1,1,0) \rightsquigarrow -x+y = 0 \rightsquigarrow \boxed{x-y=0}$

$\uparrow$ sostituisco P

② $B-A = (2,5,-3) \rightsquigarrow 2x+5y-3z = 0$

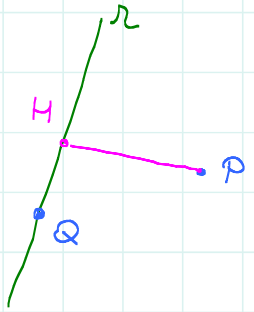
③ $B-A = (2,-4,6)$ ma posso usare $(1,-2,3) \rightsquigarrow \boxed{x-2y+3z=-14}$

Calcolare il p.to della retta AB più vicino a P

$A = (1,0,2)$

$B = (5,1,-1)$

$P = (1,1,0)$



$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Scrivo retta in parametrica

$$(1,0,2)+t(4,1,-3) = (1+4t,\ t,\ 2-3t) = Q$$

$$A \quad + t\ (B-A)$$

Cerco per quale valore di t si ha che QP ⊥ direzione retta.
Quello sarà il p.to H

$$Q-P = (1+4t,\ t,\ 2-3t)-(1,1,0) = (4t,\ t-1,\ 2-3t)$$

Impongo che sia ⊥ alla direzione della retta $(4,1,-3)$

$$16t+t-1-6+9t = 0 \rightsquigarrow 26t = 7 \rightsquigarrow t = \frac{7}{26}$$

$$\langle Q-P,\ (4,1,-3)\rangle$$

Per trovare H sostituisco t nella parametrica della retta

$$H = \boxed{\left(\frac{27}{13},\ \frac{7}{26},\ \frac{31}{26}\right)}$$ ← [Corretto dopo video]

Se serve, calcolo la distanza di P da H.

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Considero il piano per P ⊥ alla retta r e calcolo l'intersezione tra il piano e questa retta

$A = (1,0,2)$

$B = (5,1,-1)$

$P = (1,1,0)$

Piano per $P \perp$ alla retta AB

$$B-A = (4,1,-3) \rightsquigarrow 4x+y-3z=\underset{\substack{\uparrow \\ \text{passaggio per } P}}{5}$$

$(1+4t,\, t,\, 2-3t) \rightsquigarrow$ parametrica retta AB

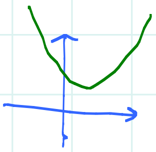
Sostituisco

$$\underbrace{4+16t}_{4x}+\underbrace{t}_{+y}\underbrace{-6+9t}_{-3z}=5 \rightsquigarrow 26t=7$$ ☺

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ Il generico p.to della retta è

$$Q=(1+4t,\, t,\, 2-3t)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(P,Q)^2 = \|Q-P\|^2 &= \|(4t,\, t-1,\, 2-3t)\|^2 \\ &= 16t^2+(t-1)^2+(2-3t)^2 \\ &= 16t^2+t^2-2t+1+4+9t^2-12t \\ &= 26t^2-14t+5 \end{aligned}$$



Per quale valore di t risulta minima? È una parabola, e il min. si ha quando $52t-14=0$, cioè $t=\frac{14}{52}=\frac{7}{26}$ ☺

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 09

Note Title 06/10/2023

MATRICI = tabelle rettangolari di numeri

$$A \in M^{\overset{\text{righe}}{m} \times \overset{\text{colonne}}{n}} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in M^{2,3} \qquad (7) \in M^{1,1}$$

Operazioni tra matrici

① Somma : elemento per elemento tra matrici della stessa dimensione

② Prodotto matrice × numero : moltiplico tutto per il numero

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A+B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$5B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

③ Trasposta : scambio righe con colonne

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{Se } A \in M^{m\times n}, \text{ allora } A^t \in M^{n \times m}$$

④ Prodotto tra 2 matrici   Se $A \in M^{m,\boxed{n}}$ e $B \in M^{\boxed{n},l}$ (uguali), allora

$$AB \in M^{m,l}$$

ed è definita dalla relazione

$$\underbrace{(AB)_{i,j}}_{\substack{\text{elemento della}\\ \text{matrice AB nella}\\ \text{riga } i \text{ e colonna } j}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \cdot B_{k,j}}_{\substack{\text{Brutalmente è il prod.}\\ \text{scalare tra la } i\text{-esima}\\ \text{riga di A e la } j\text{-esima}\\ \text{colonna di B}}}$$

Esempio 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \qquad AB \in M_{2\times 2}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 11 & -3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

"Brutta" notizia: in generale $AB \neq BA$

Esempio 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$A \in M_{2\times 2}$
$C \in M_{2\times 3}$

$$AC = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \end{pmatrix}$$

↑ si può fare e diventa 2×3

$CA =$ non si può fare perché le dimensioni non sono compatibili

Esempio 3

$$A = \underbrace{(1,0,2)}_{\text{vettore riga}} \qquad B = \underbrace{(-1,1,4)}$$

$$AB^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = (7)$$

$$A^tB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

↑ 3×1 ↑ 1×3

Quando si può fare AB e BA? $A \in M_{m\times n}$ $B \in M_{\ell\times k}$

Per fare AB serve $n = \ell$

Per fare BA serve $k = m$

Matrice Identica È una matrice quadrata che ha 1 sulla diag. principale e 0 altrove

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Si indica con I. La proprietà è che

$$IA = AI = A \quad \text{per ogni } A \in \underbrace{M_{n\times n}}_{\text{quadrata}}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$ Idem dall'altra parte

Dimostrazione $$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j}$$

Ora supponiamo $A \in M_{n\times n}$ e B = Identità $n\times n$

$$B_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } k=j \\ 0 & \text{se } k\neq j \end{cases}$$

Nella sommatoria di sopra l'unico elemento che si salva è quello con $k=j$, quindi $(AB)_{i,j} = A_{i,j}$

Stesso discorso quando l'identità è A.

— o — o —

Proprietà Sia $A \in M_{m\times n}$ e sia $B \in M_{n\times k}$, quindi AB si può fare.

Allora

$$\boxed{(AB)^t = B^t \cdot A^t}$$ $B^t \in M_{k\times n}$ $A^t \in M_{n\times m}$

La trasposta del prodotto è il prodotto delle trasposte, ma con ordine invertito [Si dimostra con la solita formula]

Back to sistemi lineari

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \updownarrow = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ x-y \end{pmatrix}$$

In generale un sistema lineare si scrive nella forma

$$\boxed{Ax = b}$$

dove • A è una matrice $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{numero righe = numero equ.}}}{m} \times \overset{\substack{\text{numero col. = numero incognite} \\ \nearrow}}{n}$

- x è un vettore con n componenti, cioè le incognite
- b è un vettore con m componenti, cioè i termini noti.

Cosa vorrebbe fare uno? $Ax = b$. Uno vorrebbe una matrice A^{-1} tale che $A^{-1}A = Id$. In questo modo

$$\underbrace{A^{-1}A}\,x = A^{-1}b$$
$$\underbrace{Id\ x}$$
$$x = A^{-1}b$$

Quello che uno un giorno vorrà fare è trovare l'inversa della matrice A e poi moltiplicarla per b.

Esempio $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Cerco una matrice B t.c. $AB = Id$

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix}$$

Se voglio l'Id devo imporre

$$\begin{cases} 2a + 3c = 1 & 2\cdot 3^a - 1^a \rightsquigarrow c = -1 \overset{3^a}{\rightsquigarrow} a = 2 \\ 2b + 3d = 0 & \\ a + 2c = 0 & 2^a - 2\cdot 4^a \rightsquigarrow -d = -2 \rightsquigarrow d = 2 \\ b + 2d = 1 & \rightsquigarrow b = -3 \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Verifica : $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☺

Allo stesso modo si verifica che anche $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 10

Note Title 06/10/2023

Esercizio 1 Consideriamo i 3 p.ti

$A = (1,0,1) \qquad B = (0,1,2) \qquad C = (1,2,3)$

① Calcolare il p.to della retta AB più vicino a C

Strategia: scrivo il piano per C che è $\perp$ alla retta AB e interseco

retta AB : $A + t(B-A) = (1,0,1) + t(-1,1,1) = (1-t, t, 1+t)$

piano per C $\perp$ ad AB

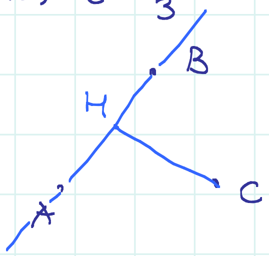
$$-x+y+z = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{impongo passaggio per C.}}}{4}$$

Interseco retta e piano

$$-(1-t)+t+(1+t) = 4 \rightsquigarrow \cancel{-1}+t+t\cancel{+1}+t = 4$$

$$-x \quad +y \quad + \quad z \quad = 4 \qquad \rightsquigarrow 3t = 4 \rightsquigarrow t = \frac{4}{3}$$

Il p.to richiesto è $\boxed{\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)} = H$



Ci aspettiamo che $CH \perp AB$

$$CH = C - H = (1,2,3) - \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

e questo è $\perp$ a $(-1,1,1)$ ☺

② Trovare l'area del triangolo ABC

$\boxed{\text{1º modo}}$ $\quad \text{Area} = \frac{1}{2}\,\text{base} \cdot \text{altezza} = \frac{1}{2} \|\overset{\substack{(-1,1,1)\\ \uparrow}}{AB}\| \cdot \|CH\|$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{3}\; \frac{1}{3} \sqrt{24}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{\sqrt{3}}\; \frac{1}{\cancel{3}} \cancel{\sqrt{3}} \cdot \cancel{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ $$\text{Area} = \frac{1}{2} \underset{\sqrt{3}}{\underset{\shortparallel}{\|AB\|}} \cdot \|AC\| \cdot \sin(\text{angolo compreso})$$

$$\|AC\| = \|C-A\| = \|(0,2,2)\| = 2\sqrt{2}$$

Detto α l'angolo compreso, sappiamo che

$$\cos\alpha = \frac{\langle (B-A),(C-A)\rangle}{\|B-A\| \cdot \|C-A\|} = \frac{\langle(-1,1,1),(0,2,2)\rangle}{\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Quindi $$\sin\alpha \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per forza} \\ \text{positivo}}}{=} \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Conclusione: $$\text{Area} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{\sqrt{3}} \cdot \cancel{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}} = \sqrt{2}$$

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ Misterioso. Calcolo $B-A = (-1,1,1)$ $C-A = (0,2,2)$

Faccio la formula misteriosa

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (0,2,-2)$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \|\text{vettore ottenuto}\| = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$ ☺

—∘—∘—

Il modo rapido segue dalla formula trigonometrica dell'area

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \|AB\| \cdot \|AC\| \cdot \sin(\text{angolo})$$

$B-A = v$ $C-A = w$

$$\cos(\text{angolo}) = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \qquad \sin(\text{angolo}) = \sqrt{1 - \frac{\langle v,w\rangle^2}{\|v\|^2 \cdot \|w\|^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - \langle v,w\rangle^2}{\|v\|^2 \|w\|^2}} = \frac{1}{\|v\| \cdot \|w\|} \sqrt{\|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - \langle v,w\rangle^2}$$

Sostituendo nella formula:

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\cancel{\|v\|}\cdot\cancel{\|w\|}\,\frac{1}{\cancel{\|v\|}\cdot\cancel{\|w\|}}\underbrace{\sqrt{\|v\|^2\|w\|^2-\langle v,w\rangle^2}}_{\text{si verifica che questa è la norma del vettore misterioso}}$$

$v = (a_1, b_1, c_1)$ $w = (a_2, b_2, c_2)$ e si fanno i conti...

— o — o —

Esercizio 2 Scrivere l'eq. della sfera che ha centro in $\underbrace{(1,2,3)}_{C}$ e passa per $\underbrace{(0,1,0)}_{A}$

Sono tutti i p.ti (x,y,z) tali che la loro distanza da C è la stessa di A

$$\text{dist}(C,A) = \|A-C\| = \|(-1,-1,-3)\| = \sqrt{11}$$

Devo imporre

$$\text{dist}(P,C)^2 = \text{dist}(A,C)^2$$

$$\boxed{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = 11}$$

Oss. Nel piano la circ. con centro in $C = (x_0, y_0)$ e raggio r ha equ.

$$\underbrace{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}_{\text{dist}((x,y),(x_0,y_0))^2} \overset{\leq}{=} r^2$$

$\leq$ → tutto l'interno

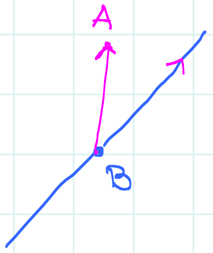
$=$ → solo bordo

La sfera è la stessa cosa in 3 variabili

— o — o —

Esercizio 3 Scrivere il piano che passa per $\overset{A}{(1,1,1)}$ e contiene la retta $\underbrace{(1,0,1)}_{B} + t\,\underbrace{(-2,3,4)}_{C}$

Metodo bovino: diamo due valori a t e troviamo 2 p.ti P e Q della retta. Poi facciamo piano per A, P, Q



Più rapido: $B + tC + s\underbrace{(A-B)}_{\text{posso mettere } B-A \text{ o } 7(B-A)}$

$= (1,0,1) + t(-2,3,4) + s(0,1,0)$

Se voglio passo in cartesiana

Esercizio 4 Scrivere il piano che

- contiene la retta $(1,0,1) + t(-2,3,4)$
- non interseca la retta $(1,1,2) + t(0,1,1)$

(quindi il piano contiene la prima retta ed è parallelo alla 2ª)

Risposta: $\underbrace{(1,0,1) + t(-2,3,4)}_{\text{prima retta}} + s\underbrace{(0,1,1)}_{\text{direzione seconda retta}}$

Passiamo in cartesiana

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-1,2,-2) \rightsquigarrow -x+2y-2z = -3$$

$$\rightsquigarrow x-2y+2z = 3$$

Interseco il piano con la 2ª retta $(1, 1+t, 2+t)$

$$\rightsquigarrow 1-2(1+t)+2(2+t) = 3$$

$$1-2-\cancel{2t}+4+\cancel{2t} = 3 \qquad 3=3$$

Questo ci dice che anche la seconda retta è contenuta nel piano, quindi le due rette sono incidenti.

Dove si intersecano?

Retta 1: $(1-2t, 3t, 1+4t)$ Retta 2: $(1, 1+t, 2+t)$

$$\begin{cases} 1-2t = 1 & \rightsquigarrow t=0 \\ 3t = 1+s & \rightsquigarrow s=-1 \\ 1+4t = 2+s & \rightsquigarrow \text{Diventa } 1=1 \text{ ed è sempre verificata.} \end{cases}$$

— ∘ — ∘ —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 11

Note Title 10/10/2023

Spazi vettoriali (Per la teoria completa, vedi lezioni 2021/22)

Uno spazio vettoriale è un insieme di oggetti (detti vettori) sui quali so fare 2 operazioni

- somma VETTORE + VETTORE ⇝ VETTORE

  (solite proprietà: commutativa, associativa, $\exists\, 0$, $\exists\, -v$)

- prodotto per un numero NUMERO · VETTORE ⇝ VETTORE

  (solite proprietà: $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$, solite associative e distributive)

Da queste proprietà ne seguono altre, alle quali siamo "abituati"

Esempio 1 Se $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w}$, allora $\vec{u} = \vec{v}$

Basta aggiungere a dx e sx $-\vec{w}$. Infatti

$$\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w} \qquad \text{aggiungo } -\vec{w}$$

$$(\vec{u} + \vec{w}) - \vec{w} = (\vec{v} + \vec{w}) - \vec{w} \qquad \text{uso associativa}$$

$$\vec{u} + (\vec{w} - \vec{w}) = \vec{v} + (\vec{w} - \vec{w}) \qquad \text{uso la def. di } -\vec{w}$$

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{v} + \vec{0} \qquad \text{uso la def. di } \vec{0}$$

$$\vec{u} = \vec{v}$$

☺

Esempio 2 Lo $\vec{0}$ è unico

Supponiamo che ci siano $\vec{0}_1$ e $\vec{0}_2$. Allora

$$\vec{0}_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso la def.} \\ \text{di } \vec{0}_2}}{=} \vec{0}_1 + \vec{0}_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{commu-} \\ \text{tativa}}}{=} \vec{0}_2 + \vec{0}_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso la} \\ \text{def. di } \vec{0}_1}}{=} \vec{0}_2$$

— o — o —

Esempi di spazi vettoriali

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}^2$ o più in generale $\mathbb{R}^d$ con le operazioni che abbiamo visto precedentemente

$\boxed{2}$ $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale rispetto alla solita somma e al solito prodotto

(potrei anche fare la divisione tra numeri, ma non la considero)

$\boxed{3}$ $\mathbb{R}[x]$ = insieme dei polinomi nella variabile x a coeff. reali

$$p(x) = \underset{\uparrow}{c_0} + \underset{\uparrow}{c_1} x + \underset{\uparrow}{c_2} x^2 + \ldots + \underset{\uparrow}{c_n} x^n$$

coeff. del polinomio

Operazioni : → somma di polinomi

→ prodotto di un polinomio per un numero

(ai fini dello spazio vettoriale non considero il prodotto tra polinomi)

$\boxed{4}$ $M_{m \times n}$ = insieme delle matrici $m \times n$, con m ed n fissati

Operazioni : → somma di matrici

→ prodotto matrice · numero

[Se $m = n$ potrei anche moltiplicare le matrici, ma non lo considero]

$\boxed{5}$ $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ = polinomi di grado ≤ 3 con le solite operazioni

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

$\boxed{6}$ $\mathbb{R}_{\geq 3}[x]$ = pol. di grado ≥ 3 Non è uno spazio vettoriale rispetto alle solite operazioni

$p_1(x) = x^3 - x^2$ $\qquad p_2(x) = -x^3 + 3x$ $\qquad \in \mathbb{R}_{\geq 3}[x]$

La somma $p_1(x) + p_2(x) = -x^2 + 3x \notin \mathbb{R}_{\geq 3}[x]$

Parentesi di confronto

Consideriamo $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$, $M_{2\times 2}$

(a_1, a_2, a_3, a_4) $\quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$

Questi oggetti "sono la stessa cosa", sono comunque 4 numeri con le operazioni che si comportano allo stesso modo.

Esempio analogo: $M_{3\times 5}$ "sono la stessa cosa" di $\mathbb{R}^{15}$ o di $\mathbb{R}_{\leq 14}[x]$

—o—o—

$\boxed{7}$ Funzioni $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sono uno sp. vettoriale rispetto alla somma di due funzioni e al prodotto funzione per numero.

Chi è lo $\vec{0}$?

È una funzione $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che $f + g = f$ per ogni f.

Quindi $g(x) = \underset{\uparrow}{0}$ per ogni $x \in [0,1]$

0 dei reali

$\boxed{8}$ Funzioni $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue sono uno sp. vettoriale

[Serve che la somma di funz. cont. è ancora continua ed il prodotto per un numero idem]

Oss. Posso sostituire $[0,1]$ con un sottoinsieme qualunque di $\mathbb{R}$

$\boxed{9}$ $V = \{ p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \; : \; p(2023) = 0 \}$ è uno sp. vettoriale rispetto alle operazioni che eredita da $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

[Servono due osservazioni: la somma di 2 polinomi che si annullano in 2023 continua ad annullarsi in 2023. Idem per il prodotto per un numero]

$\boxed{10}$ $V = \{ p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] : p(2023) = 1 \}$

Non è uno spazio vettoriale (sia la somma, sia il prodotto vanno male)

Esempio $\boxed{9}$ rivisto Sia $p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ con $p(2023) = 0$.
Per il teorema di RUFFINI sappiamo che

$$p(x) = (x - 2023)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$$

In questo modo posso identificare ogni $p(x) \in V$ con l'elemento $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$

[Basta osservare che le operazioni in V diventano le solite in $\mathbb{R}^3$]

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 12

Note Title 10/10/2023

Sottospazi vettoriali

Def. Sia V uno sp. vett. e sia $W \subseteq V$ un sottoinsieme non vuoto. Si dice che W è un sottospazio se (è chiuso rispetto alla somma e al prodotto)

- $\forall w_1 \in W$ e $\forall w_2 \in W$ si ha che $w_1 + w_2 \in W$
- $\forall w \in W$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ si ha che $\lambda w \in W$

Oss. La seconda con $\lambda = 0$ dice in particolare che $0 \in W$

$[\ \underset{\uparrow\ 0 \text{ numero}}{0} \cdot \vec{w} = \underset{\nwarrow\ 0 \text{ vettore}}{\vec{0}}\ ]$

Come dimostro che un certo $W \subseteq V$ NON è un sottospazio?

Faccio vedere che qualcosa va storto, ad esempio

→ mostro che $\vec{0} \notin W$

→ trovo w_1 e w_2 in W t.c. $w_1 + w_2 \notin W$

→ trovo $w \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\lambda w \notin W$

} basta un esempio

Come dimostro che un certo $W \subseteq W$ è davvero un sottospazio?

Faccio vedere che nulla va storto, quindi

→ per ogni w_1 e w_2 in W, la somma $w_1 + w_2 \in W$

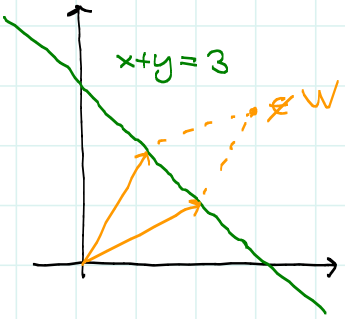
→ per ogni $w \in W$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, il prodotto $\lambda w \in W$

[qui non basta un esempio, serve una dimostrazione "universale", devo usare le lettere]

— o — o —

Sottospazi di $\mathbb{R}^2$

$x+y=3,$	$2x+3y=0,$	$x \geq 0,$	$x^2+y^2=1,$	$xy \geq 0,$
NO	SI	NO	NO	NO



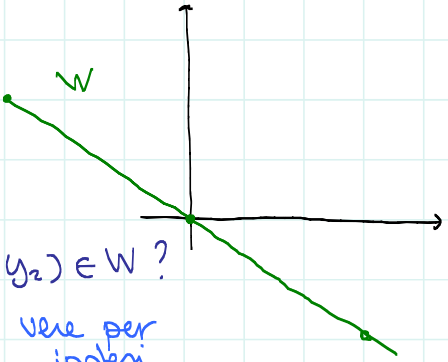
① $x+y=3$

Qui va male tutto

- $(0,0) \notin W$
- $(1,2) \in W$, $(3,0) \in W$

  $(1,2) + (3,0) = (4,2) \notin W$
- $(1,2) \in W$, $5\,(1,2) = (5,10) \notin W$

Posso vedere tutto anche geometricamente



② $2x+3y=0$

Qui va bene tutto

- se $(x_1,y_1) \in W$ e $(x_2,y_2) \in W$, posso concludere che $(x_1,y_1)+(x_2,y_2) \in W$?

  $2x_1+3y_1=0 \qquad 2x_2+3y_2=0$ ← vere per ipotesi

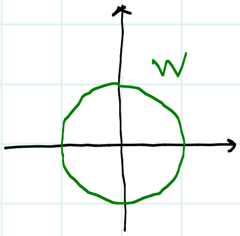
  Allora $2(x_1+x_2)+3(y_1+y_2)$

  $= (2x_1+3y_1) + (2x_2+3y_2) = 0+0=0$

  ⇝ SOMMA OK
- Se $(x,y) \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, posso concludere che $(\lambda x, \lambda y) \in W$?

  Hp: $2x+3y=0$ Th: $2\lambda x+3\lambda y=0$

  vero perché basta raccogliere λ.

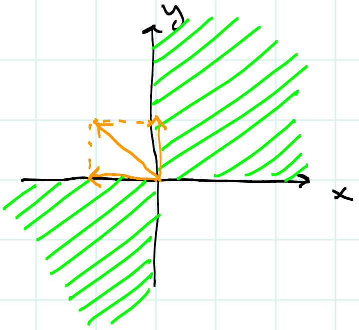


③ $x^2+y^2=1$

Qui va male tutto

(fare gli esempi)

④ $xy \geq 0$ (cioè x e y hanno stesso segno)



- $(0,0) \in W$ ☺
- Se $(x,y) \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, posso concludere che $(\lambda x, \lambda y) \in W$?

  sì, perché $\lambda x \cdot \lambda y = \underbrace{\lambda^2}_{\geq 0} \underbrace{xy}_{\geq 0} \geq 0$ ☺

- La somma però va male ☹

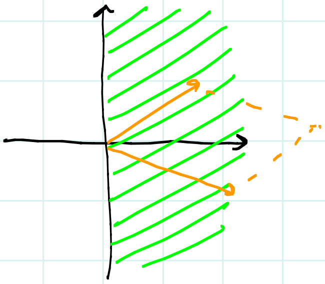
  $(1,2) \in W$ $(-2,-2) \in W$ $(-1,0) \overset{?}{\in} W$ ☺

  $(3,1) \in W$ $(-2,-2) \in W$ $(1,-1) \notin W$ ☹

Quindi NON è un sottospazio

Esempio più eclatante: $(0,1)$ e $(-1,0)$

⑤ $x \geq 0$



- $(0,0) \in W$ ☺
- somma va bene

  $(x_1, y_1) \in W \rightsquigarrow x_1 \geq 0$

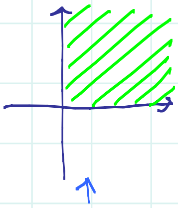
  $(x_2, y_2) \in W \rightsquigarrow x_2 \geq 0$

  $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \overset{?}{\in} W$ $x_1 + x_2 \overset{?}{\geq} 0$ sì!

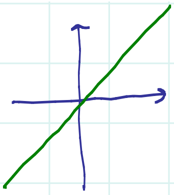
- Se $(x,y) \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $(\lambda x, \lambda y) \notin W$ se $\lambda < 0$ e $(x,y) \neq (0,0)$.

  Ad esempio $(1,1) \in W$ ma $-(1,1) \notin W$.

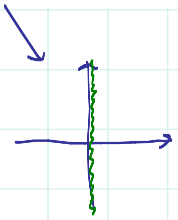
$\boxed{\begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}}$, $x = y$, $x = 0$, $x^2 + y^2 \geq 1$, $x^2 + y^2 \leq 1$.



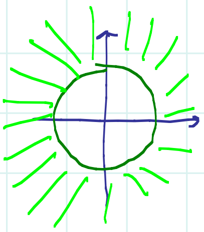
☹ prod. per λ negativi



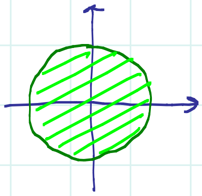
☺



☺



$0 \notin W$ ☹



$(1,0) \in W$
$(0,1) \in W$ ☹
$(1,1) \notin W$

Spazio vettoriale $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$

$p(0) = 5,$ $p(5) = 0,$ $p(0) = 0,$ $p(5) = 5,$ $p(0) = p(5),$

① Va male tutto: $0 \notin W$, somma e prodotto

② Va bene tutto [Se $p_1(5) = 0$ e $p_2(5) = 0$, allora $(p_1+p_2)(5)$
$= p_1(5) + p_2(5) = 0$]

③ Tutto bene

④ $p(5) = 5 \rightsquigarrow$ tutto male come in ①

⑤ Tutto bene

[Volendo posso espandere la condizione: scrivo

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Cosa vuol dire che $p(0) = p(5)$?

$$\cancel{a_0} = \cancel{a_0} + 5a_1 + 25a_2 + 125a_3$$

cioè $a_1 + 5a_2 + 25a_3$

Quindi l'esercizio è la stessa cosa che dire

$$W = \{(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4 : a_1 + 5a_2 + 25a_3 = 0\}$$

↑ qui andava male se era $\neq 0$

$p(x) = p(x^2),$ Espando la condizione...

$$a_0 + a_1\cancel{x} + a_2\cancel{x^2} + a_3\cancel{x^3} = a_0 + a_1\cancel{x^2} + a_2\cancel{x^4} + a_3\cancel{x^6}$$

$\rightsquigarrow a_3 = 0 \rightsquigarrow a_2 = 0 \rightsquigarrow a_1 = 0 \rightsquigarrow a_0$ qualunque

Quindi W = polinomi costanti

Quindi va tutto bene!

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 13

Note Title 10/10/2023

→ Combinazione lineare
→ Lineare indipendenza
→ Generatori
→ SPAN
→ Basi
→ Dimensione

① Comb. lineare: $v_1, \dots, v_n$ vettori $c_1, \dots, c_n$ numeri

$$\boxed{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n}$$

② Un insieme di vettori $v_1, \dots, v_n \in V$ si dice lin. indip. se l'unica loro comb. lineare che fa $\vec{0}$ è quella con tutti i coeff. nulli

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \dots = c_n = 0$$

③ Si dice che $v_1, \dots, v_n$ sono generatori di uno sp. vett. V se ogni $v \in V$ si scrive come comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$.

④ Si dice SPAN $(v_1, \dots, v_n)$ l'insieme di tutte le comb. lineari di $v_1, \dots, v_n$

⑤ Si dice che $v_1, \dots, v_n$ sono una BASE di V se
→ sono lin. indip.
→ sono generatori, cioè SPAN $(v_1, \dots, v_n) = V$

⑥ La dim di uno sp. vett. è il numero di elementi di una base di V (tutte le basi hanno lo stesso numero di elem.)

Esempio 1 $V = \mathbb{R}^2$ $v_1 = (1,0)$ $v_2 = (0,1)$

→ Sono lin. indip.

Una loro comb. lineare è $a(1,0) + b(0,1) = (a,b)$ e questo è $(0,0)$ se e solo se $a=b=0$.

→ Sono generatori di $\mathbb{R}^2$

Dato $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ lo posso scrivere come $A(1,0) + B(0,1)$

→ Quindi $\{v_1, v_2\}$ sono UNA base di $\mathbb{R}^2$, che quindi ha dimensione 2

Esempio 2 $V = \mathbb{R}^2$ $v_1 = (3,1)$ $v_2 = (-1,2)$

→ Sono lin. indip.?

$$a v_1 + b v_2 = a(3,1) + b(-1,2) = (3a-b, a+2b) = (0,0)$$

$$\begin{cases} 3a-b=0 \\ a+2b=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3a-b=0 \\ -7b=0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{3} & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{-7} & 0 \end{array}\right)$$

⇝ $a=b=0$ ⇝ sono lin. indip.

→ Sono generatori?

Dato un qualunque $(A,B) \in \mathbb{R}^2$, lo posso scrivere come

$$a(3,1) + b(-1,2) = (A,B)$$
$$(3a-b, a+2b) = (A,B)$$

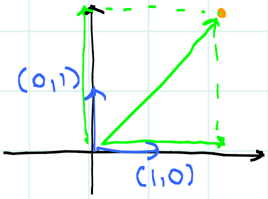
$$\begin{cases} 3a-b=A \\ a+2b=B \end{cases}$$ Dati A e B, posso trovare a e b ?

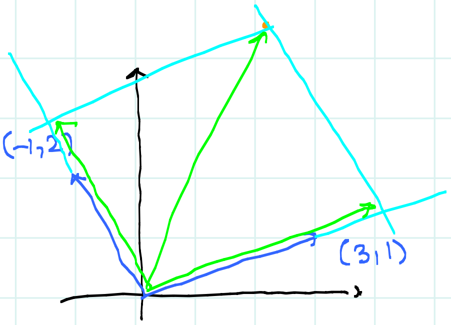
$$\begin{cases} 3a-b=A \\ -7b=A-3B \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{3} & -1 & A \\ 0 & \boxed{-7} & A-3B \end{array}\right)$$

⇝ il sistema ammette sol. unica.

→ Anche questi sono $\boxed{\text{una}}$ base di $\mathbb{R}^2$

Geometricamente





Una base sono i mattoni fondamentali mediante i quali posso ottenere ogni altro vettore IN MANIERA UNICA

Se un vettore lo scrivo in 2 modi

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = \hat{c}_1 v_1 + \dots + \hat{c}_n v_n$$

allora

$$(c_1 - \hat{c}_1) v_1 + \dots + (c_n - \hat{c}_n) v_n = 0$$

da cui, grazie alla lin. indip., $c_1 = \hat{c}_1$, $c_2 = \hat{c}_2$, ...

Esempio 3 $V = \mathbb{R}^2$ $v_1 = (1,2)$ $v_2 = (2,3)$ $v_3 (5,1)$

→ Sono una base di $\mathbb{R}^2$?

NO: sono troppi!

→ Sono lin. indip.?

NO: sono troppi. Cerchiamo una relazione

$$a(1,2) + b(2,3) + c(5,1) = (0,0)$$

$$\begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \\ 2a + 3b + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{a} + 2b + 5c = 0 \\ \boxed{-b} - 9c = 0 \end{cases}$$

↑ param. libero

$c = t$, $b = -9t$, $a = -2b - 5c = 13t$

quindi ad esempio $a = 13$, $b = -9$, $c = 1$

e la somma viene 0.

→ Sono generatori? Certo: se metto (A,B) al posto di $(0,0)$ cui viene comunque un sistema che posso risolvere perché i coeff. sono gli stessi di prima.

Esempio 4 $V = \mathbb{R}^3$ $v_1 = (1,0,2)$ $v_2 = (3,1,1)$

→ Sono una base?

Osserviamo che $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 3, perché una possibile base è $\underbrace{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)}_{\text{BASE CANONICA}}$ ⇝ FACILE VERIFICA

Quindi quelli dati sono troppo pochi! ⇝ NO BASE

→ Sono lin. indip.? SI

$$a(1,0,2) + b(3,1,1) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a+3b=0 \\ b=0 \\ 2a+b=0 \end{cases} \rightsquigarrow a=b=0 \rightsquigarrow ☺$$

→ Sono generatori? NO!

Se lo fossero, sarebbero una base

→ Cos'è SPAN$((1,0,2),(3,1,1))$?

Per def. è l'insieme delle comb. lineari

$$a(1,0,2)+b(3,1,1) \qquad a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}$$

Quindi si tratta del piano che passa per l'origine e per $(1,0,2)$ e $(3,1,1)$

Oss. Quando è che 2 vettori v_1 e v_2 sono lin. DIPENDENTI?

Quando esistono a e b, NON ENTRAMBI NULLI, tali che

$$av_1+bv_2 = 0 \nwarrow \text{vettore nullo}$$

Se per esempio $a \neq 0$, allora

$$v_1 = -\frac{b}{a}v_2$$

cioè uno è multiplo dell'altro.

Esempio 5 $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

Che dimensione ha V? [Da quanti parametri dipende un elemento di V?]

Risposta 3, e una possibile base è

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d] & x \arrow[d] & x^2 \arrow[d] \\ (1,0,0) & (0,1,0) & (0,0,1) \end{tikzcd}$$

→ I polinomi $5x - x^2$ e $7 + x^2$ sono lin. indip.?

Risposta: SI, perché non sono uno multiplo dell'altro.

Bovino

$$a(5x-x^2)+b(7+x^2) = (-a+b)x^2+5ax+7b = 0$$

cioè

$$\begin{cases} -a+b=0 \\ 5a=0 \\ 7b=0 \end{cases} \rightsquigarrow a=b=0$$

→ Sono generatori?

NO! Sono troppo pochi

È uguale a considerare $(0,5,-1)$ e $(7,0,1)$ in $\mathbb{R}^3$.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 14

Note Title 13/10/2023

$\mathbb{R}^3$	$e_1 = (3,1,2)$ $e_2 = (4,-1,3)$ $e_3 = (-1,-18,2)$	$(0,-2,1)$		$(1,0,1)$		①
$\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$	$e_1 = x^2+1$ $e_2 = x-2$ $e_3 = x+3$	x		x^2-3x+2	.	②
↑ Spazio	↑ Base	↑		↑ vettori dello spazio		

→ Dimostrare che quella indicata è una base

→ Determinare le comp. dei vettori rispetto alla base

Per la prima domanda, basta: → vedere che sono il numero giusto
→ verificare la lin. indip. (li metto a matrice, lavoro alla Gauss, vedo se tutte le righe hanno il PIVOT)

Per la seconda domanda basta un sistema lineare.

① $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ -1 & -18 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & -53 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{3} & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{7} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}$ ☺

$(0,-2,1) = a\,(3,1,2) + b\,(4,-1,3) + c\,(-1,-18,2)$

$\rightsquigarrow$ sistema in (a,b,c) che so già avere SOLUZIONE UNICA

Oss. Quando costruisco la matrice da lavorare alla Gauss, posso mettere i vettori come riga/colonna e viene lo stesso (oggi sarebbe più corretto a colonna)

② $e_1 = x^2+1$ $e_2 = x-2$ $e_3 = x+3$ $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

La dim. dello spazio è 3, quindi il numero è giusto.

Verifico la lineare indipendenza

$$ae_1+be_2+ce_3=0 \overset{?}{\leadsto} a=b=c=0$$

$$a(x^2+1)+b(x-2)+c(x+3)=0$$ ↖ polinomio nullo

$$ax^2+(b+c)x+a-2b+3c=0$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & & =0 \\ & b+c & =0 \\ a & -2b+3c & =0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \\ x^2+1 \quad x-2 \quad x+3 \end{array} \leadsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{-5} & 0 \end{array}\right) \leadsto \text{ok} \quad a=b=c=0$$

<u>Oss.</u> È come se in $\mathbb{R}^3$ avessi lavorato con i vettori

$$(1,0,1) \qquad (0,1,-2) \qquad (0,1,3)$$

Per la seconda domanda, per trovare le componenti di x, devo risolvere

$$x=a(x^2+1)+b(x-2)+c(x+3)$$

(ottengo lo stesso sistema con $0,1,0$ a dx come termini noti)

— o — o —

Dimostrare che nello spazio $M_{2\times2}$, una base è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sono in numero giusto. Basta lavorare alla Gauss su

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Ho messo le "matrici" come colonne]

[Equivalente a fare

$$a\cdot 1^a+b\cdot 2^a+c\cdot 3^a+d\cdot 4^a=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio

$\mathbb{R}^2$	$v_1=(1,-1)$ $v_2=(2,3)$ $v_3=(-3,3)$			

↑ spazio ↑ vettori

Sono lin. indip.? No perché sono troppi

No perché $\underbrace{3v_1+v_3}_{\text{comb. lin. che viene 0 senza che tutti i coeff. siano nulli}}=0$

Chi è il loro Span(v_1,v_2,v_3)

[l'insieme di tutti i vettori che si scrivono come $av_1+bv_2+cv_3$]

È tutto $\mathbb{R}^2$! Perché?

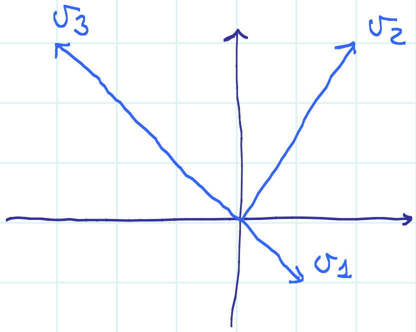
In questa caso $\text{Span}(v_1,v_2,v_3) \supseteq \text{Span}(\overbrace{v_1,v_2}^{\text{sono una base di } \mathbb{R}^2}) = \mathbb{R}^2$

↑ perché v_1 e v_2 sono lin. indip., non essendo uno multiplo dell'altro

Allo stesso modo $\text{Span}(v_2,v_3)=\mathbb{R}^2$ [sono lin. indip.]

$\text{Span}(v_1,v_3)=$ $\boxed{\text{retta } y=-x}$

Sottospazio di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1



Conclusione

$\text{Span}(v_1,v_2,v_3)=\text{Span}(v_1,v_2)=\text{Span}(v_2,v_3)=\mathbb{R}^2$

"Posso eliminare uno a caso tra v_1 e v_3"

$\boxed{\text{Lemma di eliminazione}}$ Siano $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}$ dei vettori in uno sp. vett. V.

Supponiamo che v_{m+1} sia comb. lin. di $v_1, \dots, v_m$, cioè

$$v_{m+1} = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m$$

per opportuni numeri $c_1, \dots, c_m$.

Allora

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_m, v_{m+1}) = \text{Span}(v_1, \dots, v_m)$$

Esempio

$v_1 = (1,0,2)$
$v_2 = (2,0,1)$
$v_3 = (1,1,1)$

Sono lin. indip.? $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sono una base di $\mathbb{R}^3$, quindi $\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$.

— o — o —

$v_1 = (1,0,2)$
$v_2 = (2,-1,1)$
$v_3 = (-1,1,1)$

Non sono lin. indip. perché

$v_3 = v_1 - v_2$

[$v_1 - v_2 - v_3 = 0$ senza tutti i coeff. nulli]

Quindi: non sono una base e non sono generatori e il loro Span non è tutto $\mathbb{R}^3$

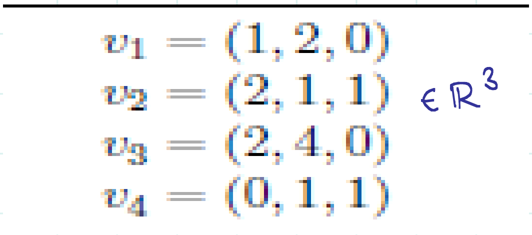
$\text{Span}(v_1, v_2, \cancel{v_3}) = \text{Span}(\underbrace{v_1, v_2}_{\text{lin. indip.}})$ = s.sp. di dimensione 2, cioè un piano

$\parallel$

$\text{Span}(v_1, v_3)$ (perché $v_2 = v_1 - v_3$, quindi eliminabile)

$\parallel$

$\text{Span}(v_2, v_3)$ (perché $v_1 = v_3 + v_2$)



$$\begin{aligned} v_1 &= (1,2,0) \\ v_2 &= (2,1,1) \\ v_3 &= (2,4,0) \\ v_4 &= (0,1,1) \end{aligned} \in \mathbb{R}^3$$

Non sono lin. indip. perché sono troppi!

Vedo se lo sono i primi 3 e la risposta è no! $v_3 = 2v_1$

Gli ultimi 3 sono lin. indip. ~ fare il conto

Quindi $\text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \text{Span}(v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^3$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 15

Note Title 13/10/2023

Somma e intersezione di sottospazi

Riassunto teoria.

Siano V e W due s.sp. vett. di uno stesso spazio vettoriale X.

Allora

→ $V \cap W$ è ancora un s.sp. vett.

→ $V + W = \{ v + w : v \in V, w \in W \}$ è ancora un s.sp. vett.

e vale la FORMULA DI GRASSMANN

$$\boxed{\dim(V+W) + \dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W)}$$

Se inoltre $V \cap W = \{0\}$, allora la somma si dice DIRETTA e si scrive

$$V \oplus W$$

e a questo punto ogni vettore in $V \oplus W$ si scrive in modo unico come $v + w$ con $v \in V$ e $w \in W$.

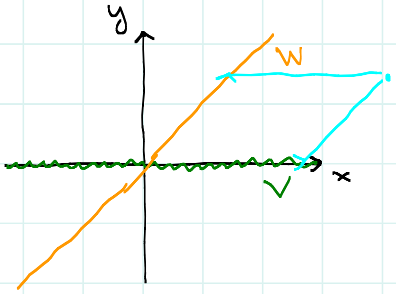
— o — o —

Esempi

X	V	W	$\dim(V)$	$\dim(W)$	$\dim(V \cap W)$	$\dim(V+W)$	
$\mathbb{R}^2$	$(1,0)$	$(1,1)$	1	1	0	2	①
$\mathbb{R}^2$	$(1,1)$	$(2,2)$ $(3,3)$	1	1	1	1	②
$\mathbb{R}^2$	$(1,2)$	$(3,4)$ $(5,6)$	1	2	1	2	③

↑ generatori ↗

①



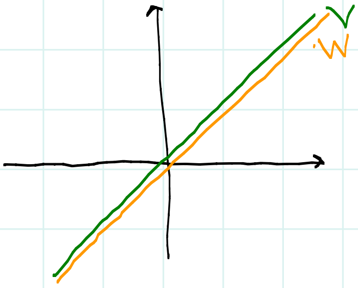
$V = \text{Span}\,(1,0)$

$W = \text{Span}\,(1,1)$

$V \cap W = \{(0,0)\}$

$V + W = \text{Span}\,\underbrace{((1,0),(1,1))}_{\text{sono una base}} = \mathbb{R}^2$

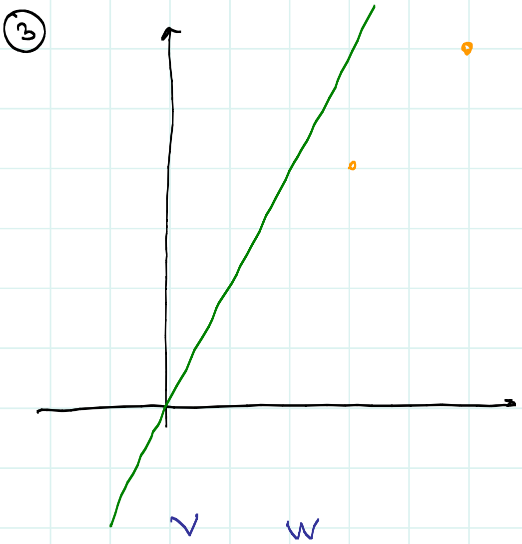
②



$V = W = \text{Span}\,(1,1)$

$V \cap W = V = W = V + W$

③



$V = \text{Span}\,(1,2)$

$W = \text{Span}\,(\underbrace{(3,4),(5,6)}) = \mathbb{R}^2$

Non sono multipli, quindi sono lin. indip., quindi sono una base di $\mathbb{R}^2$

$V \cap W = V \qquad V + W = \mathbb{R}^2$

	V	W					
$\mathbb{R}^3$	$(1,2,3)$	$(1,1,0)$ $(0,2,-1)$					④
$\mathbb{R}^3$	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$	$(0,1,1)$ $(1,1,1)$					⑤

V = retta W = piano perché sono lin. indip.

Volendo il piano potremmo scriverlo

Parametrica ⇝ $a\,(1,1,0) + b\,(0,2,-1)$

Cartesiana ⇝ $\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ⇝ $(-1,1,2)$ ⇝ $x - y - 2z = 0$

La retta non è contenuta nel piano ($(1,2,3)$ non verifica eq.)

Quindi $V \cap W = \{(0,0,0)\}$.

Grassmann

$$\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\dim\,(V \cap W)} + \dim\,(V + W) = \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\dim\,(V)} + \underset{\overset{\shortparallel}{2}}{\dim\,(W)}$$

⇝ $\dim\,(V+W) = 3$ ⇝ $V + W = \mathbb{R}^3$ anzi $V \oplus W = \mathbb{R}^3$

In alternativa, potevo osservare che

$$V+W = \text{Span}\left((1,2,3),(1,1,0),(0,2,-1)\right)$$

Ora potevo verificare che sono lin. indip. (... Gauss... pivot) dedurne che sono una base di $\mathbb{R}^3$, quindi $V+W$ ha dim. 3, quindi $V\cap W$ ha dim 0, cioè è il solo vettore nullo.

⑤ $V = \text{Span}(\overset{v_1}{(1,1,0)}, \overset{v_2}{(1,0,1)}) = $ piano

$W = \text{Span}(\underset{w_1}{(0,1,1)}, \underset{w_2}{(1,1,1)}) = $ piano

Possono essere in somma diretta? NO!

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{almeno 1} \\ \text{deve essere}}}{\dim(V\cap W)} + \underset{\substack{\shortparallel \\ \text{al max } 3}}{\dim(V+W)} = \underset{\substack{\shortparallel \\ 2}}{\dim(V)} + \underset{\substack{\shortparallel \\ 2}}{\dim(W)}$$

Abbiamo 2 scenari: $2+2 = 2+2$ ⇝ piani coincidenti

$1+3 = 2+2$ ⇝ piani incidenti

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Passo alle cartesiane, e vai come sempre

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Cerco di capire chi è $\text{Span}(v_1,v_2,w_1,w_2)$

Osservo che $v_1+v_2+w_1 = 2w_2$, quindi

$$\text{Span}(v_1,v_2,w_1,\cancel{w_2}) = \text{Span}(v_1,v_2,w_1)$$

e spero che l'ultimo sia tutto $\mathbb{R}^3$, cioè che siano lin. indip

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{-1} & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} \end{pmatrix}$$ ☺

— 0 — 0 —

			$V\cap W$	$V+W$	V	W
$\mathbb{R}^4$	$(1,2,0,1)$ $(3,0,-1,1)$	$(1,0,1,0)$ $(0,2,-1,1)$	2 1 0	2 3 4	2	2
	v_1 v_2	w_1 w_2				

$\dim(V) = 2$ $\dim(W) = 2$

Scenari possibili: sono 3.

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Per capire chi è la somma, osservo che

$$V+W = \text{Span}(v_1, v_2, w_1, w_2)$$

e provo a vedere se sono lin. indip.

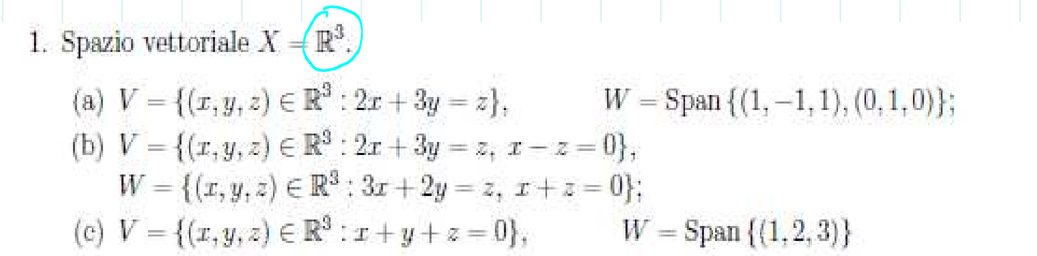
$\boxed{2° \text{ modo}}$ Per capire chi è l'intersezione, provo a risolvere

$$a(1,2,0,1) + b(3,0,-1,0) = c(1,0,1,0) + d(0,2,-1,1)$$

Se trovo come unica soluz. $a=b=c=d=0$, allora $V \cap W = \{0\}$ e quindi siamo nello scenario $0+4$.

(Osserviamo che il conto equivale alla lineare indip.)

— o — o —



1. Spazio vettoriale $X = \mathbb{R}^3$.

(a) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+3y=z\}$, $W = \text{Span}\{(1,-1,1),(0,1,0)\}$;

(b) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+3y=z,\ x-z=0\}$,
$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x+2y=z,\ x+z=0\}$;

(c) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$, $W = \text{Span}\{(1,2,3)\}$

(a) V = piano = $\text{Span}((1,0,2),(0,1,3))$

W = piano ⇝ cartesiana

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-1,0,1) \rightsquigarrow \boxed{x-z=0}$$

$V \cap W$ = retta (che volendo trovo), $V+W = \mathbb{R}^3$ per Grassmann.

(b) V = retta che se voglio trovo = $\text{Span}(v)$

W = " = $\text{Span}(w)$

Se v e w sono multipli, allora $V=W=V+W=V\cap W$

Se no $V \cap W = \{0\}$ e $V+W$ = piano = $\text{Span}(v,w)$.

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 16

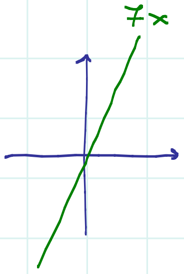
Note Title 17/10/2023

APPLICAZIONI LINEARI

Siano V e W sp. vett. Un'appl. lin. è una $f: V \to W$ t.c.

(i) $f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2)$ per ogni $v_1, v_2 \in V$

(ii) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ per ogni $v \in V$ e ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.



Esempi $V = W = \mathbb{R}$

$f(x) = 7x$ è lineare

(i) $f(x_1+x_2) \underset{\uparrow \ \text{def. di } f}{=} 7(x_1+x_2) \underset{\uparrow \ \text{precorso}}{=} 7x_1+7x_2 \underset{\uparrow \ \text{def. di } f}{=} f(x_1)+f(x_2)$

(ii) $f(\lambda x) \underset{\uparrow \ \text{def. di } f}{=} 7 \cdot \lambda x \underset{\uparrow \ \text{precorso}}{=} \lambda \cdot 7x \underset{\uparrow \ \text{def di } f}{=} \lambda f(x)$

$f(x) = x^2$ NON è lineare

La somma può andare male (basta un esempio)

$f(1) = 1$ $f(2) = 4$ $f(3) = 9$ e non $f(1)+f(2) = 5$

Il prodotto può andare male

$f(2) = 4$ $f(3 \cdot 2) = 36$ e non $3f(2)$

$f(x) = 3x+2$ è lineare? NO!

La somma può andare male: $f(1) = 5$, $f(2) = 8$, $f(3) = 11$ e non 13

Il prodotto può andare male: $f(1) = 5$ $f(3 \cdot 1) = 11$ e non 15

Oss. Se $f: V \to W$ è lineare, allora per forza $f(\underset{\uparrow \ 0 \text{ di } V}{0}) = \underset{\uparrow \ 0 \text{ di } W}{0}$

$f(0) = f(0 \cdot v) = 0 \cdot f(v) = 0$ qualunque sia $v \in V$

$\boxed{\text{Teorema di struttura}}$ Siano V e W sp. vett.

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una $\boxed{\text{base}}$ di V

Siano $\{w_1, \dots, w_n\}$ dei vettori $\boxed{\text{qualunque}}$ di W (non per forza una base).

Allora esiste un'unica $f : V \to W$ lineare tale che

$$f(v_i) = w_i \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

[Posso mandare una base dove mi pare e a quel punto l'applic. lineare esiste ed è unica]

$\boxed{\text{Idea fondamentale}}$ Ogni $v \in V$ lo posso scrivere come

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

e a quel punto

$$\begin{aligned} f(v) &= f(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) && \text{[le comb. lin. escono fuori]} \\ &= c_1 f(v_1) + \dots + c_n f(v_n) && [f(v_i) = w_i] \\ &= c_1 w_1 + \dots + c_n w_n \end{aligned}$$

<u>Esempio</u> $V = \mathbb{R}^2 \qquad W = \mathbb{R}$

Come sono fatte tutte le applic. lin. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

Prendo una base di $\mathbb{R}^2$, ad esempio $(1,0)$ e $(0,1)$.

Pongo $f(1,0) = a$

$f(0,1) = b$

Ma allora

$$f((x,y)) = f(x(1,0) + y(0,1)) = x f((1,0)) + y f((0,1)) = ax + by$$

Quindi $f((x,y)) = ax + by$

Analogamente da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$ saranno del tipo

$$f((x,y,z)) = ax + by + cz \qquad \text{[a, b, c sono numeri dati]}$$

Def. Sia $f : V \to W$ lineare.

- Si dice $\ker(f)$ [o nucleo, kernel] l'insieme
$$\ker(f) = \{ v \in V : f(v) = 0 \}$$
- Si dice $\mathrm{Im}(f)$ [immagine] l'insieme
$$\mathrm{Im}(f) = \{ f(v) : v \in V \}$$

Prop. Si ha che
→ $\ker(f)$ è un s.sp. vett. di V
→ $\mathrm{Im}(f)$ è un s.sp. vett. di W

Esempio Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da
$$f(x,y) = (3x-2y,\ 5x+y)$$
Si verifica facilmente che f è lineare.
Chi è $\ker(f)$?

Devo risolvere
$$\begin{cases} 3x-2y = 0 \\ 5x+y = 0 \end{cases}$$
[I sistemi lineari omogenei sono la ricerca del ker di opportune applic. lineari]

Il sistema lo potevo anche scrivere come
$$x\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

[Studio della lin. indip. di vettori]

Se invece ho il sistema $\begin{cases} 3x-2y = a \\ 5x+y = b \end{cases}$ con a,b dati questo ha soluzione se e solo se $(a,b) \in \mathrm{Im}(f)$

Oss. Se $v_1, \dots, v_n$ sono una $\boxed{\text{base}}$ di V, allora $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono $\boxed{\text{generatori}}$ di $\text{Im}(f)$, cioè ogni $w \in \text{Im}(f)$ è comb. lin. di $f(v_1), \dots, f(v_n)$

È il solito discorso del teo. di struttura, cioè

$$w \underset{\substack{\uparrow \\ w \in \text{Im}(f)}}{=} f(v) \underset{\substack{\uparrow \\ v_i \text{ sono} \\ \text{una base}}}{=} f(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ è lin.}}}{=} c_1 f(v_1) + \dots + c_n f(v_n)$$

Non è detto che $f(v_1), \dots, f(v_n)$ siano lin. indip.

Lo sono quando $\text{Ker}(f) = \{0\}$, cioè quando f è INIETTIVA

$$0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prendo una} \\ \text{comb. lin. nulla} \\ \text{di } f(v_1), \dots, f(v_n)}}{=} c_1 f(v_1) + \dots + c_n f(v_n) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ lin.}}}{=} f(\underbrace{c_1 v_1 + \dots + c_n v_n}_{\in \text{ker}(f)})$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{se } \text{ker}(f) = \{0\}}}{\rightsquigarrow} c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ v_i \text{ sono} \\ \text{una base}}}{\rightsquigarrow} c_1 = \dots = c_n = 0$$

$\boxed{\text{Teorema}}$ (RANK-NULLITY) Sia $f : V \to W$ lineare. Allora

$$\boxed{\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{sp. di partenza}}}{V})}$$

$\boxed{\text{Corollari}}$ → Se $\dim V > \dim W$, allora f NON può essere iniettiva

$$\underbrace{\dim(\ker(f))}_{\substack{= 0 \\ \text{se è iniettiva}}} + \underbrace{\dim(\text{Im}(f))}_{\leq \dim(W)} = \dim(V)$$

→ Se $\dim V < \dim W$, allora f non può essere surgettiva (cioè non può essere $\text{Im}(f) = W$)

Se fosse surgettiva, allora $\dim(\text{Im}(f)) = \dim W$, ma allora

$$\begin{aligned}\dim V &= \dim(\ker) + \dim(\text{Im}) \\ &= \dim(\ker) + \dim W \\ &\geq \dim W\end{aligned}$$

ma noi abbiamo assunto il contrario!

→ Se $\dim V = \dim W$, allora f iniettiva $\iff$ f surgettiva

Supponiamo f iniettiva, cioè $\ker f = \{0\}$, allora

$$\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\dim(\ker)} + \dim(\text{Im}) = \dim(V)$$

$\rightsquigarrow$ $\dim(\text{Im}) = \dim(V) = \dim(W)$

Ora $\text{Im} \subseteq W$ e ha la stessa dim., quindi coincide.

Supponiamo f surgettiva, cioè $\text{Im} f = W$, allora

$$\dim(\ker) + \underset{\overset{\shortparallel}{\cancel{\dim} W}}{\dim(\text{Im})} = \cancel{\dim} V$$

$\rightsquigarrow$ $\dim(\ker) = 0$ $\rightsquigarrow$ $\ker = \{0\}$ $\rightsquigarrow$ f è iniettiva

— o — o —

Esempio $f : \mathbb{R}^{32} \to \mathbb{R}^{26}$. Cosa possiamo dire di $\dim(\ker)$?
Può essere 32? Certo! Basta che $f(v) = 0$ $\forall v \in \mathbb{R}^{32}$
Quanto vale $\dim(\ker)$ come minimo? Vale 6

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 17

Note Title 17/10/2023

	$V \to W$	Applicazione	dim(ker)	dim(Im)	Matrice
①	$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$	$(x-y, 2x+y)$	0	2	
②	$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$	$(x-y, y-x)$			

① $f(x,y) = (x-y, 2x+y)$ $\qquad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Verifico che f è lineare

(i) SOMMA

$$f(\underbrace{(x_1,y_1)}_{v_1} + \underbrace{(x_2,y_2)}_{v_2}) \overset{?}{=} f(\underbrace{(x_1,y_1)}_{v_1}) + f(\underbrace{(x_2,y_2)}_{v_2})$$

$$f((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = f((x_1+x_2, y_1+y_2))$$

uso formula per f ↗ $= (x_1+x_2-y_1-y_2, 2x_1+2x_2+y_1+y_2)$

spezzo come somma ↗ $= (x_1-y_1, 2x_1+y_1) + (x_2-y_2, 2x_2+y_2)$

uso formula per f ↗ $= f((x_1,y_1)) + f((x_2,y_2))$ ☺

(ii) PRODOTTO $\qquad v = (x,y) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda(x,y)) \overset{?}{=} \lambda f((x,y))$$

$$\begin{aligned} f(\lambda(x,y)) &= f((\lambda x, \lambda y)) \\ &= (\lambda x - \lambda y, 2\lambda x + \lambda y) \\ &= \lambda(x-y, 2x+y) \\ &= \lambda f((x,y)) \end{aligned}$$

Trovo ker(f) $\quad \begin{cases} x-y=0 \\ 2x+y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{x}-y=0 \\ \boxed{3y}=0 \end{cases} \rightsquigarrow y=0 \nearrow x=0$

Quindi $\ker(f)=\{(0,0)\}$ cioè il solo vettore nullo

In questo momento so che $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^2$, cioè so che il sistema

$$\begin{cases} x-y=a \\ 2x+y=b \end{cases}$$

ha soluzione (UNICA) per ogni a e b.

Altro modo di vedere le cose $x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

ha come unica sol. $x=y=0$, cioè

$(1,2)$ e $(-1,1)$ sono lin. indip.

Ma essendo in numero giusto sono una base di $\mathbb{R}^2$, quindi ogni $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ si scrive in modo unico come loro comb. lin.

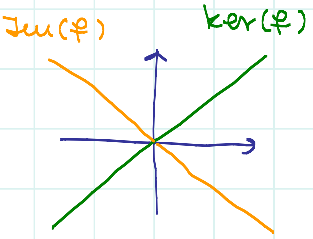
Altro modo di fare le cose: $(1,0)$ e $(0,1)$ sono una base di $\mathbb{R}^2$

Quindi $\underset{(1,2)}{\underset{\shortparallel}{f((1,0))}}$ e $\underset{(-1,1)}{\underset{\shortparallel}{f((0,1))}}$ sono generatori di $\mathrm{Im}(f)$

Quindi $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Span}((1,2),(-1,1)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sono. lin.} \\ \text{indip.}}}{=} \mathbb{R}^2 \leadsto \dim \mathrm{Im} = 2.$

② $f(x,y)=(x-y,\ y-x)$ $\qquad f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$

[Fare verifica linearità]



$\ker(f)$ $\begin{cases} x-y=0 \\ y-x=0 \end{cases} \leadsto x=y$

$\ker(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\}=\mathrm{Span}((1,1)) \leadsto \mathrm{Dim}(\ker)=1$

$\leadsto \dim(\mathrm{Im})=1$

base qualunque

Come sempre $\mathrm{Im}(f)$ è generata da $\underset{(1,-1)}{\underset{\shortparallel}{f(1,0)}}$ e $\underset{(-1,1)}{f(0,1)}$

Quindi $\text{Im}(f) = \text{Span}\,((1,-1), \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lo elimino}}}{(-1,1)}) = \text{Span}\,((1,-1))$

— o — o —

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$	$(x+y-z, z-3x)$	③
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$	$(x+y, x, -y, x)$	④

③ Ker(f) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ -3x+z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \boxed{x}+y-z=0 \\ \boxed{3y}-2\underset{\uparrow}{z}=0 \end{cases}$

$z=3t \quad y=2t \quad x=z-y=t \quad (x,y,z)=t\,(1,2,3)$

$\text{Ker}(f) = \text{Span}\,((1,2,3)) \leadsto \dim(\ker) = 1$

$\leadsto \dim(\text{Im}) = 2$

$\leadsto \text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$

$\leadsto$ f è surgettiva

④ $f(x,y) = (x+y, x, -y, x) \qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$

Ker(f) $\begin{cases} x+y=0 \\ x=0 \\ -y=0 \\ x=0 \end{cases} \leadsto x=y=0 \leadsto \ker(f) = \{(0,0)\}$

$\leadsto$ f è iniettiva

$\leadsto \dim(\text{Im}) = 2$

Chi è Im(f)? È un s.sp. di $\mathbb{R}^4$ di dim 2

$\text{Im}(f) = \text{Span}\,(f(1,0), f(0,1))$

$= \text{Span}\,(\underbrace{(1,1,0,1), (1,0,-1,0)}_{\text{sono lin. indip.}})$

MATRICE ASSOCIATA AD UNA APPLICAZIONE LINEARE

Ingredienti : → $f : V \to W$ lineare

→ $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

→ $\{w_1, \dots, w_m\}$ base di W

Procedimento : calcolo $f(v_1)$ e lo scrivo come comb. lin. di $w_1, \dots, w_m$

$$f(v_1) = \boxed{c_{11}}\, w_1 + \boxed{c_{21}}\, w_2 + \dots + \boxed{c_{m1}}\, w_m$$

⤳ prima colonna di una matrice

Procedo allo stesso modo con $f(v_2)$

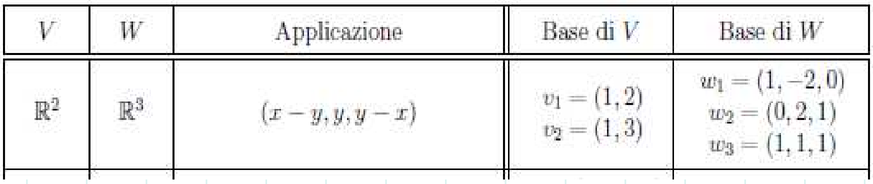
$$f(v_2) = \boxed{c_{1,2}}\, w_1 + \boxed{c_{2,2}}\, w_2 + \dots + \boxed{c_{m,2}}\, w_2$$

⤳ seconda colonna di una matrice

Procedo allo stesso modo fino a $f(v_n)$ e ottengo una matrice con m righe e n colonne.

— o — o —

Esempio



V	W	Applicazione	Base di V	Base di W
$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$(x-y, y, y-x)$	$v_1 = (1,2)$ $v_2 = (1,3)$	$w_1 = (1,-2,0)$ $w_2 = (0,2,1)$ $w_3 = (1,1,1)$

$f(x, y, z) = (x-y,\ y,\ y-x)$ [Verificare che le basi lo siano veramente]

$$f(1,2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{formula}}}{=} (-1, 2, 1) = \textcircled{a}\,(1,-2,0) + \textcircled{b}\,(0,2,1) + \textcircled{c}\,(1,1,1)$$

$$\begin{cases} a + c = -1 \\ -2a + 2b + c = 2 \\ b + c = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a + c = -1 \\ 2b + 3c = 0 \\ b + c = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a + c = -1 \\ 2b + 3c = 0 \\ -c = 2 \end{cases}$$

$c = -2 \quad b = 3 \quad a = 1$

$$f(1,3) = (-2,3,2)$$
$$= a(1,-2,0) + b(0,2,1) + c(1,1,1)$$

$$\boxed{\begin{matrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{matrix}}$$

$$\begin{cases} a + c = -2 \\ -2a + 2b + c = 3 \\ b + c = 2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a + c = -2 \\ 2b + 3c = -1 \\ b + c = 2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a + c = -2 \\ 2b + 3c = -1 \\ -c = 5 \end{cases}$$

$$\boxed{c = -5 \qquad b = 7 \qquad a = 3}$$

La matrice di f in quelle basi è $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

A cosa serve la matrice?

$$f(0,1) = f(v_2 - v_1) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

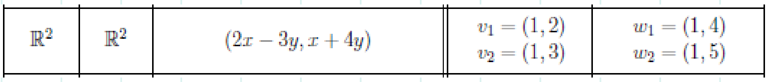
$(-1,1)$ sono le componenti di $(0,1)$ rispetto alla base v_1, v_2

$\rightsquigarrow$ $(2,4,-3)$ sono le componenti di $f(0,1)$ rispetto alla base w_1, w_2, w_3

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 18

Note Title 17/10/2023



$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(2x-3y, x+4y)$	$v_1=(1,2)$ $v_2=(1,3)$	$w_1=(1,4)$ $w_2=(1,5)$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = (2x-3y, x+4y)$

$f(v_1) = f(1,2) = (-4,9) = a(1,4) + b(1,5)$

$\begin{cases} a+b=-4 \\ 4a+5b=9 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=-4 \\ b=25 \end{cases} \quad \begin{matrix} a=-29 \\ b=25 \end{matrix}$

Verifica: $(-4,9) = -29(1,4) + 25(1,5)$ ☺

$$\begin{pmatrix} -29 & -48 \\ 25 & 41 \end{pmatrix}$$

↑ ↑
Matrice richiesta

$f(v_2) = f(1,3) = (-7,13) = a(1,4) + b(1,5)$

$\begin{cases} a+b=-7 \\ 4a+5b=13 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=-7 \\ b=41 \end{cases} \quad \begin{matrix} a=-48 \\ b=41 \end{matrix}$

Verifica: $(-7,13) = -48(1,4) + 41(1,5)$ ☺

Significato della matrice: mettiamo che voglio calcolare

$f(3,2)$

Allora posso procedere in questo modo:

→ scrivo $(3,2)$ come comb. lin. di v_1 e v_2, cioè

$(3,2) = a(1,2) + b(1,3)$

$\begin{cases} a+b=3 \\ 2a+3b=2 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=3 \\ b=-4 \end{cases} \quad \begin{matrix} a=7 \\ b=-4 \end{matrix}$

Verifica: $(3,2) = 7(1,2) - 4(1,3)$ ☺

→ do in pasto le componenti trovate alla matrice di prima

$$\begin{pmatrix} -29 & -48 \\ 25 & 41 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -203+192 \\ 175-164 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

→ 11 e −11 sono le componenti di $f(3,2)$ rispetto alla base w_1, w_2, cioè

$$f(3,2) = -11\, w_1 + 11\, w_2 = -11\,(1,4) + 11\,(1,5)$$
$$= (0, 11)$$

Verifica $f(3,2)$ usando la formula $= (0, 11)$ ☺

— o — o —

	V	W	Condizioni	E/U	V	W	Condizioni	E/U	
①	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \to (2,3)$ $(1,3) \to (7,8)$	EU	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \to (2,3)$ $(2,4) \to (7,8)$	NON ESISTE	②
③	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \to (2,3)$ $(2,4) \to (4,6)$		$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \to (2,3)$ $(1,3) \to (2,3)$		④
⑤	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \to (2,3)$ $(1,1) \to (-1,-2)$ $(2,3) \to (1,0)$		$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$(1,2) \to (2,3)$ $(1,1) \to (-1,-2)$ $(2,3) \to (1,1)$	EU	⑥

Esiste una applic. lineare con le proprietà richieste?
Se sì, è unica?

① $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\qquad f(1,2) = (2,3)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad f(1,3) = (7,8)$

Uso il teorema di struttura: $(1,2)$, $(1,3)$ sono una base di $\mathbb{R}^2$ (sp. partenza), quindi posso mandarla dove voglio e l'appl. lin. è univ. determinata

Dove va a finire $(5,-2)$?

Scrivo $(5,-2) = a\,(1,2) + b\,(1,3)$

$$\begin{cases} a+b = 5 \\ 2a+3b = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b = 5 \\ b = -12 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a = 17 \\ b = -12 \end{matrix}$$

A quel punto

$$f(5,-2) = f(17\,(1,2) - 12\,(1,3))$$
$$= 17\, f(1,2) - 12\, f(1,3)$$
$$= 17\,(2,3) - 12\,(7,8)$$
$$= (-50, -43)$$

se i conti sono giusti

② $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\qquad f(1,2) = (2,3)$

$\qquad f(2,4) = (7,8)$

Se $f(1,2) = (2,3)$, allora $f(2,4)$ deve fare $(4,6)$

Quindi NON ESISTE

③ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\qquad f(1,2) = (2,3)$

$\qquad f(2,4) = (4,6)$

La seconda condizione è conseguenza della prima.

In questo caso f esiste ma NON è unica.

Infatti posso mandare $\qquad f(1,2) = (2,3)$

$\qquad f(1,0) = (a,b)$ ← libero

Serve qui che $(1,2)$ e $(1,0)$ sono una base di $\mathbb{R}^2$

④ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad f(1,2) \to (2,3)$

$\qquad f(1,3) \to (2,3)$

Esiste ed è unica, perché è fissata in una base

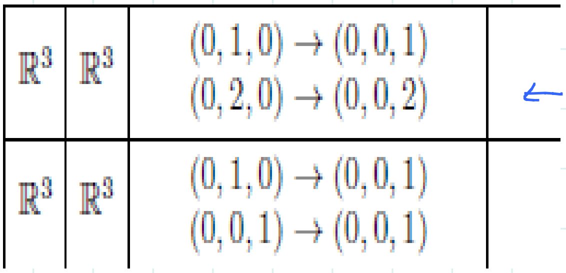
⑤ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\qquad f(1,1) = (2,3)$

$\qquad f(1,2) = (-1,-2)$

$\qquad f(2,3) = (1,0)$

Osserviamo che $v_3 = v_1 + v_2$, ma $f(v_3) \neq f(v_1) + f(v_2)$

quindi non esiste.



⑦	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(0,1,0) \to (0,0,1)$ $(0,2,0) \to (0,0,2)$	
⑧	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$(0,1,0) \to (0,0,1)$ $(0,0,1) \to (0,0,1)$	

← conseguenza della prima

⑦ Esiste ma non è unica e abbiamo liberi

$f(0,1,0) = (0,0,1)$

$f(1,0,0) = (a,b,c)$ 6 parametri liberi

$f(0,0,1) = (\hat{a},\hat{b},\hat{c})$

⑧ Esiste non è unica e dipende da 3 parametri

$f(0,1,0) = (0,0,1)$

$f(0,0,1) = (0,0,1)$

$f(1,2,3) = (a,b,c)$

Ci saranno funzioni surgettive fra tutte quelle con la proprietà ?

Essendo tra spazi della stessa dim., f è surgettiva $\Leftrightarrow$ f è iniettiva, e questa palesemente non lo è.

Ad esempio $(0,1,-1) \in \ker f$

$$\begin{gathered}(0,1,-1)\\ \parallel \\ (0,1,0)-(0,0,1)\end{gathered}$$

— o — o —

$$f : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$$

$$p(x) \longrightarrow p(2x) + p(-x)$$

Verificare che è lineare.

Scrivere la matrice usando in partenza ed arrivo la base

$1, x, x^2$

$$\begin{aligned} 1 &\longrightarrow 2 &&= 2\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \\ x &\longrightarrow x &&= 0\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \\ x^2 &\longrightarrow 5x^2 &&= 0\cdot 1 + 0\cdot x + 5\cdot x^2 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Dove va a finire $p(x) = 2x^2 - 3x + 1$?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} \longrightarrow 10x^2-3x+2$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 19

Note Title 20/10/2023

→ MATRICE INVERSA

→ MATRICI DI CAMBIO BASE

$\boxed{\text{Matrice inversa}}$ Data A matrice quadrata $n \times n$, cerco una matrice A^{-1}, sempre $n \times n$, tale che

$$AA^{-1} = A^{-1}A = Id = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

- Esiste? È unica?
- Se esiste, come la trovo?

$\boxed{\text{Risposta se } n = 2}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

→ se $ad - bc = 0$, allora A^{-1} non esiste

→ se $ad - bc \neq 0$, allora A^{-1} esiste ed è data dalla formula

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

[I 2 sulla diag. princ. si scambiano gli altri 2 cambiano segno, poi divido per $ad-bc$]

<u>Esempio</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $ad - bc = 1 \rightsquigarrow$ è invertibile

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ☺

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Verifica nel caso generale = fare il prodotto]

Caso generale: uso GAUSS-JORDAN

Esempio

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_1 - R_2 \\ R_3 - 2R_1 \end{array}$$

↑ Matrice di cui voglio fare l'inversa

↑ Identità

Lavoro alla Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ R_3 + R_2 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - R_3 \\ R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 3R_1 - 2R_2 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \frac{1}{3}R_1 \\ \frac{1}{3}R_2 \\ -R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

↑ Dovrebbe essere A^{-1}

Verifica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ☺

Procedura:
- → Scrivo $(A \mid Id)$
- → Lavoro alla Gauss fino ad ottenere $(Id \mid B)$
- → Allora $B = A^{-1}$
- → Se questo non è possibile perché viene una riga di zeri dalla parte di A, allora l'inversa non esiste.

Perché funziona?

① Ogni operazione alla Gauss su A è equivalente a moltiplicare A a sx per una matrice G

$$\begin{matrix} \text{ricopia } R_1 \to \\ R_2 - 2R_3 \to \\ \end{matrix} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b&c\\d-2g&\dots& \\ & & \end{pmatrix}$$

② Fare 25 operazioni alla Gauss è come moltiplicare a sx per una G unica

$$\underbrace{G_{25}\cdots G_3G_2G_1}_{G}A = GA$$

③ Moltiplicare G per $(A|I)$ viene $(\underset{\uparrow}{GA}|G)$

se qui ho Id, allora $G = A^{-1}$

—o—o—

$\boxed{\text{Matrice cambio base}}$

Setting: → V sp. vett. di dim finita

→ $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

→ $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$ altra base di V

Domanda: se conosco le comp. di un certo v rispetto alla prima base, come calcolo le comp. dello stesso v rispetto all'altra base?

Risposta: uso matrice di cambio base costruita con la seguente procedura.

→ Prendo v_1, e lo scrivo usando la 2ª base

$$v_1 = \boxed{c_{11}}\,\hat{v}_1 + \boxed{c_{1,2}}\,\hat{v}_2 + \dots + \boxed{c_{1,n}}\,\hat{v}_n$$

⇝ uso i numeri come prima colonna della matrice

→ Prendo v_2 e faccio la stessa cosa

$$v_2 = \boxed{c_{2,1}}\,\hat{v}_1 + \boxed{c_{2,2}}\,\hat{v}_2 + \dots + \boxed{c_{2,n}}\,\hat{v}_n$$

⇝ 2^a colonna della matrice

→ e così via fino a v_n.

Perché funziona? Se io do in INPUT $(1,0,\dots,0)$

Queste rappresentano v_1 rispetto alla prima base

Ora $M\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$ = prima colonna di M

= componenti di v_1 risp. alla 2^a base

— o — o —

Esempio $V = \mathbb{R}^2$ $v_1 = (1,0)$ $\hat{v}_1 = (2,3)$

$v_2 = (0,1)$ $\hat{v}_2 = (1,2)$

↑ 1^a base ↑ 2^a base

$v_1 = (1,0) = a(2,3) + b(1,2)$ $2(2,3)-3(1,2)$

$$\begin{cases} 2a+b=1 \\ 3a+2b=0 \end{cases} \qquad 2a+b=1 \qquad b=-3 \quad a=2$$

$$M=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$v_2 = (0,1) = a(2,3)+b(1,2) = -(2,3)+2(1,2)$

$a=-1$ $b=2$

La matrice M di cambio di base è $M=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Prendiamo $5v_1+2v_2 = (5,2)$. Chi sono le sue componenti rispetto alla seconda base?

1^o modo Risolvo di nuovo $(5,2) = a(2,3)+b(1,2)$

2^o modo Uso matrice! $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \end{pmatrix}$ ← componenti

Verifica: $8\hat{v}_1 - 11\hat{v}_2 = 8(2,3) - 11(1,2) = (5,2)$ ☺

Chi era la matrice che prende in input le comp. rispetto a $(\hat{v}_1, \hat{v}_2)$ e restituisce quelle rispetto a (v_1, v_2) ?

Devo fare la procedura inversa, cioè scrivere

$$\hat{v}_1 = a v_1 + b v_2$$

$$(2,3) = a(1,0) + b(0,1) \qquad a=2 \quad b=3 \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Basta fare ora l'inversa

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 20

Note Title 20/10/2023

Esempi di cambi di base

Spazio	$\mathcal{B}$	$\widehat{\mathcal{B}}$	① $\mathcal{C}\to\mathcal{B}$	② $\mathcal{C}\to\widehat{\mathcal{B}}$	③ $\widehat{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}$
$\mathbb{R}^2$	$v_1=(2,3)$ $v_2=(1,5)$	$w_1=(-3,4)$ $w_2=(1,-3)$			

1° Metodo: bovino Prendo i vettori della base vecchia e li scrivo rispetto alla base nuova. Uso come colonne i coeff. che ottengo

①
$$\begin{aligned}(1,0) &= a\,(2,3)+b\,(1,5)\\ (0,1) &= c\,(2,3)+d\,(1,5)\end{aligned} \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}$$

③
$$\begin{aligned}(-3,4) &= A\,(2,3)+B\,(1,5)\\ (1,-3) &= C\,(2,3)+D\,(1,5)\end{aligned} \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} A & C\\ B & D\end{pmatrix}$$

2° metodo più astuto Calcolo la matrice $\mathcal{B} \longrightarrow$ Canonica

Questo è banale da calcolare!

$$\begin{aligned}(2,3) &= a\,(1,0)+b\,(0,1)\\ (1,5) &= c\,(1,0)+b\,(0,1)\end{aligned} \quad \rightsquigarrow \left(\boxed{\begin{matrix}2\\3\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}1\\5\end{matrix}}\right)$$

↑ ho messo a colonna i vettori della base $\mathcal{B}$

Chi sarà mai la matrice Canonica $\rightsquigarrow \mathcal{B}$? L'inversa

$$\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \text{ risposta a } 1$$

INPUT: componenti risp. alla canonica

OUTPUT: componenti risp. alla base $\mathcal{B}$

Prova: prendo $(3,-6)$ ⇝ rispetto alla canonica ha componenti $\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$. Rispetto alla B ha componenti

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix}5&-1\\-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}21\\-21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$$

Verifica: $3\,(2,3)-3\,(1,5)=(3,-6)$ ☺

② Con metodo astuto

Spazio	$\mathcal{B}$	$\widehat{\mathcal{B}}$	$\mathcal{C}\to\mathcal{B}$	② $\mathcal{C}\to\widehat{\mathcal{B}}$	③ $\widehat{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}$
$\mathbb{R}^2$	$v_1=(2,3)$ $v_2=(1,5)$	$w_1=(-3,4)$ $w_2=(1,-3)$			

$\hat{B}\to$ Canonica $\quad\left(\boxed{\begin{matrix}-3\\4\end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix}1\\-3\end{matrix}}\right)$

Canonica $\to\hat{B}\quad\begin{pmatrix}-3&1\\4&-3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3&-1\\-4&-3\end{pmatrix}$

③ Con metodo astuto $\quad\hat{B}\to$ Canonica $\to B$

$$\begin{pmatrix}-3&1\\4&-3\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}2&1\\3&5\end{pmatrix}^{-1}$$

In che ordine le devo moltiplicare? In ordine inverso risp. a quanto scritto sopra, cioè

$$\begin{pmatrix}2&1\\3&5\end{pmatrix}^{-1}\underbrace{\begin{pmatrix}-3&1\\4&-3\end{pmatrix}}$$

è la prima che va ad operare sul vettore che viene messo a destra

Facendo così deve venire fuori la matrice $\begin{pmatrix}A&C\\B&D\end{pmatrix}$ del metodo bovino iniziale!

— o — o —

$\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$	$v_1 = x^2$ $v_2 = x^2 + x$ $v_3 = x^2 + x + 1$	$w_1 = x^2 + x$ $w_2 = x^2 + x + 1$ $w_3 = x$			

$\mathcal{B}$ $\hat{\mathcal{B}}$ $\hat{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}$

Se voglio $\hat{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}$ faccio $\hat{\mathcal{B}} \to \underset{\{1, x, x^2\}}{\overset{}{\text{Canonica}}} \to \mathcal{B}$

$\hat{\mathcal{B}} \to$ Canonica $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M_1$

$\mathcal{B} \to$ Canonica $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = M_2$

$\hat{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}$ $\quad M_2^{-1} M_1$

↑
calcolo con Gauss

—o—o—

V	W	Applicazione	Base di V	Base di W
$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$(x - y, y, y - x)$	$v_1 = (1, 2)$ $v_2 = (1, 3)$	$w_1 = (1, -2, 0)$ $w_2 = (0, 2, 1)$ $w_3 = (1, 1, 1)$

$\mathcal{B}_V$ $\mathcal{B}_W$

Esercizio: trovare la matrice che rappresenta l'applicazione lineare tra le basi indicate

$f(x, y) = (x - y, y, y - x)$

Matrice di f tra le basi indicate ↓

Bovino $\quad f(1,2) = (-1, 2, 1) = a w_1 + b w_2 + c w_3$

$f(1,3) = (-2, 3, 2) = d w_1 + e w_2 + f w_3$

$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} d \\ e \\ f \end{matrix}} \end{pmatrix} = A$

A prende : → INPUT un vettore colonna lungo 2 che rappresenta le comp. di (x,y) risp. alla base v_1, v_2

→ OUTPUT : un vettore colonna lungo 3 che le comp. di $f(x,y)$ risp. alla base w_1, w_2, w_3.

$\boxed{\text{Non bovino}}$ So fare bene la matrice di f usando in partenza ed arrivo le basi canoniche

$$f(x,y) = (x-y,\ y,\ y-x)$$

$$f(1,0) = (1, 0, -1)$$

$$f(0,1) = (-1, 1, 1)$$

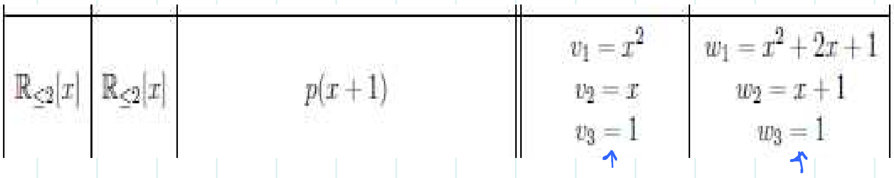
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Io voglio fare $\mathcal{B}_V \xrightarrow[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}]{} C_V \xrightarrow[B]{} C_W \xrightarrow[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}]{} \mathcal{B}_W$

Quindi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\quad} \circ \underline{\quad} \circ \underline{\quad}$$



$\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$	$\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$	$p(x+1)$	$v_1 = x^2$ $v_2 = x$ $v_3 = 1$	$w_1 = x^2 + 2x + 1$ $w_2 = x + 1$ $w_3 = 1$

↑ $\mathcal{B}_V$ ↑ $\mathcal{B}_W$

L'applicazione f prende in INPUT un polinomio $p(x)$ e restituisce in OUTPUT il polinomio $p(x+1)$

$$p(x) = a + bx + cx^2 \qquad p(x+1) = a + b(x+1) + c(x+1)^2$$
$$= (a+b+c) + (b+2c)x + cx^2$$

Quindi è come se fosse $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(a,b,c) = (a+b+c,\ b+2c,\ c)$$

Considerando la base canonica $\{1, x, x^2\}$ la matrice di f sarebbe

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se voglio la matrice di f tra le basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$ posso fare il bovino

$$f(v_1) = f(x^2) \longrightarrow (x+1)^2 = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0\, w_3$$

$$f(v_2) = f(x) \longrightarrow x+1 = 0 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3$$

$$f(v_3) = f(1) \longrightarrow 1 = 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 1 \cdot w_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 21

Note Title 24/10/2023

DETERMINANTE

Due modi di vederlo

① INPUT: matrice $n \times n$ (quadrata) OUTPUT: numero

Il numero è $\neq 0$ se e solo se la matrice è invertibile

② INPUT: n vettori di $\mathbb{R}^n$ OUTPUT: numero

Il numero è $\neq 0$ se e solo se gli n vettori sono lin. indip.

(e quindi, essendo in numero giusto, sono una base)

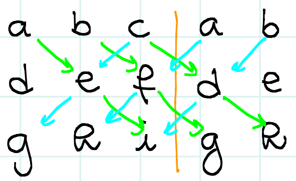
Collegamento fra ① e ②: prendo gli n vettori e li uso come righe della matrice.

Come lo calcolo?

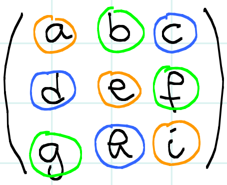
$\boxed{n=2}$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \boxed{\det(A) = ad - bc}$$

$\boxed{n=3}$ Formula di SARRUS



$$\text{Det} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$



$$\boxed{\begin{aligned} \text{Det} = {} & aei + bfg + cdh \\ & - ceg - bdi - afh \end{aligned}}$$

ACHTUNG! Le formule alla SARRUS valgono solo con $n=2$ e $n=3$. POI NO!!

Esempio Stabilire se

$$v_1 = (1,0,2) \qquad v_2 = (1,3,1) \qquad v_3 = (2,0,-1)$$

sono una base di $\mathbb{R}^3$.

Superbovino Verifico che sono lin. indip. + generatori

Bovino e basta Essendo in numero giusto, verifico solo la lin. indip.

$$a(1,0,2) + b(1,3,1) + c(2,0,-1) = (0,0,0)$$

Risolvo il sistema e spero che la soluz. unica sia $a=b=c=0$.

Moderno

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{Det} = -3+0+0-12-0-0 = -15 \neq 0$$

$\rightsquigarrow$ sono base ☺

Esempio 2 Stabilire se

$$x+5 \qquad x^2-1 \qquad x^2+x+3$$

sono una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

Moderno

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} x+5 \\ x^2-1 \\ x^2+x+3 \end{matrix}$$

$$\text{Det} = 5\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 3 + 0\cdot(-1)\cdot 1 - 0\cdot 0\cdot 3 - 1(-1)\cdot 1 - 5\cdot 1\cdot 1$$
$$= 0+3+0-0+1-5 = -1 \neq 0$$

Quindi sono lin. indip., e dunque una base

— o — o —

$\boxed{\text{Caso } n \geq 4}$ Ci sono due metodi per calcolare il Det

① Algoritmo di GAUSS
② Sviluppi di LAPLACE
③ Sviluppi di LEIBNIZ (scomodo in pratica)

$\boxed{\text{Det via GAUSS}}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Facciamo solo due tipi di operazioni

- scambi di riga
- operazioni ultra-ortodosse $\quad R_i \rightsquigarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coeff. } 1}}{\,} R_i + bR_j$

fino ad arrivare alla forma a scala

$$\begin{matrix} \circlearrowright \end{matrix}\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & -4 & -3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + 3R_2 \\ R_4 + 4R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 - \frac{3}{5}R_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc} \enclose{circle}{1} & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \enclose{circle}{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \enclose{circle}{-5} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \enclose{circle}{\frac{38}{5}} \end{array}\right)$$

Arrivati nella forma a scala, moltiplico i tizi sulla diagonale

$$1 \cdot 1 \cdot (-5) \cdot \frac{38}{5} = -38$$

$$\text{Det} = -38 \cdot (-1)^{\text{numero scambi riga}} = 38$$

Det via LAPLACE

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{2} \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

→ Scelgo una riga o una colonna che mi stanno simpatiche in questo caso la prima riga

$$\text{Det} = \boxed{0} \cdot \text{Det}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \boxed{1}\ \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$- \boxed{2} \cdot \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolo i 3×3 con SARRUS

$$-1(3-1-18) - 2(2-12-3+2) = -1 \cdot (-16) - 2 \cdot (-11)$$
$$= 16 + 22 = 38$$ ☺

Formula ricorsiva: so calcolare i Det $n \times n$ riducendomi a Det $(n-1) \times (n-1)$.

Il pattern dei segni è quello a scacchiera

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

Cosa carina: viene lo stesso risultato indipendentemente dalla riga o colonna prescelta

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo rispetto alla terza colonna

$$\text{Det} = 0 \cdot \ldots -3 \,\text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$+ 1 \cdot \text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} - 0 \cdot \ldots$$

$$= -3(-8-2-6) + 1(1-4-4-3)$$

$$= -3(-16) - 10 = 48 - 10 = 38$$ ☺

Sviluppi di Leibniz

$$\begin{pmatrix} a & \enclose{circle}{b} & c \\ \enclose{circle}{d} & e & f \\ g & h & \enclose{circle}{i} \end{pmatrix}$$

Tutti gli addendi che compaiono nella formula sono prodotto di n termini presi da righe e colonne diverse

Nello sviluppo ci sarà un bdi.

Con che segno ?

Scriviamo le colonne di prelievo

$$\underset{\curvearrowleft\!\curvearrowright}{C_2 - C_1} - C_3 \qquad C_1 - C_2 - C_3$$

Uno scambio ⇝ segno −

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 22

Note Title 24/10/2023

SOTTOMATRICI Si ottengono da una matrice eliminando un po' di righe e colonne

MINORI (di una matrice)
Sono i determinanti delle sottomatrici quadrate

Esempio
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

→ Questa matrice ha 4 minori 3×3 (posso eliminare una qualunque delle 4 colonne.

→ La matrice ha 12 minori 1×1 (singoli elementi)

→ La matrice ha 18 minori 2×2 : infatti
- devo eliminare una riga (e ce ne sono 3)
- devo eliminare 2 colonne (e le posso scegliere in 6 modi)

— o — o —

RANGO

INPUT : matrice qualunque (anche rettangolare)

OUTPUT: numero intero

Quel numero rappresenta 3 cose che coincidono :

→ R-rango : max numero righe lin. indip. (dim. span righe)

→ C-rango : " " colonne " " (dim. span colonne)

→ D-rango : max dimensione di un minore $\neq 0$.
(max r per cui esiste una sottomatrice $r \times r$ con Det $\neq 0$)

Oss. Volendo usare i Determinanti, se voglio dimostrare che una matrice ha rango r devo

→ Trovare $\boxed{\text{una}}$ sottomatrice $r \times r$ con Det $\neq 0$

→ Verificare che $\boxed{\text{TUTTE}}$ le sottomatrici $(r+1) \times (r+1)$ hanno Det $= 0$.

Esempio Calcolare rango di
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango non può essere 4 o più (perché le righe sono al max 3)

Fatto generale Se A è matrice $m \times n$, allora di sicuro
$$\text{rango}(A) \leq \min\{m, n\}$$

Se punto a rango $= 3$, basta trovare una sottomatrice 3×3 con Det $\neq 0$

Sarrus su quella indicata: $-8-1-8 = -17 \neq 0 \rightsquigarrow$ Rango $= 3$.

Da questo so che
$$\text{Span}\{(1,2,0,-1), (3,4,1,2), (5,-1,2,0)\}$$
è un s.sp. di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 3. [Questo grazie a R-rango]

Allo stesso modo so che
$$\text{Span}\{(1,3,5), (2,4,-1), (0,1,2), (-1,2,0)\} = \mathbb{R}^3$$
(è un s.sp. di $\mathbb{R}^3$ di dim. 3, quindi coincide con tutto $\mathbb{R}^3$)

— o — o —

Esempio Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$v_1 = (1,0,2) \qquad v_2 = (2,1,3) \qquad v_3 = (-1,-2,0)$$

Calcolare la dim. dello Span

Antico $a v_1 + b v_2 + c v_3 = 0$ e vedo che succede.

Moderno $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ (a righe o colonne non cambia)

Det $= -8+2+6 = 0$! Non sono lin. indip.

$\rightsquigarrow$ rango ≤ 2

Inoltre esiste un minore 2×2 t.c. Det $\neq 0$ $\rightsquigarrow$ Rango $= 2$

$\rightsquigarrow$ Span ha dimensione 2, quindi è un piano di $\mathbb{R}^3$

$$\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \text{Span}(\underset{\uparrow}{v_1}, v_2) \rightsquigarrow \text{Dim} = 2.$$

lin. indip. per 2 motivi

→ non sono multipli

→ grazie al minore 2×2 $\neq 0$ nella matrice che li ha come righe

Esempio


$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$

$v_1 = x^3 - x^2$
$v_2 = x^2 - x$
$v_3 = x - x^3$

[Si vede che $v_1+v_2+v_3=0$]

Calcolare $\underbrace{\text{dim Span}}_{2}$.

$$\begin{array}{cccc} x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

C'è un 2×2 con Det $\neq 0$

$\rightsquigarrow$ Rango $= 2, 3$

Se voglio Rango $= 3$, devo trovare una sottomatrice 3×3 con Det$\neq 0$ e l'unica possibilità è eliminare C_4 (altrimenti è 0 per forza)

Sarrus: $1-1 = 0 \rightsquigarrow$ Rango $= 2$

Rassegna delle proprietà del Determinante

① $\mathrm{Det}\,(Id) = 1$ (volendo segue da Laplace)

② $\mathrm{Det}\,(A \cdot B) = \mathrm{Det}\,(A) \cdot \mathrm{Det}\,(B)$ (vero ma non ovvio: teorema di BINET)

[occhio: $\mathrm{Det}\,(A+B)$ NON è $\mathrm{Det}\,(A) + \mathrm{Det}\,(B)$]

③ $\mathrm{Det}\,(A^{-1}) = \dfrac{1}{\mathrm{Det}\,(A)}$

[Segue dalle prime 2 proprietà:

$$1 \underset{\substack{\uparrow \\ \textcircled{1}}}{=} \mathrm{Det}\,(Id) \underset{\substack{\uparrow \\ A\cdot A^{-1} = Id}}{=} \mathrm{Det}\,(A \cdot A^{-1}) \underset{\substack{\uparrow \\ \textcircled{2}}}{=} \mathrm{Det}\,(A) \cdot \mathrm{Det}\,(A^{-1})$$

⇝ ricavo $\mathrm{Det}\,(A^{-1})$]

④ $\mathrm{Det}\,(A^t) = \mathrm{Det}\,(A)$

[Laplace fatto sulla prima riga di A =
Laplace " " " colonna di A^t]

⑤ $\mathrm{Det}\,(\lambda A) = \lambda^n \cdot \mathrm{Det}\,(A)$

[Volendo segue per induzione da Laplace]

⑥ Se A è una matrice diagonale (sono tutti 0 al di fuori della diagonale principale), allora

$$\mathrm{Det}\,(A) = \text{prod. elementi sulla diagonale}$$

[Volendo segue da Laplace o anche da Gauss]

$\boxed{\text{6-bis}}$ Come nel ⑥, anche se A è triangolare inferiore o superiore

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

← triangolare superiore: sola roba sulla diagonale o sopra

Det = 10

[Stessa dim. del caso precedente]

⑦ Se scambio due righe (o due colonne) tra di loro, allora Det cambia segno

[Volendo segue da Gauss]

⑧ Se moltiplico per λ una sola riga o colonna, allora Det si moltiplica per λ

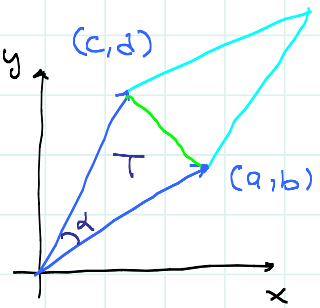
[Segue da Laplace rispetto a quella riga/colonna].

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 23

Note Title 24/10/2023

Interpretazione geometrica del Det



Caso 2×2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$|\text{Det}|$ = Area parallelogrammo generato dai 2 vettori

Dim. Chiamiamo T il mezzo parallelogrammo

Poniamo $v = (a,b)$ $w = (c,d)$

$$\text{Area parallelogrammo} = 2\,\text{Area}(T)$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \|v\| \cdot \|w\| \sin\alpha$$
$$= \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$
$$= \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sqrt{1 - \frac{\langle w, v\rangle^2}{\|w\| \cdot \|v\|^2}}$$
$$= \sqrt{\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle \quad , v\rangle^2}$$
$$= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2}$$
$$= \sqrt{\cancel{a^2c^2} + a^2d^2 + b^2c^2 + \cancel{b^2d^2} - \cancel{a^2c^2} - \cancel{b^2d^2} - 2abcd}$$
$$= \sqrt{a^2d^2+b^2c^2-2abcd} = |ad-bc|$$

Oss. Geometricamente è evidente che Det = 0 ⇔ vettori v e w sono uno multiplo dell'altro.

$\boxed{\text{Caso } 3\times 3}$ $|\text{Det}| = \frac{1}{6}$ Volume (Tetraedro che ha come vertici l'origine e i vettori delle 3 righe della matrice)

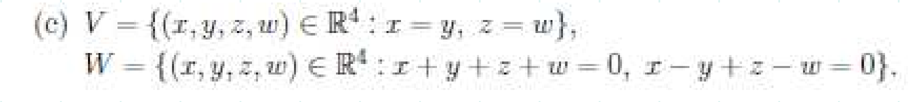
[Conto che volendo si potrebbe fare partendo da

$$\text{Vol} = \frac{1}{3}\,\underbrace{\text{Area Base}}_{\substack{\text{triangolo}\\ \text{nello spazio}}} \cdot \underbrace{\text{Altezza}}_{\substack{\text{distanza del vertice}\\ \text{dal piano base}}}$$

]

— o — o —

Esercizio 1



(c) $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = y,\ z = w\}$,
$W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0,\ x - y + z - w = 0\}$.

Domande: dimensione e base di V, W, $V+W$, $V \cap W$

V è l'insieme dei vettori che soddisfano entrambe le condizioni cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \boxed{x} - \underset{\uparrow}{y} = 0 \\ \boxed{z} - \underset{\uparrow}{w} = 0 \end{cases}$$

$w = t,\ z = t,\ y = s,\ x = +s$

Soluzioni:

$$(s,s,t,t) = s\,\underbrace{(1,1,0,0)}_{v_1} + t\,\underbrace{(0,0,1,1)}_{v_2}$$

UNA base di V è $\{v_1, v_2\}$

Ci sono tante altre basi di V, ad esempio

$$\{(2,2,3,3),\ (5,5,7,7)\}$$

(basta osservare che stanno in V, sono 2, e sono lin. indip. in quanto non multipli)

Passiamo a W:

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x - y + z - w = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{x} + y + z + w = 0 \\ + \boxed{2y} \underset{\uparrow}{} + 2\underset{\uparrow}{w} = 0 \end{cases}$$

$w = t,\ z = s,\ y = -t,\ x = -s \leadsto (-s,-t,s,t)$

$$= s\,\underbrace{(-1,0,1,0)}_{w_1} + t\,\underbrace{(0,-1,0,1)}_{w_2}$$

Una base di W è $\{w_1, w_2\}$

Ora osservo che $V + W = \text{Span}\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$

Li metto in una matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Det} \underset{\uparrow}{=} \text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Laplace
riga 1

potrei farli con Sarrus, ma li faccio con Laplace

$$= -1(-1) - 1 \cdot 1 = 1 - 1 = 0$$

Quindi v_1, v_2, w_1, w_2 non sono lin. indip. e il rango della matrice NON è 4.

Quindi il rango della matrice è 3 perché ho trovato ben due sottomatrici 3x3 con $\text{Det} \neq 0$.

Concludo che

$$\dim(V+W) = 3$$

Volendo so anche che

$$V + W = \text{Span}(v_2, w_1, w_2)$$

Infatti so che v_2, w_1, w_2 sono lin. indip. perché la matrice che li ha come righe ha rango 3, avendo minori di ordine 3 diversi da 0.

GRASSMANN $\rightsquigarrow \dim(V \cap W) = 1$, cioè $V \cap W$ sono una retta in $\mathbb{R}^4$, cioè tutti i multipli di un vettore dato.

Come trovo una base di $V \cap W$?

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Risolvo il sistema con 4 eq.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z - w = 0 \\ x + y + z + w = 0 \\ x - y + z - w = 0 \end{cases}$$

⇝ ci sarà un param. libero

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Risolvo

$$\underbrace{a v_1 + b v_2}_{\text{generico el. di } V} = \underbrace{c w_1 + d w_2}_{\text{generico el. di } W}$$

$\boxed{3° \text{ modo}}$ Spero di vederlo a occhio ...

$\boxed{(1,1,-1,-1)}$ UNA BASE di $V \cap W$

— o —

BACK TO FORMULA MISTERIOSA

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (\underset{\substack{\shortparallel \\ M_1}}{b_1c_2 - c_1b_2}, \underset{\substack{\shortparallel \\ M_2}}{-a_1c_2 + c_1a_2}, \underset{\substack{\shortparallel \\ M_3}}{a_1b_2 - b_1a_2})$$

Proprietà di (M_1, M_2, M_3)? È $\perp$ a (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2)

Consideriamo
$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

Det = 0 perché ci sono 2 righe lin. indip.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Laplace} \\ \text{riga 1}}}{=} a_1 \cdot M_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{il segno} - \\ \text{è già in } M_2}}{+} b_1 \cdot M_2 + c_1 \cdot M_3$$

Stessa cosa se metto a_2, b_2, c_2 ai posto di $*$.

Lo stesso trucco funziona con 3 vettori in $\mathbb{R}^4$, o 4 in $\mathbb{R}^5$, ...

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 24

Note Title 27/10/2023

Back to sistemi lineari

Consideriamo un sistema lineare di m equazioni in n-incognite.

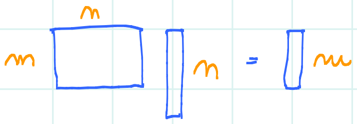
Possiamo scriverlo come

$$A x = b$$

matrice $m \times n$

colonna lunga n di incognite

colonna lunga m di termini noti



Dette $c_1, \dots, c_n$ le colonne di A, possiamo scrivere il sistema come

$$\boxed{x_1 c_1 + x_2 c_2 + \dots + x_n c_n = b}$$

Consideriamo anche l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definita da $x \longrightarrow Ax$

Con queste notazioni si ha che

$$\boxed{\text{Il sistema ammette soluzione} \iff b \in \operatorname{Im}(A) \iff b \in \operatorname{Span}(c_1, \dots, c_n)}$$

$\Updownarrow$

b è comb. lin. di $c_1, \dots, c_n$

Struttura generale delle soluzioni di un sistema $Ax = b$

Se il sistema ha soluzione, allora tutte le soluzioni si scrivono come

$$\boxed{x = \hat{x} + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k}$$

soluzione qualunque $A\hat{x} = b$

$v_1, \dots, v_k$ sono una base dell'insieme delle soluzioni di $Ax = 0$

La dim. segue da due fatti:

① Se x_1 e x_2 sono due soluzioni, cioè $Ax_1=b$ e $Ax_2=b$, allora $A(x_1-x_2) = Ax_1 - Ax_2 = b-b=0$

② Se x_1 risolve $Ax_1=b$ e y_1 risolve $Ax=0$, allora $A(x_1+y_1) = b+0=b$

Osserviamo che le soluzioni di $Ax=0$ sono il ker(A), quindi i $v_1, \dots, v_k$ della formula di sopra sono una base di ker(A)

Quindi il sistema ha soluzione unica quando

- ker(A) = 0
- $C_1, \dots, C_n$ sono lin. indip.

— o — o —

TEOREMA DI ROUCHÉ – CAPELLI

Consideriamo un sistema $Ax=b$.

Costruiamo la matrice $\hat{A} = (A|b)$ (cioè aggiungiamo b come (n+1)-esima colonna.

Allora

① il sistema ammette soluzione $\Leftrightarrow$ rango (A) = rango ($\hat{A}$)

② Se il sistema ha soluzione, allora la soluzione generale dipende da $k = \underset{\#\text{ incognite}}{\underset{\uparrow}{n}} - \underset{\text{rango comune di } A \text{ e } \hat{A}}{\underset{\uparrow}{r}}$

Idea Cosa possiamo dire di Rango (A) e Rango ($\hat{A}$). Ci sono solo 2 possibilità

- Rango ($\hat{A}$) = Rango (A). Questo avviene se e solo se b è comb. lin. delle colonne $C_1, \dots, C_n$. Ma questo avviene $\Leftrightarrow$ il sistema ha soluzione.
- Rango ($\hat{A}$) = Rango (A)+1. Questo avviene $\Leftrightarrow$ b NON è comb. lin. di $C_1, \dots, C_n$.

(stiamo usando rango = max # col. lin. indip.)

Se ci sono soluzioni, il numero di parametri liberi è $k = \dim \ker A$

Ma per R-N:

$$\underset{\overset{\shortparallel}{k}}{\dim(\ker(A))} + \underset{\overset{\uparrow}{\text{rango}(A)=r}}{\dim(\text{Im}(A))} = n$$

—o —o —

Esempio 1

$$\begin{cases} 2x + ay - 3z = 2 \\ x + y - z = b \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

Domanda: stabilire al variare di a e b, in quale situazione ci troviamo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & b \\ 1 & -3 & 0 & 5 \end{array}\right) = \hat{A}$$

$$\underbrace{\quad\quad\quad}_{A}$$

Se rango $(A) = 3$, allora per forza rango $(\hat{A}) = 3$ (essendoci solo 3 righe, il rango al max è 3)

$\text{Det}(A) = -a + 9 + 3 - 6 = -a + 6$

→ Se $a \neq 6$, allora il sistema ha soluzioni che dipendono da $n - r = 3 - 3 = 0$ parametri ⇝ sol. unica, qualunque sia b.

→ Se $a = 6$, allora rango $(A) = 2$ (infatti è facile trovare minori 2×2 con det $\neq 0$). Quindi tutto dipende da Rango $(\hat{A})$.

$$\left(\begin{array}{c|cc|c|} 2 & 6 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & b \\ 1 & -3 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$\text{Det} = -30 + 9b - 6 + 15 = 9b - 21$

Se $b \neq \frac{7}{3}$, allora non ci sono soluzioni (i ranghi sono 2 e 3).

→ Se $a=6$ e $b=\frac{7}{3}$, allora mi piacerebbe dire che rango $(\hat{A})=2$.
Però per dirlo serve che tutti i minori 3×3 di $\hat{A}$ siano $=0$.
Essendo 4, ne dovrei fare altri 2.

In realtà non serve farli. Infatti

- C_2 e C_3 sono lin. indip.
- C_4 è comb. lin. di C_2 e C_3 (altrimenti l'ultimo Det $\neq 0$)
- C_1 è comb. lin. di C_2 e C_3 (altrimenti il primo Det $\neq 0$)

Ma allora

$$\text{Span}\,(C_1,C_2,C_3,\cancel{C_4}) = \text{Span}\,(\cancel{C_1},C_2,C_3) = \underbrace{\text{Span}\,(C_2,C_3)}_{\text{ha dim } 2}$$

Conclusione: nel caso $a=6$ e $b=\frac{7}{3}$ il sistema ha ∞ soluzioni che dipendono da $n-r=1$ parametro (volendo si risolve banalmente).

[Provare a risolvere con Gauss e vedere cosa succede]

<u>Esempio</u>

$$\begin{cases} 2x + ay = 5 \\ ax + 3y = b \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & a & 5 \\ \underbrace{a \quad 3}_{A} & & b \end{array}\right) = \hat{A} \qquad \text{Det}\,(A) = 6-a^2$$

→ Se $6-a^2\neq 0$, cioè $a\neq\pm\sqrt{6}$, allora Rango (A) = Rango $(\hat{A})=2$
Quindi soluzione unica $(k=n-r=2-2=0)$

→ Se $a=\pm\sqrt{6}$, allora entra in gioco b.

$a=\sqrt{6}$ $\qquad \begin{pmatrix} 2 & \boxed{\begin{matrix}\sqrt{6} & 5 \\ 3 & b\end{matrix}} \\ \sqrt{6} & \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\text{Det} = \sqrt{6}\,b - 15$

→ Se $b\neq\frac{15}{\sqrt{6}}$, allora NO SOLUZIONI

→ Se $b=\frac{15}{\sqrt{6}}$, allora ∞ sol. (1 param.)

Idem se $a=-\sqrt{6}$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 25

Note Title 27/10/2023

Formula alternativa per la matrice inversa

Algoritmo : → A_{ij}

→ Aggiusto i segni

→ Trasposta

→ Divido per Det

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Det = 4 + 4 + 2 − 3 = 7

Quindi l' inversa esiste

Per ogni el. della matrice, elimino la sua riga e colonna e faccio Det di ciò che rimane

$$\begin{pmatrix} 1 & 11 & 3 \\ -2 & 6 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aggiusto i segni a scacchiera

$$\begin{pmatrix} 1 & -11 & 3 \\ 2 & 6 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -11 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Divido per Det (A) = 7

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -11 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Modulo errori di conto, dovrebbe essere la matrice inversa.

Verifica su 2×2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(Formula già vista a suo tempo)

[La dimostrazione seguirebbe da Laplace]

FORMULA DI CRAMER PER SISTEMI QUADRATI

Consideriamo un sistema del tipo $Ax = b$, con A quadrata $n \times n$. Supponiamo $\det(A) \neq 0$

[Questo da solo ci dice che rango A = rango $\hat{A}$, quindi il sistema ha soluz. unica, volendo $x = A^{-1}b$]

Allora
$$\boxed{x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}}$$

dove A_i è la matrice ottenuta A sostituendo la i-esima colonna con i termini noti b.

Esempio

$$\begin{array}{l} 3x + 2y - z = 5 \\ x + y = 3 \\ x - z = 2 \end{array}$$

$$y = \frac{\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 3 & \boxed{5} & -1 \\ 1 & \boxed{3} & 0 \\ 1 & \boxed{2} & -1 \end{pmatrix}}{\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}} = \text{il conto si fa}$$

[Anche questo segue da Laplace e/o dalle proprietà del Det.].

— o — o —

Esempio

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 \\ x + ay + 2z = 3 \end{cases}$$

Studiare il numero di soluzioni al variare di a.

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & a & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$\uparrow$

$\mathrm{Det} = 2a - 3$

Vediamo il rango di A. Oss. che $\mathrm{Span}(C_1, C_3)$ ha dim 1

Quindi tutto dipende da C_2

→ Se $a \neq \frac{3}{2}$, allora Rango $(A) = 2$, quindi anche Rango $(\hat{A}) = 2$, quindi il sistema ha sol. dipendenti da $3 - 2 = 1$ parametro

→ Se $a = \frac{3}{2}$, allora Rango $(A) = 1$ (R_2 è metà di R_1)
D'altra parte, Rango $(\hat{A}) = 2$ sempre per colpa del 2×2 finale. Quindi non ci sono soluzioni.

— o — o —

V	Condizioni	Base	D_K	D_I	$D_{K\cap I}$	Matrice
$\mathbb{R}^2$	$(1,2)\to(-1,1)$ $(1,0)\to(2,2)$	$v_1=(-1,2)$ $v_2=(1,-3)$				

Abbiamo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(1,2) = (-1,1)$$
$$f(1,0) = (2,2)$$

① Dim. che esiste ed è unica

[Basta osservare che $(1,2)$ e $(1,0)$ sono una BASE di $\mathbb{R}^2$]

② Determina dim di Ker e Im

$$\text{Im} \supseteq \text{Span}((-1,1),(2,2)) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sono lin.}\\ \text{indip}}}{=} \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \text{Im} = \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow \dim(\text{Im}) = 2 \overset{RN}{\Rightarrow} \dim(\ker) = 0.$$

③ Determinare la matrice di f dalla canonica alla canonica

$\boxed{\text{Bovino}}$ Devo fare $f(1,0)$ e $f(0,1)$ e usarli come colonne

Come faccio $f(1,0)$?

È dato $f(1,0) = (2,2) = a(1,0) + b(0,1)$

Mi serve $f(0,1)$.

$$f(1,2) - f(1,0) = f(0,2) = (-3,-1) \text{ e quindi}$$
$$f(0,1) = \left(-\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Superbovino

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Cosa deve succedere ?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 2b = -1 \\ c + 2d = 1 \\ a = 2 \\ c = 2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} b &= -\frac{3}{2} \\ d &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Metodo RAPUANO

$$f(1,2) = (-1,1)$$
$$f(1,0) = (2,2)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 2 & 2 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix}} \\ 0 & 1 & \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad ☺$$

↑ trasposta

Metodo astuto

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Ho messo in colonna le due immagini

Questa matrice rappresenta la f dalla base

$$v_1 = (1,2) \qquad v_2 = (1,0)$$

alla canonica. Ora devo comporre con il cambio base in partenza dalla canonica alla $\{v_1, v_2\}$. La matrice che lo fa è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice richiesta tra le canoniche è

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad ☺$$

—o—o—

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 26

Note Title 31/10/2023

Esercizio 1 $V = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0 \}$

→ Dimostrare che V è un s.sp. vett.

$\boxed{\text{SOMMA}}$ Devo verificare che, $\boxed{\text{per ogni}}$ v_1 e v_2 in V, anche $v_1 + v_2 \in V$

↑ non basta fare esempi

Ipotesi $v_1 = (x_1, y_1, z_1) \in V$ cioè $x_1 - 2y_1 + 3z_1 = 0$

$v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in V$ cioè $x_2 - 2y_2 + 3z_2 = 0$

Tesi $v_1 + v_2 \in V$ Ora $v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

Devo quindi verificare che $(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) = 0$

$\boxed{\text{Dim la tesi usando l'ipotesi}}$

$$(x_1+x_2) - 2(y_1+y_2) + 3(z_1+z_2) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{proprietà}\\ \text{della somma}\\ \text{di numeri}}}{=} \underbrace{(x_1 - 2y_1 + 3z_1)}_{0} + \underbrace{(x_2 - 2y_2 + 3z_2)}_{0} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{uso ipotesi}}}{=} 0 + 0 = 0$$

$\boxed{\text{PRODOTTO}}$ $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R}}$ $\boxed{\forall v \in V}$ anche $\lambda v \in V$

Ipotesi $\lambda \in \mathbb{R}$

$v = (x, y, z) \in V$, cioè $x - 2y + 3z = 0$

Tesi $\lambda v \in V$ $\lambda v = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

Quindi devo verificare che $(\lambda x) - 2(\lambda y) + 3(\lambda z) = 0$

$\boxed{\text{Dim}}$ $$(\lambda x) - 2(\lambda y) + 3(\lambda z) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{proprietà}\\ \text{del prodotto}}}{=} \lambda (x - 2y + 3z) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{uso}\\ \text{ipotesi}}}{=} \lambda \cdot 0 = 0$$

→ Dimensione e base $x - 2y + 3z = 0$

y e z variabili libere, quindi pongo $z = t$, $y = s$, $x = 2s - 3t$

e quindi $(x,y,z) = (2s - 3t, s, t) = t(-3,0,1) + s(2,1,0)$

Dim = 2 $V = \text{Span}((-3,0,1), (2,1,0))$ ↖ SONO UNA BASE ↗

Esercizio 2 $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \ x+y = z+w \ , \ x-y = w\}$

$x+y-z-w=0, \ x-y-w=0$

Dimostrare che è un s.sp. vett.

$\boxed{\text{SOMMA}}$

Ipotesi $\boxed{\begin{array}{l} x_1+y_1-z_1-w_1=0 \\ x_1-y_1-w_1=0 \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{l} x_2+y_2-z_2-w_2=0 \\ x_2-y_2-w_2=0 \end{array}}$

$v_1 = (x_1, y_1, z_1, w_1) \in V$ $v_2 = (x_2, y_2, z_2, w_2) \in V$

Tesi $v_1+v_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2, w_1+w_2) \in V$ cioè

$(x_1+x_2)+(y_1+y_2)-(z_1+z_2)-(w_1+w_2)=0$

$(x_1+x_2)-(y_1+y_2)-(w_1+w_2)=0$

$\boxed{\text{Dim}}$ (della tesi usando l'ipotesi)

$(x_1+x_2)+(y_1+y_2)-(z_1+z_2)-(w_1+w_2)$

$= (x_1+y_1-z_1-w_1)+(x_2+y_2-z_2-w_2) = 0+0 = 0$ ☺

$(x_1+x_2)-(y_1+y_2)-(w_1+w_2) = (x_1-y_1-w_1)+(x_2-y_2-w_2) = 0+0=0$ ☺

$\boxed{\text{PRODOTTO}}$ Ipotesi : $\lambda \in \mathbb{R}$

$v = (x,y,z,w) \in V$ cioè $x+y-z-w=0$

$x-y-w=0$

Tesi : $\lambda v \in V$ ma $\lambda v = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda w)$ quindi

$(\lambda x)+(\lambda y)-(\lambda z)-(\lambda w)=0$

$(\lambda x)-(\lambda y)-(\lambda w)=0$

Dim : raccogliere λ

$\boxed{\text{Dimensione e base}}$ $\begin{cases} x+y-z-w=0 \\ x-y-w=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y-z-w=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$

$w = t, \quad z = 2s, \quad y = s, \quad x = w+z-y = t+2s-s = t+s$

$(x,y,z,w) = (t+s, s, 2s, t) = t\,(1,0,0,1) + s\,(1,1,2,0)$

Quindi dim $= 2$ e UNA BASE è $\{(1,0,0,1), (1,1,2,0)\}$

Oss. $V = \{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \underset{\text{sempre verificata}}{\boxed{y^2+w^2 \geq 0}} \}$ quindi $V = \mathbb{R}^4$

$V = \{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \underset{\text{modo BUFFO di dire che } y=w=0}{\boxed{y^2+w^2 = 0}} \}$

Quindi in questo caso V è un s.sp. di $\mathbb{R}^4$ di dim 2 e UNA BASE è $\{(1,0,0,0), (0,0,1,0)\}$

Esercizio 3 $V = \left\{ A \in M_{2\times 2} : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right\}$

→ Dimostrare che è un s.sp. vettoriale

$\boxed{\text{SOMMA}}$ Se A_1 e $A_2 \in V$, allora anche $A_1 + A_2 \in V$

Ipotesi: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A_1 = A_1 \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A_2 = A_2 \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

Tesi: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} (A_1 + A_2) = (A_1 + A_2) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{Dim}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} (A_1 + A_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{propr.} \\ \text{distributiva}}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A_1 + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A_2$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso} \\ \text{ipotesi}}}{=} A_1 \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso} \\ \text{distributiva per} \\ \text{raccogliere}}}{=} (A_1 + A_2) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

☺

PRODOTTO Ipotesi $\lambda \in \mathbb{R}$

$A \in V$, cioè $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

Tesi : $\lambda A \in V$, cioè $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} (\lambda A) = (\lambda A) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

Dim $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} (\lambda A) = \lambda \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A \right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso} \\ \text{ipotesi}}}{=} \lambda \left[A \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right] = (\lambda A) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Dimensione e base $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Ora faccio i conti

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+7b & 6a+8b \\ 5c+7d & 6c+8d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+2c = 5a+7b \\ b+2d = 6a+8b \\ 3a+4c = 5c+7d \\ 3b+4d = 6c+8d \end{cases}$$

⤳ porto tutto dalla stessa parte e risolvo

(può anche succedere che l'unica soluzione sia $a=b=c=d=0$)

Oss. L'esercizio era lo stesso che dire

$V = \{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$: sono verificate le 4 equazioni del sistema $\}$

Esercizio 4 $W = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+3y \geq 0 \}$

Questo non è un s.sp. vettoriale. Che cosa va male ?

SOMMA Ipotesi : $(x_1, y_1) \in W$, cioè $x_1 + 3y_1 \geq 0$

$(x_2, y_2) \in W$, cioè $x_2 + 3y_2 \geq 0$

Tesi : $(x_1+x_2, y_1+y_2) \in W$, cioè $(x_1+x_2) + 3(y_1+y_2) \geq 0$

Dim. $(x_1+x_2)+3(y_1+y_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{propr. somma}}}{=} \overset{\geq 0}{(x_1+3y_1)} + \overset{\geq 0}{(x_2+3y_2)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{somma di due numeri } \geq 0}}{\geq} 0$

$\boxed{\text{PRODOTTO}}$ Ipotesi : $\lambda \in \mathbb{R}$

$(x,y) \in W$ cioè $x+3y \geq 0$

Tesi : $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y) \in W$ cioè $(\lambda x) + 3(\lambda y) \geq 0$

Dim $(\lambda x) + 3(\lambda y) = \lambda \underbrace{(x+3y)}_{\geq 0}$

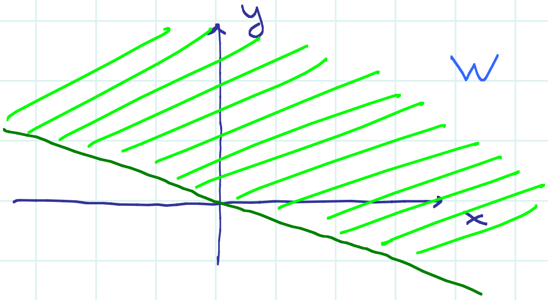
Se λ è ≥ 0, allora posso concludere

Se λ è < 0, sembra andare male

Allora BASTA UN ESEMPIO $(x,y) = (1,1) \in W$

$\lambda = -2$ $\lambda(x,y) = (-2,-2) \notin W$

Interpretazione geometrica

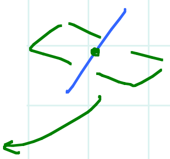


— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 27

Note Title 31/10/2023

	X	V	W	$\dim(V)$	$\dim(W)$	$\dim(V\cap W)$	$\dim(V+W)$
1	$\mathbb{R}^2$	$(1,0)$	$(1,1)$	1	1	0	2
2	$\mathbb{R}^2$	$(1,1)$	$(2,2)$ $(3,3)$	1	1	1	1
3	$\mathbb{R}^2$	$(1,2)$	$(3,4)$ $(5,6)$	1	2	1	2
4	$\mathbb{R}^3$	$(1,2,3)$	$(1,1,0)$ $(0,2,-1)$	1	2	0	3
5	$\mathbb{R}^3$	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$	$(0,1,1)$ $(1,1,1)$	2	2	1	3
6	$\mathbb{R}^3$	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$	$(0,1,-1)$ $(3,1,2)$	2	2	2	2
7	$\mathbb{R}^3$	$(-1,1,1)$ $(2,1,0)$ $(1,2,1)$	$(1,0,1)$ $(0,5,0)$ $(7,-6,7)$	2	2		



due piani coincidenti

$w_1 = v_1 - v_2$

$w_2 = v_1 + 2v_2$

$v_3 = v_1 + v_2$

$w_3 = 7w_1 - \frac{6}{5}w_2$

④ $V+W = \text{Span}\big((1,2,3),(1,1,0),(0,2,-1)\big) = \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{Det} = -1+6+2 \neq 0$$

$\text{Dim}(V+W) = 3 \rightsquigarrow \text{Dim}(V\cap W)=0 \rightsquigarrow V\cap W = \{(0,0,0)\}$

⑤ $V+W = \text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$

$$\left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}}\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right) \qquad \text{Det} = -2 \neq 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \dim(V\cap W)=1 \\ \dim(V+W)=3 \end{array}$$

Sappiamo anche che $V+W = \mathbb{R}^3$.

Sarebbe bello trovare una base di $V\cap W$.

Osserviamo a occhio che $v_1+v_2 = 2w_2 - w_1$ e quindi

$V\cap W = \text{Span}\big((2,1,1)\big)$ ☺

Alternative per trovare intersezione

① passo i piani in cartesiana e metto a sistema

② Risolvo $av_1 + bv_2 = cw_1 + dw_2$

Troverò che una soluzione $a=1,\ b=1,\ c=2,\ d=-1$

Dalla relazione ho un vettore che sta in V e W.

⑦ $V = \text{Span}((-1,1,1),(2,1,0))$ Ho eliminato i terzi, e ho

$W = \text{Span}((1,0,1),(0,1,0))$ semplificato w_2

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

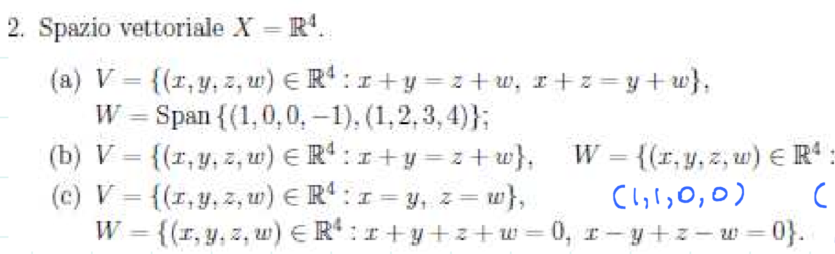
Det $3\times3 \neq 0 \Rightarrow$ rango 3

$\Rightarrow \text{Dim}(V+W) = 3 \Rightarrow V+W = \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \text{Dim}(V\cap W) = 1 \Rightarrow V\cap W$ è una retta

Osservo che $\underset{(1,2,1)}{\underset{\shortparallel}{v_1+v_2}} = w_1 + 2w_2$ e quindi $V\cap W = \text{span}((1,2,1))$

— o — o —



2. Spazio vettoriale $X = \mathbb{R}^4$.

(a) $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y = z+w,\ x+z = y+w\}$,
$W = \text{Span}\{(1,0,0,-1),(1,2,3,4)\}$;

(b) $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y = z+w\}$, $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+z = y+w\}$;

(c) $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = y,\ z = w\}$, $(1,1,0,0)$ $(0,0,1,1)$
$W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+w = 0,\ x-y+z-w = 0\}$. $(1,0,-1,0)$

$w_1 + w_2 = v_1 - v_2$ $(0,1,0,-1)$

(a) $\begin{cases} x+y-z-w=0 \\ x-y+z-w=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y-z-w=0 \\ 2y-2z=0 \end{cases}$

$w=t,\ z=s,\ y=s,\ x=z+w-y = s+t-s = t$

$(x,y,z,w) = (t,s,s,t) = t\,(\underset{\uparrow}{1,0,0,1}) + s\,(0,1,\underset{\uparrow}{1},0)$

verifico che stanno in V

So che $\dim(V) = 2$ e $V = \text{Span}((1,0,0,1),(0,1,1,0))$

V e W sono s.sp. di $\mathbb{R}^4$ di dim 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{Det} = \text{Laplace } 1^a \text{ colonna}$$

$$= \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} - \text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= -2+3-(2-3) = 1+1 = 2 \neq 0$$

Quindi $V+W = \mathbb{R}^4$ e $V \cap W = \{(0,0,0,0)\}$

(b) $V \rightsquigarrow x+y = z+w$ $\qquad$ $W \rightsquigarrow x+z = y+w$

$\text{Dim}(V) = \text{Dim}(W) = 3$

$V = \text{Span}((1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,-1))$

$W = \text{Span}((1,0,0,1),(0,1,0,-1),(0,0,1,1))$

Per $V+W$ li metto a colonna e vedo il rango

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Laplace 1^a riga

$$-\text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

Quindi $V+W = \mathbb{R}^4$ e quindi $\text{dim}(V \cap W) = 2$

Troviamo base di $V \cap W$

È ovvio che $(1,0,0,1) \in V \cap W$. Ne vediamo un altro?

Con un po' di occhio si vede che

$$v_2 + v_3 = w_2 + w_3 = (0,1,1,0)$$

Questo ci dice che

$$V \cap W = \text{Span}((1,0,0,1),(0,1,1,0))$$

↑ corretto dopo video

[Bovino: risolvo $av_1 + bv_2 + cv_3 = dw_1 + ew_2 + fw_3$]

Avrò 2 gradi di libertà.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 28

Note Title 31/10/2023

$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$x^3 \to 3x^2$ $x^2 \to 2x$ $x \to 1$ $1 \to 0$	$v_1 = x^3$ $v_2 = x^2$ $v_3 = x$ $v_4 = x^3 + 1$				

Esercizio Dimostrare che esiste unica $\overset{\text{lineare}}{f} : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ che verifica le condizioni della prima casella

Risposta: basta oss. che $1, x, x^2, x^3$ sono una base e posso mandarli dove voglio.

Determinare ker e Im.

$$\text{Im} = \text{Span}(3x^2, 2x, 1, 0) = \overbrace{\text{Span}(3x^2, 2x, 1)}^{\text{Polinomi di grado } \leq 2}$$
$$= \text{Span}(1, x, x^2)$$

Sono indip., quindi $\dim(\text{Im}) = 3$

R.N. $\Rightarrow \dim(\ker) = 1$ e in questo caso $\ker = \overset{\text{Im}(f)}{\overset{\cup\!|}{\underset{\underset{\text{polinomi costanti}}{\|}}{\text{Span}(1)}}}$

Oss. La f è l'applicazione $p(x) \to p'(x)$, quindi il ker sono le costanti e l'immagine i pol. di grado ≤ 2.

Determinare la matrice di f usando in partenza ed arrivo la base $v_1 = x^3$, $v_2 = x^2$, $v_3 = x$, $v_4 = x^3+1$

$$f(v_1) = f(x^3) = 3x^2 = 3v_2$$
$$f(v_2) = f(x^2) = 2x = 2v_3$$
$$f(v_3) = f(x) = 1 = v_4 - v_1$$
$$f(v_4) = f(x^3+1) = 3x^2 = 3v_2$$

$$\begin{array}{c|cccc|}
v_1 \to & 0 & 0 & -1 & 0 \\
v_2 \to & 3 & 0 & 0 & 3 \\
v_3 \to & 0 & 2 & 0 & 0 \\
v_4 \to & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 & f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) & f(v_4)
\end{array}$$

Osserviamo che il rango della matrice è 3 ($C_4 = C_1$ ed esiste minore 3×3 diverso da 0).

$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$x^3+1 \to x^2+1$ $x^3+2 \to x^2+2$ $x^2 \to x^2+3$ $x \to x^2+4$	$v_1 = 1$ $v_2 = x$ $v_3 = x^2$ $v_4 = x^3$				

Esiste ed è unica

Basta osservare che x^3+1, x^3+2, x^2, x sono una base di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$

(si può vedere in tanti modi enunciati nel video)

$\boxed{\text{Ker e Im}}$ $\text{Im} = \text{Span}(x^2+1, x^2+2, x^2+3, x^2+4) = \text{Span}(1, x^2)$

Se fossero vettori sarebbero $(1,0,1,0)$, $(2,0,1,0)$
$(3,0,1,0)$, $(4,0,1,0)$

$\text{Span}(x^2+1, x^2+2, x^2+3, x^2+4) \ni 1 \qquad 1 = (x^2+2) - (x^2+1)$
$\ni x^2 \qquad x^2 = 2(x^2+1) - (x^2+2)$

$\text{Dim}(\text{Im}) = 2 \rightsquigarrow \text{Dim}(\text{Ker}) = 2$

Osservo che $f(x^3+1) + f(x) = f(x^3+2) + f(x^2)$
quindi di sicuro $x^3+1+x-(x^3+2)-x^2 = -1+x-x^2 \in \text{Ker}$

$$a(x^2+1) + b(x^2+2) + c(x^2+3) + d(x^2+4) = 0$$

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ a+2b+3c+4d=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b+c+d=0 \\ \quad b+2c+3d=0 \end{cases}$$

$d = t \quad c = s \quad b = -2s-3t \quad a = -b-c-d = 2s+3t-s-t = s+2t$

$(a,b,c,d) = (s+2t, -2s-3t, s, t) = t(2,-3,0,1) + s(1,-2,1,0)$

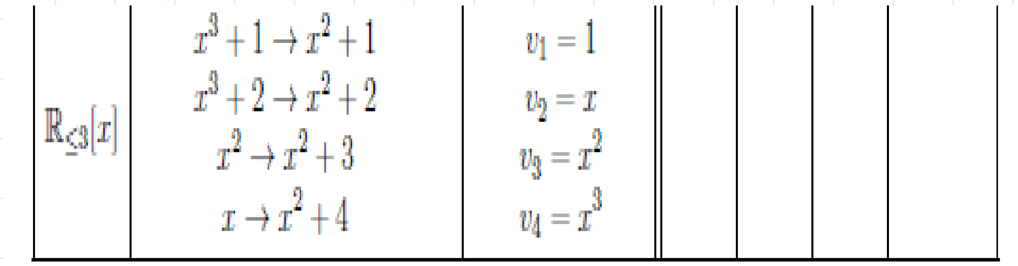
Una relazione non vista era $(x^2+1) + (x^2+3) = 2(x^2+2)$
$f(x^3+1) + f(x^2) = 2f(x^3+2)$

Quindi $x^3+1+x^2-2x^3-4 \in \text{Ker} \qquad -x^3+x^2-3$

Conclusione $\ker(f) = \text{Span}(x^2-x+1,\ x^3-x^2+3)$

$\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \text{Span}(x^2-x+1,\ x^3-x^2+3) \cap \text{Span}(1, x^2) = \{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{pol. nullo}}}{0}\}$

$a(x^2-x+1)+b(x^3-x^2+3)$ se deve avere solo x^2 e termine noto, allora $a=b=0$.



$\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$	$x^3+1 \to x^2+1$ $x^3+2 \to x^2+2$ $x^2 \to x^2+3$ $x \to x^2+4$	$v_1 = 1$ $v_2 = x$ $v_3 = x^2$ $v_4 = x^3$				

Scrivere la matrice rispetto alla base v_1, v_2, v_3, v_4

$f(v_1) = f(1) = f(x^3+2) - f(x^3+1) = (x^2+2) - (x^2+1) = 1$

$f(v_2) = f(x) = x^2+4 = 4v_1 + v_3$

$f(v_3) = f(x^2) = x^2+3 = 3v_1 + v_3$

$$\begin{array}{c} 1 \to \\ x \to \\ x^2 \to \\ x^3 \to \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \underset{\substack{\uparrow \\ f(1)}}{0} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(v_4) = f(x^3) &= f(2(x^3+1) - (x^3+2)) \\ &= 2f(x^3+1) - f(x^3+2) \\ &= 2(x^2+1) - (x^2+2) \\ &= x^2 = v_3 \end{aligned}$$

Il rango della matrice è 2 perché R_2 e R_4 sono nulle e le restanti 2 sono lin. indip.

A posteriori, come potrei trovare $\ker(f)$?

Bovinamente
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \boxed{a}+4b+3c = 0 \\ \boxed{b}+c+d=0 \end{cases}$$

$d=t \quad c=s \quad b=-t-s$

$a=-3c-4b = -3s+4t+4s = s+4t$

$(a,b,c,d) = (s+4t,-t-s,s,t) = t(4,-1,0,1)+s(1,-1,1,0)$

Tornando in polinomi

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Span}(x^3-x+4,\ x^2-x+1)$$

Domanda: è lo stesso di prima?

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 29

Note Title 03/11/2023

$\mathbb{R}^3$	$\hat{v}_1 (1,0,1) \to (1,1,-1)$ $\hat{v}_2 (2,2,0) \to (3,3,-3)$ $\hat{v}_3 (0,1,1) \to (2,2,-2)$	$v_1 = (1,-1,2)$ $v_2 = (1,-1,1)$ $v_3 = (-1,2,1)$				

① Dim. che esiste unica $f : R^3 \longrightarrow R^3$ che soddisfa le condizioni della prima colonna

Basta verificare che $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3$ sono una base di $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Det} = 2+2 = 4 \neq 0 \qquad \text{o.k.}$$

② Tutto su $\ker(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$.

$\operatorname{Im} = \operatorname{Span}((1,1,-1)) \rightsquigarrow \operatorname{Im}(f)$ ha dim. 1

R.N. $\Rightarrow \ker(f)$ ha dim. 2

$$\ker(f) = \operatorname{Span}(\hat{v}_2 - 3\hat{v}_1, \hat{v}_3 - 2\hat{v}_1)$$
$$= \operatorname{Span}((-1,2,-3),(-2,1,-1))$$

③ Cosa possiamo di $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$?

$$\ker(f) + \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Span}((1,1,-1),(-1,2,-3),(-2,1,-1))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{Det} = -2+1+6-4-1+3 = 3 \neq 0$$

Quindi $\ker(f) + \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow \operatorname{Im}(f) \cap \ker(f) = \{(0,0,0)\}$

④ Scriviamo un po' di matrici associate ad f

$\mathbb{R}^3$	$\hat{v}_1\ (1,0,1) \to (1,1,-1)$ $\hat{v}_2\ (2,2,0) \to (3,3,-3)$ $\hat{v}_3\ (0,1,1) \to (2,2,-2)$	$v_1 = (1,-1,2)$ $v_2 = (1,-1,1)$ $v_3 = (-1,2,1)$				

$$\begin{array}{cccl} \left(\begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \to e_1 \\ \to e_2 \\ \to e_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(\hat{v}_1) & f(\hat{v}_2) & f(\hat{v}_3) \end{matrix} \end{array}$$

Matrice che rappresenta f usando

→ in partenza la base $\hat{B} = \{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\}$

→ in arrivo la base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$

Matrice di f dalla canonica alla canonica.

$\boxed{\text{Bovino}}$ Scrivo $e_1 = (1,0,0)$ come $a\hat{v}_1 + b\hat{v}_2 + c\hat{v}_3$

Trovo a, b, c. Poi calcolo

$$f(e_1) = f(a\hat{v}_1 + b\hat{v}_2 + c\hat{v}_3)$$
$$= a f(\hat{v}_1) + b f(\hat{v}_2) + c f(\hat{v}_3)$$
$$= a(1,1,-1) + b(3,3,-3) + c(2,2,-2)$$

Quello che ottengo è la prima colonna della matrice richiesta.

$$(1,0,0) = a(1,0,1) + b(2,2,0) + c(0,1,1)$$

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ 2b + c = 0 \quad \rightsquigarrow \quad c = -2b \quad \rightsquigarrow \quad a = -c = 2b \quad \rightsquigarrow \quad 4b = 1 \\ a + c = 0 \qquad\qquad b = \frac{1}{4},\ a = \frac{1}{2},\ c = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Prima colonna

$$\boxed{\begin{matrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{matrix}}$$

$$f(e_1) = \frac{1}{2}(1,1,-1) + \frac{1}{4}(3,3,-3) - \frac{1}{2}(2,2,-2) = \frac{1}{4}(1,1,-1)$$

$\boxed{\text{Astuto}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice di cambio base dalla $\hat{B}$ alla Canonica

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}}_{C \xleftarrow{f} \hat{B}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{\hat{B} \xleftarrow{\text{cambio base}} C}$$

Prende in input le componenti di un vettore v rispetto alla canonica e restituisce quelle di $f(v)$ rispetto alla canonica

Facciamo l'inversa con i cofattori

$$\rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A_{ij}} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{aggiusto segni}}$$

$$\frac{1}{4}\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & +1 & -1 \\ -2 & +2 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{trasposta}} \qquad \text{Det} = 2+2=4$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z) = \frac{1}{4}(x+5y+3z,\ x+5y+3z,\ -x-5y-3z)$$

Verifica $f(1,0,1) = \frac{1}{4}(4,4,-4) = (1,1,-1)$ ☺

$f(2,2,0) = \frac{1}{4}(12,12,-12) = (3,3,-3)$ ☺

$f(0,1,1) = \frac{1}{4}(8,8,-8) = (2,2,-2)$ ☺

Matrice di f dalla base $\underset{B\,\nearrow}{\{v_1,v_2,v_3\}}$ alla base $\underset{B\,\nearrow}{\{v_1,v_2,v_3\}}$

$v_1 = (1,-1,2)$
$v_2 = (1,-1,1)$
$v_3 = (-1,2,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix}\text{cambio base} \\ B \to C\end{matrix}$$

$$\begin{tikzcd} B & C \arrow[l, "\text{cambio base}"'] & C \arrow[l, "\text{Applic. } f"'] & B \arrow[l, "\text{cambio base}"'] \end{tikzcd}$$

$\mathbb{R}^2$	$\hat{v}_1$ $(0,1) \to (1,1)$ $\hat{v}_2$ $(-1,2) \to (2,2)$	$v_1 = (1,1)$ $v_2 = (0,1)$

Scrivere il cambio di base da $B = \{v_1, v_2\}$ alla base $\hat{B} = \{\hat{v}_1, \hat{v}_2\}$

$\boxed{\text{Bovino}}$

$$v_1 = a\,\hat{v}_1 + b\,\hat{v}_2 \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \hat{v}_1 \ \text{INPUT: comp. } B \\ \hat{v}_2 \ \text{OUTPUT: '' } \hat{B} \end{array}$$

$$v_2 = c\,\hat{v}_1 + d\,\hat{v}_2$$

$\boxed{\text{Cambio base}}$

$$\underset{\hat{B} \to C}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \qquad \underset{B \to C}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{B} \longleftarrow C \longleftarrow B$$

Matrice di f dalla B alla B

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \underset{\substack{\uparrow \\ \text{C.B.}}}{\longleftarrow} C \underset{\substack{\uparrow \\ f}}{\longleftarrow} \hat{B} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{C.B.}}}{\longleftarrow} C \underset{\substack{\uparrow \\ \text{C.B.}}}{\longleftarrow} B$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 30

Note Title 03/11/2023

SOMME DIRETTE E PROIEZIONI

Esempio Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i due sottospazi

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\}$

$W = \mathrm{Span}((1,2,1))$

① Dimostrare che $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$, cioè $V + W = \mathbb{R}^3$ e $V \cap W = \{\overset{(0,0,0)}{\overset{\downarrow}{0}}\}$

$V = \mathrm{Span}((1,1,0),(2,0,-1))$ Una base si vede a occhio

$W = \mathrm{Span}((1,2,1))$

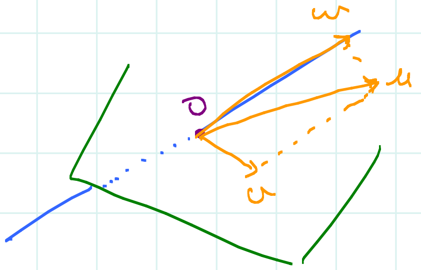
$V + W = \mathrm{Span}((1,1,0),(2,0,-1),(1,2,1)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{se sono lin. indip.}}}{=} \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathrm{Det} = -1 - 2 + 2 = -1 \neq 0.$$

[Altro metodo: se fosse stato $V \cap W \neq \{0\}$, allora voleva dire che $W \subseteq V$, cioè retta $\subseteq$ piano, ma allora $(1,2,1)$ doveva risolvere l'eq. del piano]

Grassmann $\Rightarrow$ $\dim(V \cap W) = 0$ e in particolare la somma è diretta

② Essendo la somma diretta, vuol dire che ogni $u \in \mathbb{R}^3$ si scrive IN MODO UNICO come $u = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in } V}}{v} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in } W}}{w}$



Domanda: dato u, come calcolo v e w?

$\boxed{\text{Bovino}}$ Scrivo $u = \underbrace{a\,(1,1,0)+b\,(2,0,-1)}_{\in\ V} + \underbrace{c\,(1,2,1)}_{\in\ W}$

<u>Metodo generale</u>: quando $X = V \oplus W$, allora basta prendere una base di X fatta mettendo insieme una base di V e una base di W

$\boxed{\text{Astuto}}$ C'è una "black box" che prende in input u e restituisce le due componenti v e w ?
Sì, e sono le matrici di proiezione.
Vediamo la proiezione su V (poi banalmente $w = u - v$)

Quale proprietà ha la proiezione ?

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} v_1 = (1,1,0) \\ v_2 = (2,0,-1) \end{array}\right\} \text{base di } V \\ \left.\begin{array}{l} w_1 = (1,2,1) \end{array}\right\} \text{base di } W \end{array}\right\} \text{base di } \mathbb{R}^3$$

$$\left.\begin{array}{l} (1,1,0) \longrightarrow (1,1,0) \\ (2,0,-1) \longrightarrow (2,0,-1) \end{array}\right\} \text{se un vettore sta nel piano, coincide con la sua proiezione}$$

$$(1,2,1) \longrightarrow (0,0,0)$$

A questo p.to basta scrivere la matrice dell'applicazione $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con queste proprietà. Dalla canonica alla canonica risulta

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{tikzcd} \text{Canonica} & \text{strana} \arrow[l, "\text{proiezione}"'] & \text{Canonica} \arrow[l, "\text{cambio base}"'] \end{tikzcd}$$

Facciamo l'inversa con Gauss

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

MATRICE DI PROIEZIONE SU V

Cosa succede se dò in pasto $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -25 \\ -7 \end{pmatrix}$$

← Questo dovrebbe stare nel piano $x - y + 2z = 0$ ☺

$$(2, 1, 6) = \underbrace{(-11, -25, -7)}_{\text{piano}} + \underbrace{(13, 26, 13)}_{\text{retta } \operatorname{span}((1,2,1))}$$

Oss. Matrice di proiezione su W = Id − proiezione su V

— o — o —

Esercizio Consideriamo $f : M_{2\times 2} \longrightarrow M_{2\times 2}$ definita da

$$f(A) = A^t + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A$$

Domande: Ker, Im, matrice di f usando base canonica

$\boxed{\text{Bovino}}$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a+2c & b+c+2d \\ 3a+b+4c & 4c+5d \end{pmatrix}$$

Quindi è come se stessi studiando

$$f(a,b,c,d) = (2a+2c,\ b+c+2d,\ 3a+b+4c,\ 4c+5d)$$

Matrice tra basi canoniche

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow e_1 \\ \\ = B \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{l} \uparrow \\ f(e_1) \end{array} & \end{array}$$

Ovviamente la prima colonna sarebbe $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$= 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2e_1 + 3e_3$$

e così via per le altre colonne.

Per studiare Ker e Im, calcolo Det B.

→ Se Det $B \neq 0$, allora $\mathrm{Ker}(f) = \{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Matrice } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}{0}\}$ e $\mathrm{Im}(f) = M_{2\times 2}$

→ Se Det $B = 0$, allora rango$(B) = 3$ e in questo caso $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ e una base si trova risolvendo e $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$ (vorrebbe dire che c'è una relazione non banale tra le colonne e quindi ne posso eliminare una)

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 31

Note Title 07/11/2023

Basi ORTOGONALI e ORTONORMALI (risp. al prod. scalare standard)

<u>Def.</u> Una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ si dice

- $\boxed{\text{ORTOGONALE}}$ se $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ per ogni $i \neq j$
- $\boxed{\text{ORTONORMALE}}$ se

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

(cioè la base è ortogonale)

(cioè i vettori della base hanno tutti norma 1)

<u>Esempio classico</u> La base canonica

Proprietà fondamentale Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base $\boxed{\text{ortonormale}}$ di $\mathbb{R}^n$, allora ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si scrive come

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

dove

$$\boxed{c_i = \langle v, v_i \rangle}$$

Se la base è solo $\boxed{\text{ortogonale}}$ allora $\boxed{c_i = \dfrac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}}$

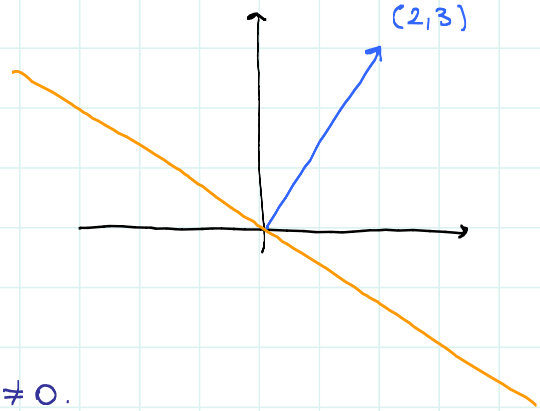
Dim Prendiamo $v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$.

Ora facciamo il prod. scalare con un certo v_i:

$$\begin{aligned} \langle v, v_i \rangle &= \langle c_1 v_1 + \dots + c_n v_n, v_i \rangle \\ &= c_1 \underset{0}{\underset{\parallel}{\langle v_1, v_i \rangle}} + \dots + c_i \langle v_i, v_i \rangle + \dots + c_n \underset{0}{\underset{\parallel}{\langle v_n, v_i \rangle}} \\ &= c_i \langle v_i, v_i \rangle \end{aligned}$$

Da qui si ricava c_i. ☺

Esempio 1 Trovare le basi ortogonali di $\mathbb{R}^2$ che contengano il vettore $(2,3)$



Un possibile esempio è

$v_1 = (2,3) \qquad v_2 = (-3,2)$

Un altro esempio

$v_1 = (2,3) \qquad v_2 = (3,-2)$

Tutti gli esempi sono del tipo

$v_1 = (2,3) \qquad v_2 = a(3,-2)$ con $a \neq 0$.

Oss. Ogni base ortogonale la posso ortonormalizzare semplicemente dividendo per la la norma

Esempio 2 $v_1 = (2,3) \qquad v_2 = (-3,2)$ → ORTOGONALE

$$\hat{v}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right) \qquad \hat{v}_2 = \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$$ → ORTONORMALE

Ora $\|\hat{v}_1\|^2 = \langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle = \langle \hat{v}_2, \hat{v}_2 \rangle = \|\hat{v}_2\|^2 = 1.$

Esempio 2 bis Calcolare le componenti di $(-3,7)$ rispetto alla base $v_1 = (2,3) \quad v_2 = (-3,2)$

Bovino $(-3,7) = a(2,3) + b(-3,2) \rightsquigarrow$ risolvo

Usando che è ortogonale

$$a = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} = \frac{\langle (-3,7),(2,3) \rangle}{13} = \frac{15}{13}$$

$$b = \frac{\langle (-3,7),(-3,2) \rangle}{13} = \frac{23}{13}$$

Verifica: $\frac{15}{13}(2,3) + \frac{23}{13}(-3,2) = \left(\frac{30}{13} - \frac{69}{13}, \frac{45}{13} + \frac{46}{13}\right) = (-3,7)$ ☺

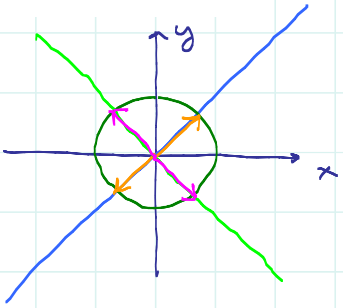
5. Sia $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$. Determinare *tutte* le basi ortonormali $\{v_1, v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ tali che $v_2 \in V$.

6. Sia $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$. Determinare per quali valori dei parametri a e b esiste una base ortogonale $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $v_1 = (3, a, b)$, $v_2 \in W$ e $v_3 \in W$.

⑤ v_2 deve essere del tipo $a(1,1) = (a,a)$

Se voglio che abbia norma 1, deve essere

$$1 = a^2 + a^2 = 2a^2 \rightsquigarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

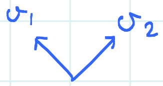


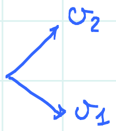
Per v_2 ho 2 possibilità

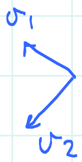
$$v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

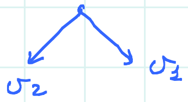
I possibili v_1 sono $\quad v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad v_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

In conclusione le possibili basi sono 4









⑥ $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$

Vogliamo una base ortogonale con

$v_1 = (3,a,b) \qquad v_2 \in W \qquad v_3 \in W$

Proviamo a scrivere W come span

$$W = \text{Span}\{\underset{\uparrow}{(1,0,1)}, \underset{\uparrow}{(1,1,3)}\}$$ base di W, ma non è ortogonale.

Se la voglio ortogonale, posso prendere $(1,0,1)$ e poi cercare (a,b,c) tale che

$$\begin{cases} a + c = 0 & (a,b,c) \perp (1,0,1) & c = -a \\ a + 2b - c = 0 & (a,b,c) \in W & 2a + 2b = 0 \end{cases}$$

$a = 1, b = -1, c = -1 \rightsquigarrow (1,-1,-1)$

Quindi possiamo prendere $v_2 = (1,0,1)$ $v_3 = (1,-1,-1)$

Ora devo trovare un v_1 del tipo $(3,a,b)$ che sia $\perp$ a v_2 e v_3.

$\boxed{1^\circ \text{modo}}$ Bovino $\begin{cases} 3+b=0 & \langle v_1, v_2\rangle = 0 \\ 3-a-b=0 & \langle v_1, v_3\rangle = 0 \end{cases}$ $\quad b=-3 \quad a=6$

Quindi $v_1 = (3,6,-3)$

$\boxed{2^\circ \text{modo}}$ $\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (1,2,-1)$ ↙ questo vettore è $\perp$ a $(1,0,1)$ e $(1,-1,-1)$

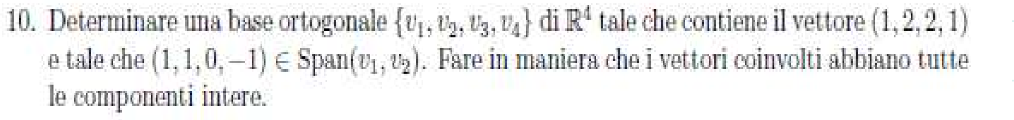
Tutti i suoi multipli hanno stessa proprietà, quindi prendiamo $(3,6,-3)$

<u>Solito esempio</u> Trovare le componenti di $\underset{v}{\underset{\shortparallel}{(5,1,4)}}$ rispetto alla base $\underset{v_1}{\underset{\shortparallel}{(3,6,-3)}}, \underset{v_2}{\underset{\shortparallel}{(1,0,1)}}, \underset{v_3}{\underset{\shortparallel}{(1,-1,-1)}}$.

Facciamo solo la seconda componente

$$b = \frac{\langle v, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} = \frac{9}{2}$$ ☺

* * *


10. Determinare una base ortogonale $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che contiene il vettore $(1,2,2,1)$ e tale che $(1,1,0,-1) \in \text{Span}(v_1, v_2)$. Fare in maniera che i vettori coinvolti abbiano tutte le componenti intere.

Possiamo iniziare prendendo $v_1 = (1,2,2,1)$

Cerchiamo v_2 del tipo

$$(1,1,0,-1) + a\,(1,2,2,1) = (1+a, 1+2a, 2a, -1+a)$$

Cosa deve succedere? $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

$$\langle v_1, v_2\rangle = 1+a+2+4a+4a-1+a = 2+10a = 0 \rightsquigarrow a = -\frac{1}{5}$$

Quindi posso prendere $v_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{-2}{5}, -\frac{6}{5}\right)$

Volendolo a coord. intere $v_2 = (4,3,-2,-6)$

Verifica: $\langle v_1, v_2 \rangle = 4+6-4-6 = 0$ ☺

È vero che $(1,1,0,-1) \in \text{Span}\left((1,2,2,1),(4,3,-2,-6)\right)$?

$\boxed{\text{1° modo}}$ Provare a risolvere

$$(1,1,0,-1) = a(1,2,2,1) + b(4,3,-2,-6)$$

Se ce la faccio, allora ok

$\boxed{\text{2° modo}}$ Costruisco una matrice in cui li metto come righe o colonne e spero che abbia rango 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tutti i minori 3×3 devono fare 0!

$\text{Det} = -4+8-6+2 = 0$ ← Col_1 è comb. lin di Col_2 e Col_3

$\text{Det} = 4-12+2+6 = 0$ ← Col_4 è " " Col_2 e Col_3

Bovinamente troveremmo v_3 e v_4.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 32

Note Title 07/11/2023

ALGORITMO DI GRAM-SCHMIDT (GS)

↑ Procedimento di ortogonalizzazione

Prende in input una base qualunque $\{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ e restituisce una base ortogonale $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che

$$\mathrm{Span}(v_1) = \mathrm{Span}(\hat{v}_1)$$
$$\mathrm{Span}(v_1, v_2) = \mathrm{Span}(\hat{v}_1, \hat{v}_2)$$
$$\vdots$$
$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = \mathrm{Span}(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_k)$$

Descrizione algoritmo

$$\hat{v}_1 = v_1$$

$$\hat{v}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, \hat{v}_1 \rangle}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle} \hat{v}_1$$

$$\hat{v}_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_1 \rangle}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle} \hat{v}_1 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_2 \rangle}{\langle \hat{v}_2, \hat{v}_2 \rangle} \hat{v}_2$$

e così via

$$\boxed{\hat{v}_k = v_k - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_k, \hat{v}_i \rangle}{\langle \hat{v}_i, \hat{v}_i \rangle} \hat{v}_i}$$

Esempio 1 Ortogonalizzare la base di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1,0,1) \qquad v_2 = (2,3,4) \qquad v_3 = (2,-1,1)$$

Sarà una base? $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\text{Det} = 3-2-6+4 = -1 \neq 0$ ☺

Applichiamo GS $\boxed{\hat{v}_1 = (1,0,1)}$

$$\hat{v}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, \hat{v}_1 \rangle}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle}\hat{v}_1 = (2,3,4) - \frac{6}{2}(1,0,1)$$

$$= (2,3,4) - (3,0,3) = \boxed{(-1,3,1)}$$

Verifico che $\langle \hat{v}_2, \hat{v}_1 \rangle = 0$

$$\hat{v}_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_1 \rangle}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle}\hat{v}_1 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_2 \rangle}{\langle \hat{v}_2, \hat{v}_2 \rangle}\hat{v}_2$$

$$= (2,-1,1) - \frac{\langle (2,-1,1),(1,0,1) \rangle}{2}(1,0,1) - \frac{\langle (2,-1,1),(-1,3,1) \rangle}{11}(-1,3,1)$$

$$= (2,-1,1) - \frac{3}{2}(1,0,1) + \frac{4}{11}(-1,3,1)$$

$$= \left(\frac{3}{22}, \frac{1}{11}, -\frac{3}{22}\right)$$

Se non vogliamo frazioni possiamo prendere $\hat{v}_3 = (3,2,-3)$

Verifica: $\langle \hat{v}_3, \hat{v}_1 \rangle = \langle \hat{v}_3, \hat{v}_2 \rangle = 0$ ☺

Una possibile base ortogonale è $(1,0,1), (-1,3,1), (3,2,-3)$

Oss. Potevo produrre $\hat{v}_3$ anche usando la formula misteriosa a partire da v_1, v_2 oppure $\hat{v}_1, \hat{v}_2$.

Esercizio Sia

$$W = \{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+2y-3w=0 \}$$

Trovare una base ortonormale di W

Intanto $\dim(W) = 3$ e una possibile base è

$$W = \mathrm{Span}\big(\underset{v_1}{(-2,1,0,0)}, \underset{v_2}{(0,0,1,0)}, \underset{v_3}{(+3,0,0,1)}\big)$$

$$\boxed{x} + \underset{\uparrow}{2y} + \underset{\uparrow}{0 \cdot z} - \underset{\uparrow}{3w} = 0 \qquad w=t,\ z=s,\ y=u$$

parametri liberi

$$x = 3t - 2u$$

$$(x,y,z,w) = (3t-2u, u, s, t)$$
$$= t(3,0,0,1) + s(0,0,1,0) + u(-2,1,0,0)$$

Ora applico GS a partire dalla base v_1, v_2, v_3

$$\hat{v}_1 = v_1$$

$$\hat{v}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, \hat{v}_1 \rangle}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle} \hat{v}_1 = v_2$$

Potrei produrre $\hat{v}_3$ cercando bovinamente un vettore (a,b,c,d) che sia $\perp$ a v_1 e v_2 e appartenga al s.sp. W.

In alternativa usiamo GS

$$\hat{v}_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_1 \rangle}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle} \hat{v}_1 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_2 \rangle}{\langle \hat{v}_2, \hat{v}_2 \rangle} \hat{v}_2$$

$$= (3,0,0,1) - \frac{-6}{5}(-2,1,0,0) - \frac{0}{\cdots} v_3$$

$$= (3,0,0,1) + \frac{6}{5}(-2,1,0,0) = \left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 0, 1\right)$$

Non volendo le frazioni: $\hat{v}_3 = (3,6,0,5)$

Verifica che $\hat{v}_3 \in W$ e che $\langle \hat{v}_3, \hat{v}_2 \rangle = \langle \hat{v}_3, \hat{v}_1 \rangle = 0$ ☺

Variante: trovare $\hat{v}_4$ tale che $\{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \hat{v}_4\}$ sia base ortogonale di $\mathbb{R}^4$.

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Bovino: lo cerco del tipo (a,b,c,d) e impongo che il prod. scalare con i 3 precedenti faccia 0.

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Usiamo la formula ex-misteriosa in $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (1, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cambio segno}}}{2}, 0, -3)$$

Verifica ok ☺

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ Completo $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3$ ad una base di $\mathbb{R}^4$ aggiungendo un vettore a caso, ad esempio $(1,0,0,0)$ e controllo che sia davvero una base con il Det 4×4.
(Non può andare male con TUTTI i vettori della base canonica)

A questo punto applico GS a partire dalla nuova base.
I primi 3 già andavano bene, e non resta che fare il quarto

$$\hat{v}_4 = (1,0,0,0) - \frac{-2}{5}(-2,1,0,0) - 0 \cdot \ldots - \frac{3}{70}(3,6,0,5)$$

$$= (1,0,0,0) + \left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0, 0\right) + \left(-\frac{9}{70}, -\frac{18}{70}, 0, -\frac{15}{70}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{14}, \frac{1}{7}, 0, -\frac{3}{14}\right)$$

[Conto finale corretto dopo video]

e senza frazioni $(1, 2, 0, -3)$ ☺

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 33

Note Title 07/11/2023

ORTOGONALE DI UN SOTTOSPAZIO
PROIEZIONI ORTOGONALI

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio

Si definisce

$$V^\perp = \{ w \in \mathbb{R}^n : \langle v, w \rangle = 0 \ \forall v \in V \}$$

= i vettori che sono $\perp$ ad ogni vettore di V

Allora si verifica che $V^\perp$ è un s.sp. di $\mathbb{R}^n$ e

$$V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n$$

A questo punto ogni vettore $x \in \mathbb{R}^d$ si scrive in modo unico come

$$x = \underbrace{v}_{\substack{\text{proiezione} \\ \text{ortogonale di} \\ x \text{ su } v}} + \underbrace{w}_{\substack{\text{proiezione ortogonale} \\ \text{di } x \text{ su } V^\perp}} \quad \text{con } v \in V \text{ e } w \in V^\perp$$

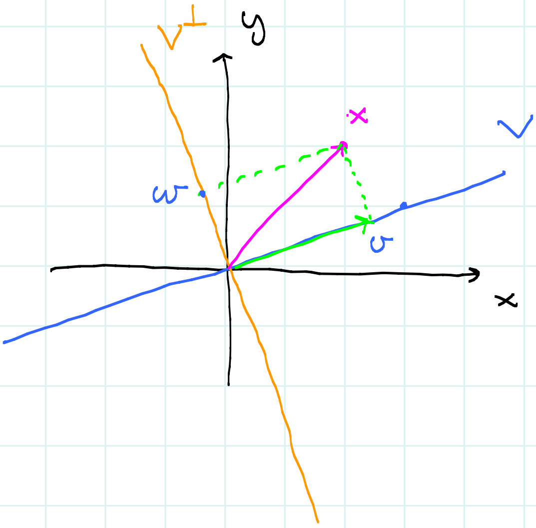
Esempio 1 $\mathbb{R}^2$ e consideriamo $V = \mathrm{Span}((3,1))$

Chi è $V^\perp$ e chi sono le proiezioni

V = retta $y = \frac{x}{3}$

$V^\perp$ = retta $y = -3x$

$= \mathrm{Span}((-1,3))$



Domanda: dato $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, come trovo le sue componenti rispetto a V e $V^\perp$?

$\boxed{\text{Bovino}}$ $$(x,y) = \underbrace{a\,(3,1)}_{\substack{\uparrow \\ V}} + \underbrace{b\,(-1,3)}_{\substack{\uparrow \\ V^\perp}}$$

In realtà, essendo $(3,1)$ e $(-1,3)$ una base ortogonale, già sappiamo che

$$a = \frac{\langle (x,y),(3,1)\rangle}{\langle (3,1),(3,1)\rangle} = \frac{3x+y}{10} \qquad b = \frac{-x+3y}{10}$$

La componente rispetto a V è data dalla formula

$$\frac{3x+y}{10}(3,1) = \left(\frac{9x+3y}{10}, \frac{3x+y}{10}\right)$$
$$= \boxed{\begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matrice che rappresenta la proiezione ortogonale su V

Quella su $V^\perp$ la posso ricavare o allo stesso modo, o imponendo che la somma sia l'identità, quindi diventa

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \leftarrow \text{proiezione ortogonale su } V^\perp$$

<u>Esempio nell'esempio</u> Prendiamo $(x,y) = (2,-5)$

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{10} \\ -\frac{51}{10} \end{pmatrix}$$

Cosa succede? La somma dei 2 è $(2,-5)$

Il primo sta in V

Il secondo sta in $V^\perp$

Oss. Se prendiamo la prima matrice $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

abbiamo che $\mathrm{Im} = \underset{\overset{\shortparallel}{V}}{\mathrm{Span}((3,1))}$ e $\ker = \underset{\overset{\shortparallel}{V^\perp}}{\mathrm{Span}((-1,3))}$

Discorso opposto per l'altra matrice.

Esempio 2 $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 4z = 0\}$

Trovare $V^\perp$ e le matrici di proiezione ortogonale

$V = \mathrm{Span}((1,1,0),(4,0,-1))$ PIANO

$V^\perp = \mathrm{Span}((1,-1,4))$ RETTA

↑ Vettore ⊥ ai due precedenti

Ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ è somma (in modo unico) di un $v \in V$ e di un $w \in V^\perp$. Come li trovo?

In teoria, per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ dovrei risolvere

$$(x,y,z) = \underbrace{a(1,1,0) + b(4,0,-1)}_{\in V} + \underbrace{c(1,-1,4)}_{\in V^\perp}$$

Se la base fosse ortogonale, sarebbe + comodo risolvere!

Conviene usare base ortogonale di V. Come me la procuro?

$\boxed{1° \text{ modo}}$: GS a partire da (1,1,0) e (4,0,-1)

$\boxed{2° \text{ modo}}$: ex-misteriosa a partire da (1,1,0) e (1,-1,4)

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (4,-4,-2) \rightsquigarrow (2,-2,-1)$$

e quindi ora risolviamo

$$(x,y,z) = a(1,1,0) + b(2,-2,-1) + c(1,-1,4)$$

Se voglio la proiezione su $V^\perp$ mi basta calcolare c

$$c = \frac{x-y+4z}{18}$$

e quindi $pr_{V^\perp}(x,y,z) = \frac{1}{18}(x-y+4z, -x+y-4z, 4x-4y+16z)$

La matrice è $\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 16 \end{pmatrix} = pr_{V^\perp}$

La pr_V è la matrice che sommata a questa fa venire Id.

Esempio 3 $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \underbrace{x+y = z-w = 0}_{\text{Vuol dire}}\}$

$x+y=0$
$z-w=0$

$\dim(V) = 2$ $V = \text{Span}((\underset{\uparrow}{1,-1,0,0}), (\underset{\uparrow}{0,0,1,1}))$

base ortogonale di V

$\dim(V^\perp) = 2$ per Grassmann. Serve una base.

$V^\perp = \text{Span}((1,1,0,0),(0,0,1,-1))$ ← se non si vede ad occhio basta imporre prod. scalare nullo con la base scelta di V

Matrice di proiezione su V

$$(x,y,z,w) = \underbrace{a(1,-1,0,0) + b(0,0,1,1)}_{\text{proiezione su } V} + c \ldots + d \ldots$$

Essendo una base ortogonale

$$a = \frac{x-y}{2} \qquad b = \frac{z+w}{2}$$

Quindi

Proiezione su $V = \frac{1}{2}(x-y, -x+y, z+w, z+w)$

e quindi la matrice è

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{proiezione su } V$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{proiezione su } V^\perp$$

Se dò in pasto alle matrici un qualunque vettore (x, y, z, w) ottengo due vettori, uno in V e uno in $V^\perp$, che sommati danno (x, y, z, w).

— ○ — ○ —

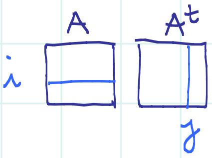
ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 34

Note Title 10/11/2023

MATRICI ORTOGONALI

Teorema Sia A una matrice $n \times n$ (quadrata).
Allora i seguenti 3 fatti sono equivalenti.
(1) Le righe di A sono ortonormali ($\langle R_i, R_j \rangle = 0$ se $i \neq j$ e 1 se $i = j$)
(2) Le colonne di A sono ortonormali (stessa cosa con le colonne)
(3) $A^{-1} = A^t$ (cioè $AA^t = A^tA = Id$)

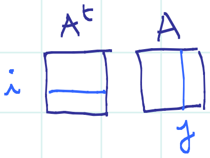
Idea della dim. $A \cdot A^t$ chi sta in posizione i,j



Ora la colonna j di A^t è la riga j di A. Quindi l'elemento richiesto è $\langle R_i, R_j \rangle$

Questo dimostra che Righe ortonormali $\Leftrightarrow$ $A \cdot A^t = Id$

Allo stesso modo prendiamo $A^t \cdot A$



Riga i-esima di A^t = colonna j-esima di A.
Quindi nel prod. l'el. in posizione i,j è
$\langle C_i, C_j \rangle$

Questo dimostra che Colonne ortonormali $\Leftrightarrow$ $A^t \cdot A = Id$

— o — o —

Def Una matrice si dice ortogonale se e solo se verifica uno qualunque delle tre proprietà sopra (e quindi le verifica tutte)

— o — o —

Esempio
$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = A \qquad A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = A^t$$

Proprietà matrici ortogonali

① Se A e B sono ortogonali, allora AB è ortogonale

Dim $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^tA^t = (AB)^t$

volendo si può anche verificare che

$$(AB)^t(AB) = B^t\underbrace{A^tA}_{Id}B = B^tB = Id$$

② Se A è ortogonale allora $Det(A) = \pm 1$

$\boxed{\text{Dim}}$ $1 = Det(Id) = Det(AA^t) \underset{\uparrow\ \text{Binet}}{=} Det(A)\cdot Det(A^t) \underset{\uparrow\ Det(A)=Det(A^t)}{=} Det(A)^2$

$\rightsquigarrow Det(A) = \pm 1$

③ Se A è ortogonale, allora A^t e A^{-1} sono ortogonali (e coincidono)

$\boxed{\text{Dim}}$ $A^t\cdot(A^t)^t = A^t\cdot A = Id$ ☺

(2bis) Somma / Differenza di matrici ortogonali non sono necessariamente ortogonali

$$\underset{\uparrow\ \text{ortog}}{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}} = A \qquad \underset{\uparrow\ \text{ortog.}}{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}} = B \qquad A+B = \underset{\uparrow\ \text{No ortog.}}{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}$$

④ Se A è ortogonale, allora λA è ortogonale se e solo se $\lambda = \pm 1$

$\boxed{\text{Dim}}$ Basta osservare che le righe vengono moltiplicate per λ e

$$\langle \lambda R_i, \lambda R_j \rangle = \lambda^2 \langle R_i, R_j \rangle$$

e considerare $i = j$.

Esercizio Come sono fatte tutte le 2×2 ortogonali?

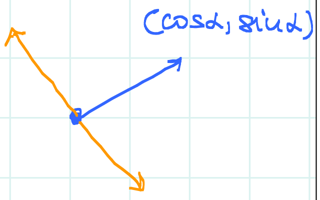
La prima riga è un vettore lungo 2 di norma 1, quindi si scrive come $(\cos\alpha, \sin\alpha)$

La seconda riga deve essere di norma 1 e ⊥ alla precedente

Le possibilità sono

$(\sin\alpha, -\cos\alpha)$ oppure $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$

Quindi restano due tipi di matrici



$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Det $= -1$ Det $= +1$

SIMMETRIA ROTAZIONE

Esercizio Scriviamo una 3×3 ortogonale non banale

Partiamo con $v_1 = (2,3,1)$ (a caso)

Prendiamo $v_2 \perp v_1$ $v_2 = (4,5,-23)$

Troviamo un $v_3 \perp$ ad entrambi

(metodo a scelta tra: bovino, formula ex-misteriosa, completo la base con vettore a caso e faccio G.S.)

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -23 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-74, +50, -2) \rightsquigarrow (-37, 25, -1) = v_3$$

Basta dividere ognuno per la radice della sua norma e abbiamo una matrice ortogonale

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{4}{\sqrt{570}} & \frac{5}{\sqrt{570}} & \frac{-23}{\sqrt{570}} \\ \frac{-37}{\sqrt{\cdots}} & \frac{25}{\sqrt{\cdots}} & \frac{-1}{\sqrt{\cdots}} \end{pmatrix} = A \quad \text{e} \quad A^{-1} = A^t$$

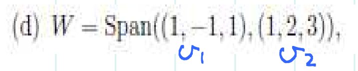
Consideriamo ora

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -23 \\ -37 & 25 & -1 \end{pmatrix} = B$$

Ora

$$BB^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -23 \\ -37 & 25 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & -37 \\ 3 & 5 & 25 \\ 1 & -23 & -1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{divido per 14} \quad \text{divido per 570} \quad \text{divido per...} \\ \text{Se faccio così ottengo } B^{-1}}} = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 570 & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

Esercizio



(d) $W = \operatorname{Span}((1,-1,1),(1,2,3))$,

v_1 v_2

Scrivere la matrice di proiezione ORTOGONALE su W.

$$\begin{matrix} * & * & * \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \rightsquigarrow (-5,-2,3) = v_3 \quad (\text{quindi } W^\perp = \operatorname{Span}(v_3))$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{cambio base da } \{v_1, v_2, v_3\} \to \text{Canonica}$$

La matrice richiesta è $M \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Matrice di proiezione} \\ \text{su W scritta nella base strana}}} M^{-1}$

Non resta che calcolare M^{-1}

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}} \underset{M^t}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & -2 & 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 19 \end{pmatrix} \rightsquigarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{27} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{19} \\ \frac{1}{27} & \frac{2}{9} & \frac{3}{19} \\ -\frac{5}{27} & -\frac{2}{9} & \frac{3}{19} \end{pmatrix}$$

* * *

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 35

Note Title 10/11/2023

FORME CANONICHE

Domanda: data $f: V \to W$ lineare, voglio scegliere basi di V e W in modo tale che la matrice associata ad f sia "bella"

Risposta: posso sempre fare in modo che la matrice sia fatta così

$$\begin{array}{c|c|c} & r & k \\ \hline r & I_r & 0 \\ \hline & 0 & 0 \end{array}$$

con r = rango = dim (Im)

k = dim (ker)

Esempio $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z,w) = (x+y+z,\ z+w,\ x+y-w)$$

→ Scriviamo la matrice di f dalla canonica alla canonica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

→ Qual è il rango? [Non basta un 3×3 con Det = 0 per avere rango ≤ 2]

Osservo che $R_1 - R_2 = R_3 \rightsquigarrow$ rango $\leq 2 \rightsquigarrow$ rango $= 2$

→ Trovare il ker

Risolvo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \textcircled{1} & \overset{\downarrow}{1} & 1 & \overset{\downarrow}{0} \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$w = t,\ z = -t,\ y = s,\ x = t - s$

$$(x,y,z,w) = t(1,0,-1,1) + s(-1,1,0,0)$$

$\rightsquigarrow$ ker = Span $((1,0,-1,1), (-1,1,0,0))$

→ Forma canonica: scegliendo bene le basi, la matrice diventa

$$\begin{array}{c} w_1 \to \\ w_2 \to \\ w_3 \to \\ \\ \end{array}\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) & f(v_4) \end{array}\end{array}$$

Come scelgo le basi?

1° passo Scelgo come v_3 e v_4 una base del ker

$v_3 = (1,0,-1,1)$ $\quad v_4 = (-1,1,0,0)$

2° passo Scelgo v_1 e v_2 qualunque in modo che $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ siano una base di $\mathbb{R}^4$

Proviamo con $v_1 = (1,0,0,0)$ e $v_2 = (0,0,0,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{Det} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \neq 0$ ☺

3° passo Scelgo $w_1 = f(v_1) = (1,0,1)$

$w_2 = f(v_2) = (0,1,-1)$

Questo è obbligato da come è fatta la matrice

4° passo Come w_3 scelgo un vettore qualunque che completi w_1, w_2 ad una base di $\mathbb{R}^3$.

Proviamo con $(0,1,0) = w_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{Det} \neq 0$ quindi Ok ☺

La verifica da fare sarebbe che

$$\overset{(N_A)^{-1}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}} \overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \overset{M_A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Forma canonica}} = C$$

↑ Dalla canonica alla $\{w_1, w_2, w_3\}$

↑ f dalla canonica alla canonica

↑ Dalla $\{v_1, v_2 \dots\}$ alla canonica

f dalla $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ alla $\{w_1, w_2, w_3\}$

Domanda: scegliendo diversamente le basi, la matrice può diventare

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \quad ?$$

Risposta: la matrice può diventare ogni matrice di rango 2 !!

[NB: la matrice scritta ha Rango = 2 perché $R_1 + R_3 = 2R_2$]

Proviamo con

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \text{Rango} = 2$$

Per la teoria delle forme canoniche noi sappiamo che

$$N_A^{-1} A M_A = C$$

Analogamente sappiamo che

$$N_B^{-1} B M_B = C$$

Ma allora

$$B = N_B C M_B^{-1} = N_B (N_A)^{-1} A M_A M_B^{-1} = \overset{\substack{\text{cambio} \\ \text{in } \mathbb{R}^3 \\ \uparrow}}{(N_A N_B^{-1})^{-1}} A \overbrace{(M_A M_B^{-1})}^{\substack{\text{cambio di} \\ \text{variabili in} \\ \uparrow\ \mathbb{R}^4}}$$

Lavoriamo su B.

$\boxed{1^\circ \text{ passo}}$ v_3, v_4 = base di ker = $\{\underset{v_3}{(1,0,-1,0)}, \underset{v_4}{(0,1,0,-1)}\}$

$\boxed{2^\circ \text{ passo}}$ Completo con $v_1 = (1,0,0,0)$ $v_2 = (0,1,0,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{Det} = 1 \neq 0 \quad ☺$$

$\boxed{3^\circ \text{ passo}}$ $w_1 = f(v_1) = (1,0,1)$

$w_2 = f(v_2) = (0,1,0)$

$\boxed{4^\circ \text{ passo}}$ Scelgo $w_3 = (1,0,0)$

La verifica sarebbe che

$$\underset{N_B^{-1}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}} \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \underset{M_B}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} = \underset{C}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Verificare che se uso $M = M_A \cdot M_B^{-1}$

$N = N_A \cdot N_B^{-1}$,

allora

$$\boxed{N^{-1} A M = B}$$

A quel p.to le colonne di M ed N sono basi di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^4$ in cui l'applicazione f ha come matrice associata B.

Concludere con verifica bovina

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 36

Note Title 14/11/2023

FORME CANONICHE

Introduzione motivazionale

Esempio $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ → Calcolare A^{2023}

→ Trovare matrice B t.c. $B^{100} = A$.

Serve un'idea. Supponiamo che esista una matrice 2x2 M tale che

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Facendo le successive potenze

$$M^{-1}A\underbrace{M \cdot M^{-1}}_{Id}AM = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= M^{-1}A^2M$$

Moltiplico nuovamente

$$M^{-1}A\underbrace{M \cdot M^{-1}}AM \cdot \underbrace{M^{-1}}AM = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 125 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1}A^3M$$

Allo stesso modo $M^{-1} A^{2023} M = \begin{pmatrix} 5^{2023} & 0 \\ 0 & 2^{2023} \end{pmatrix}$

e da qui è immediato calcolare A^{2023} se conosco M.

Oss. Il passaggio da A a $M^{-1}AM$ è un cambio di base in partenza ed arrivo (stessa base in partenza ed arrivo).

<u>Domanda</u>: data $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ esiste una base in cui la relativa applicazione lineare ha come matrice $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Indichiamo con $\{v_1, v_2\}$ questa base. Deve succedere che

$f(v_1) = 5v_1$

$f(v_2) = 2v_2$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) \end{matrix} & \end{array}$$

Cerco v_1 e v_2 bovinamente.

$v_1 = (a,b)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a \\ 5b \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 4a+2b = 5a \\ a+3b = 5b \end{cases} \qquad \begin{cases} -a+2b=0 \\ a-2b=0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ v_1}}{(a,b)} = (2,1) \text{ e multipli}$$

$v_2 = (c,d)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ 2d \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 4c+2d = 2c \\ c+3d = 2d \end{cases}$$

$$\begin{cases} c+d=0 \\ c+d=0 \end{cases} \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ v_2}}{(c,d)} = (1,-1) \text{ e multipli}$$

$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ← Dalla strana alla canonica $\qquad M^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Ora sappiamo rispondere alle domande $\quad M^{-1}AM = \overset{\substack{\text{diagonale} \\ \downarrow}}{D}$

Quindi $\quad M^{-1}A^{2023}M = D^{2023} \rightsquigarrow A^{2023} = MD^{2023}M^{-1}$

Cercavo anche B t.c. $B^{100} = A$ [Brutalmente $B = \sqrt[100]{A}$]

Succederà che $M^{-1} B M = \sqrt[100]{D} = \begin{pmatrix} \sqrt[100]{5} & 0 \\ 0 & \sqrt[100]{2} \end{pmatrix}$

e quindi $B = M \begin{pmatrix} \sqrt[100]{5} & 0 \\ 0 & \sqrt[100]{2} \end{pmatrix} M^{-1}$

A questo punto basta verificare che $B^{100} = A$

— o — o —

Slogan: le matrici diagonali, o in generale quelle piene di zeri, sono comode. Quindi è importante trovare un cambio di base in cui diventano così.
Il cambio di base deve essere lo stesso in partenza ed arrivo

— o — o —

Def. Sia A una matrice $n \times n$.

- Un numero λ si dice AUTOVALORE di A se esiste un vettore $\boxed{v \neq 0}$ t.c. $\boxed{Av = \lambda v}$
- Un vettore $v \neq 0$ si dice AUTOVETTORE di A se esiste λ numero t.c. $Av = \lambda v$
- Dato un autovalore λ, si dice AUTOSPAZIO di λ l'insieme di tutti i vettori v, compreso lo 0, t.c. $Av = \lambda v$

Oss. Le stesse definizioni le posso dare per una applicazione lineare $f : V \to V$ (stesso spazio in partenza ed arrivo)

Nell'esempio precedente:

→ 5 era autovalore, $v_1 = (2,1)$ era un autovettore relativo a $\lambda = 5$, e l'autospazio di 5 era Span (v_1)

→ 2 era autovalore, con autovettore $v_2 = (1,-1)$ e autospazio Span (v_2).

Morale: → gli autovalori sono quelli che finiscono sulla diagonale
→ gli autovettori li uso come colonne della M.

Come trovo gli autovalori ?

Deve succedere che $Av = \lambda v$ ha una soluzione $v \neq 0$, cioè $Av - \lambda v = 0$, cioè $(A - \lambda Id)v = 0$ ha una sol. $v \neq 0$, cioè $v \in \ker(A - \lambda Id)$ il che è possibile se e solo se

$$\boxed{Det\,(A - \lambda Id) = 0}$$

Tornando all'esempio $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$Det = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 12 - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

cioè

$$(\lambda - 5)(\lambda - 2) = 0 \qquad \lambda = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases} \qquad ☺$$

<u>Oss</u>. Le radici non sono necessariamente numeri reali.
Possono essere numeri complessi e possono avere molteplicità (radici doppie, triple, ...)

<u>Def</u>. Il $Det\,(A - \lambda Id)$ è un polinomio in λ di grado n se A è una matrice $n \times n$.
Si chiama $\boxed{\text{polinomio caratteristico}}$

<u>Def</u>. Due matrici $n \times n$, chiamiamole A e B, sono $\boxed{\text{SIMILI}}$ se esiste M invertibile t.c. $B = M^{-1}AM$.

[Moralmente: stessa applicazione in basi diverse]

Teoria delle forme canoniche:

Data una matrice A, trovare una matrice B che sia simile ad A e il più semplice possibile

Le possibilità sono

- → diagonalizzare sui reali o sui complessi
- → diagonalizzazione di LUSSO: diagonalizzare con matrice M ortogonale (quindi inversa comodissima)
- → JORDAN reale o complesso (solo roba sulla diagonale e qualche 1 immediatamente sopra o sotto)

Teorema misterioso Sia p(x) un polinomio di grado n a coeff. complessi (se sono reali ancora meglio) MONICO (il coeff. di x^n è 1)

Allora p(x) si scrive come

$$p(x) = (x-\lambda_1)\cdot(x-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_n)$$

dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono le radici di p(x) (eventualmente complesse ed eventualmente ripetute).

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 37

Note Title 14/11/2023

Relazioni radici - coefficienti

Setting: $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

polinomio monico a coeff. complessi (se sono reali, ancora meglio)

Per il teorema misterioso $p(x) = (x-\lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_n)$ dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono le radici.

Allora $\boxed{\lambda_1 + \dots + \lambda_n = -a_{n-1}}$ $\boxed{\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = (-1)^n a_0}$

Esempio n=2

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2) = x^2 \underbrace{-(\lambda_1+\lambda_2)}_{\substack{\downarrow \\ \text{coeff. di } x}} x + \underbrace{\lambda_1\lambda_2}_{\text{termine noto}}$$

Esempio n=3

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3) =$$
$$x^3 \underbrace{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}_{\substack{\downarrow \\ \text{coeff. di } x^2}} x^2 + (\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)x \underbrace{-\lambda_1\lambda_2\lambda_3}_{\text{termine noto}}$$

MATRICI SIMILI Siano A e B due matrici simili.

Allora A e B hanno
- → Stesso pol. caratteristico
- → Stessi autovalori
- → Stesso Determinante
- → Stessa traccia (somma degli elementi sulla diagonale)

Dim Sappiamo che $B = M^{-1}AM$ con M invertibile

$$\text{Det}(B) = \text{Det}(M^{-1}AM) = \text{Det}(M^{-1}) \cdot \text{Det}(A) \cdot \cancel{\text{Det}(M)} = \text{Det}(A)$$
$$\text{Det}(M^{-1}) = \frac{1}{\cancel{\text{Det}(M)}}$$

Vediamo il polinomio caratteristico

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{pol. caratt.} \\ \text{di } B}}{P_B(\lambda)} = \text{Det}\,(B-\lambda Id)$$

$B = M^{-1}AM \nearrow$

$$= \text{Det}\,(M^{-1}AM - \lambda Id)$$

$Id = M^{-1}M \nearrow$

$$= \text{Det}\,(M^{-1}AM - \lambda M^{-1} Id\, M)$$

raccolgo $\nearrow$

$$= \text{Det}\,[M^{-1}(A-\lambda Id)M]$$

BINET $\nearrow$

$$= \underset{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{\text{Det}\,(M)}}}{\cancel{\text{Det}\,(M^{-1})}} \cdot \text{Det}\,(A-\lambda Id) \cdot \cancel{\text{Det}\,M}$$

$$= \text{Det}\,(A-\lambda Id) = P_A(\lambda)$$

Avendo A e B lo stesso pol. caratteristico, per forza hanno gli stessi autovalori.

<u>Oss.</u> $P_A(0) = \text{Det}\,(A - 0\,Id) = \text{Det}\,(A)$

$\shortparallel$

termine noto del polinomio caratteristico

$\shortparallel$

prodotto autovalori (il segno si aggiusta perché per n dispari il pol. caratteristico inizia con $-\lambda^n$)

In generale

→ prodotto autovalori = termine noto del pol. caratt.

= Det della matrice

→ somma autovalori = Traccia della matrice.

Esempio $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \text{Det} = 10 = \lambda_1 \lambda_2 \\ \text{Tr} = 7 = \lambda_1 + \lambda_2 \end{matrix} \rightsquigarrow 2, 5$

$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ anche questa ha autovalori 2, 5 (gli autovettori saranno diversi)

Def Sia λ un autovalore di una matrice A. Si definisce

- molteplicità algebrica, e si indica con $m_a(\lambda)$, la molteplicità di λ come radice del pol. caratteristico, cioè il numero di volte che $(x-\lambda)$ compare nella scomposizione di $p_A(\lambda)$
- molteplicità geometrica, e si indica con $m_g(\lambda)$, la dimensione dell'autospazio di λ, cioè

$$m_g(\lambda) = \text{Dim}(\text{Ker}(A - \lambda \text{Id}))$$

Teorema Sia A una matrice $n \times n$.
Allora A è diagonalizzabile se e solo se

$$m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$$

per ogni autovalore λ

(la diagonalizzazione può essere reale o complessa a seconda di dove stanno gli autovalori)

In generale vale solo che

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

Caso speciale Se tutti gli autovalori hanno $m_a(\lambda) = 1$, cioè se $p_A(\lambda)$ ha tutte le radici distinte, allora A è diagonalizzabile per forza (eventualmente su $\mathbb{C}$ se ci sono autovalori davvero complessi).

Esercizio 1

$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\\sqrt{3}&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&2\\1&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&2\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10&18\\-4&-7\end{pmatrix}$
Tr = 3	Tr = 3	Tr = 3	Tr = 2	Tr = 3	Tr = 3
Det = 2	Det = 2	Det = 2	Det = −5	Det = 2	Det = 2
			↑ Intrusa		

Tutte le altre hanno autovalori $\lambda=1$ e $\lambda=2$, quindi sono diagonalizzabili sui reali e sono simili alla $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$

Per esercizio diagonalizziamo l'ultima, cioè troviamo M t.c.

$$M^{-1}\begin{pmatrix}10&18\\-4&-7\end{pmatrix}M=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$$

Le colonne di M sono gli autovettori

$\boxed{\lambda=1}$ $\boxed{\text{Bovino}}$ $v=(a,b)$

$$\begin{pmatrix}10&18\\-4&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}10a+18b=a\\-4a-7b=b\end{cases} \qquad \begin{cases}9a+18b=0\\-4a-8b=0\end{cases}$$

$\rightsquigarrow a+2b=0$ $\qquad v=(2,-1)$ $\qquad$ Autosp $=$ Span $((2,-1))$

$\boxed{\text{Leggermente meno bovino}}$ Cerco ker $(A-1\cdot Id)$

$$\ker\begin{pmatrix}9&18\\-4&-8\end{pmatrix}=\text{Span}((-2,1))$$

$\boxed{\lambda=2}$ Meno bovino

$$A-2Id=\begin{pmatrix}8&18\\-4&-9\end{pmatrix} \qquad \ker=\text{Span}((9,-4))$$

Conclusione $\quad M=\begin{pmatrix}2&9\\-1&-4\end{pmatrix} \qquad M^{-1}=\begin{pmatrix}-4&-9\\1&2\end{pmatrix}$

Verifica: $\begin{pmatrix}-4&-9\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10&18\\-4&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&9\\-1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$

	$\begin{pmatrix}0&5\\1&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&5\\-2&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-2\\1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&-5\\1&0\end{pmatrix}$
TR	4	4	4	4	4	4
DET	−5	+5	5	5	5	5
	↑					

Tr = 4 Det = 5 ⇝ pol. caratt. = $x^2-4x+5=0$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$$

Tutte le matrici tranne la prima sono simili a $\begin{pmatrix}2+i&0\\0&2-i\end{pmatrix}$ e quindi NON sono diagonalizzabili sui reali

La prima ha pol. caratt. = $x^2-4x-5 = (x-5)(x+1)=0$ quindi ha autovalori $\lambda=-1$ e $\lambda=5$, quindi è simile a

$$\begin{pmatrix}-1&0\\0&5\end{pmatrix}$$

Per esercizio calcolare la M di passaggio

* * *

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 38

Note Title 14/11/2023

Diagonalizzare $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{C}$

Tr = 4 Det = 5 $\rightsquigarrow$ $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$ $2 \pm i$ autovalori

$$\boxed{\lambda = 2+i} \quad \ker \begin{pmatrix} -1-i & -2 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix} = \text{Span}\left((\underset{\substack{\uparrow \\ \text{autovettore di } 2+i}}{1-i, -1}) \right)$$

Bovino $\begin{pmatrix} -1-i & -2 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} (-1-i)\, a - 2b = 0 \\ a + (1-i)\, b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} +(+1+i)(1-i)\, b - 2b = 0 \\ a = -(1-i)\, b \end{cases} \qquad 2b - 2b = 0$$

$$\boxed{\lambda = 2-i} \quad \ker \begin{pmatrix} -1+i & -2 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} = \text{Span}\left((\underset{\substack{\uparrow \\ \text{autovettore di } 2-i}}{1+i, -1}) \right)$$

$$M = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Verifica per esercizio

— o — o —

	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$
TR	4	4	4	4	4	4
Det	4	4	4	4	4	4

Tutte hanno pol. caratteristico $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$

Tutte hanno

$\lambda = 2$ come unico autovalore di molt. alg. $= 2$

Calcoliamo nei vari casi $m_g(2)$ (può essere 1 o 2)

Quindi sottraggo 2 Id e calcolo Dim(ker)

$$\begin{array}{cccccc} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \\ m_g = 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ & & & & \uparrow\uparrow & \end{array}$$

La quinta è l'unica diagonalizzabile, le altre NON lo sono nè su $\mathbb{R}$ nè su $\mathbb{C}$

— ○ — ○ —

$$\begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ & & & \uparrow \text{ intrusa} \end{array}$$

$\boxed{\text{Fatto generale utile}}$ Se una matrice A è triangolare inferiore o superiore, allora gli autovalori sono i tizi sulla diagonale

Nel caso della terza il pol. caratt. è

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & -2-\lambda & 0 \\ 5 & 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Det} = (1-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$$\lambda = 1, -2, 3$$

Per esercizio diagonalizziamo la 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\lambda = 1} \qquad \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \text{Span}$$

$$\begin{cases} 2a - b = 0 \\ 5a + 4b + 2c = 0 \end{cases} \qquad a = 1 \quad b = 2 \quad 2c = -5a - 4b = -13 \rightsquigarrow c = -\frac{13}{2}$$

$$\left(1, 2, -\frac{13}{2}\right) \rightsquigarrow (2, 4, -13) \rightsquigarrow v_1$$

$$\boxed{\lambda = -2} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \ker = \text{Span}((0, 5, -4)) \rightsquigarrow v_2$$

$\boxed{\lambda=3}$ $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ ker = Span((0,0,1)) ⇝ v_3

Quindi $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -13 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

Verifica: $M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ⇝ Devo fare M^{-1}

Verifica soft: $AM = MD$

— o — o —

Trovare la forma canonica di $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

Risposta: $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Det = 0 (ci sono due righe uguali!)
Quindi un autovalore è 0.
Tr = 8, quindi l'altro è 8
Due autovalori diversi ⇒ diagonalizzabile

$\boxed{\lambda=0}$ Autovettore: (1,−1)
$\boxed{\lambda=8}$ Autovettore: (1, 1)

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

— o — o —

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

↑ autov: 1, 1, 2   ↑ autov: 1, 1, 2   ↑ autov: 1, 1, 2   ↑ autov 1, 1, 2

Per la terza facciamo il conto $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Laplace} \\ 1^a \text{ colonna}}}{\text{Det} =} \quad (2-\lambda)[(2-\lambda)(-\lambda)-1]$$

$$= (2-\lambda)(-2\lambda+\lambda^2+1)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda-1)^2$$

Autovalori sono 1, 1, 2

In tutti i casi $\lambda = 1$ con $m_a(1) = 2$ $\qquad m_g(1) = ?$

$\lambda = 2$ con $m_a(2) = m_g(2) = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$m_g = 1 \qquad m_g = 2 \qquad m_g = 1 \qquad m_g = 1 \qquad m_g = 1$

↑ ↑

l'unica diagonalizzabile

Diagonalizziamo la seconda

$\boxed{\lambda = 1}$ Autospazio = Span((1,0,0),(0,1,0))

$\boxed{\lambda = 2}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Autospazio = Span((1,0,1))

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⇝ verifiche!

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 39

Note Title 21/11/2023

FORMA CANONICA DI JORDAN

Blocco di JORDAN Matrice quadrata con
- → tutti λ sulla diagonale (λ può essere anche 0 o 1)
- → tutti 1 sopra la diagonale
- → tutto il resto sono zeri

$$\begin{array}{|c|}\hline \lambda \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|cc|}\hline \lambda & 1 \\ & \lambda \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|ccc|}\hline \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|cccc|}\hline \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \\ \hline\end{array}$$

Matrice di JORDAN Matrice ottenuta mettendo "lungo la diagonale" dei blocchi di Jordan, con λ uguali o diversi

$$\begin{array}{ccc} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 3 & 1 & & \\ & 3 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \boxed{5} & & & \\ & 4 & 1 & \\ & & 4 & 1 \\ & & & 4 \end{array}$$

Oss. Una matrice diagonale è in particolare una matrice di Jordan
Il numero λ sulla diagonale può essere reale o complesso

Fatto importante: ogni matrice quadrata è simile ad una matrice di JORDAN

— o — o —

Riassunto su diagonalizzazione e Jordan

Due modi equivalenti di intendere il problema

→ Data una matrice quadrata A, trovare una matrice M invertibile tale che

$$\boxed{M^{-1} A M = C}$$

diagonale o JORDAN

→ Data $f : V \to V$ lineare, trovare una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V in cui la matrice associata a f sia la C.

— o — o —

① Una matrice A è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$ se e solo se tutti gli autovalori λ hanno

$$\boxed{m_g(\lambda) = m_a(\lambda)}$$

dim. autospazio = dim (Ker (A−λId))

esponente di (x−λ) nella fattorizzazione del pol. caratteristico

La condizione è verificata gratis se gli autovalori sono tutti distinti

② Una matrice A è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ se e solo se tutti gli autovalori λ sono reali e verificano $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$. Ancora una volta è gratis se sono reali e distinti

③ Una matrice A è diagonalizzabile mediante una M ortogonale (in termini di applicazioni lineari è come dire che la base è ortonormale) se e solo se A è SIMMETRICA, cioè $A^t = A$.

(Questo ci dice in particolare che le matrici simmetriche hanno tutti gli autovalori reali e con $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$)

Questo è il TEOREMA SPETTRALE

④ Una matrice A è jordanizzabile in $\mathbb{C}$ sempre. In tal caso

→ i λ che finiscono sulla diagonale sono gli autovalori contati secondo la loro molteplicità algebrica

→ il numero dei blocchi con un certo λ è $mg(\lambda)$

(ad esempio se $ma = 3$ e $mg = 1$ ⇝ 1 blocco da 3
$ma = 3$ e $mg = 2$ ⇝ 2 + 1)

→ in generale il numero di blocchi di grandezza $\geq k$ è dato dalla formula

$$\boxed{\dim\left(\ker(A-\lambda Id)^k\right) - \dim\left(\ker(A-\lambda Id)^{k-1}\right)}$$

⑤ Una matrice A è jordanizzabile in $\mathbb{R}$ se e solo se gli autovalori sono tutti reali

⑥ Se gli autovalori non sono tutti reali, ma i coeff. di A lo sono, esiste una forma di JORDAN reale che si ottiene da quella complessa con la procedura che andiamo a descrivere.

Oss. Se A è reale e $a+ib$ è autovalore di A, allora anche $a-ib$ è autovalore di A (gli autovalori arrivano a coppie)
Inoltre ad ogni blocco di Jordan con $a+ib$ ne corrisponde uno uguale con $a-ib$.

<u>Procedura</u>

$$\begin{array}{cc} \boxed{a+ib} & \\ & \boxed{a-ib} \end{array} \rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{cc} a & b \\ -b & a \end{array}}$$

$$\begin{array}{cc} \boxed{\begin{array}{cc} a+ib & 1 \\ & a+ib \end{array}} & \\ & \boxed{\begin{array}{cc} a-ib & 1 \\ & a-ib \end{array}} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cc} \boxed{\begin{array}{cc} a & b \\ -b & a \end{array}} & \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \\ & \boxed{\begin{array}{cc} a & b \\ -b & a \end{array}} \end{array}$$

Esempio di applicazione della procedura

$$\begin{pmatrix} \boxed{7} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2+3i} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2-3i} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} \boxed{7} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2+i & 1 & & & & \\ & 2+i & 1 & & & \\ & & 2+i & & & \\ & & & 2-i & 1 & \\ & & & & 2-i & 1 \\ & & & & & 2-i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 1 & 0 & & \\ -1 & 2 & 0 & 1 & & \\ & & 2 & 1 & 1 & 0 \\ & & -1 & 2 & 0 & 1 \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & -1 & 2 \end{array}$$

Anche la base di Jordan reale si ottiene prendendo parti reali e immaginarie di quella su $\mathbb{C}$

Stessa cosa per la M di passaggio.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 40

Note Title 21/11/2023

Trovare le forme canoniche

$$\underset{①}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{②}{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}} \quad \underset{③}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}} \quad \underset{④}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} \quad \underset{⑤}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

① $\mathrm{Tr} = 0 \quad \mathrm{Det} = 4 \rightsquigarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 + 4 = 0 \iff \lambda = \pm 2i$

Diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ $\begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$

Jordan reale $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Calcoliamo le M di passaggio su $\mathbb{C}$ e su $\mathbb{R}$

Su $\mathbb{C}$ le colonne di M sono gli autovettori

$$\ker(A - 2i\,\mathrm{Id}) = \ker\begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{pmatrix} = \mathrm{Span}((1, -2i))$$

Bovino: $\begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2ia - b \\ 4a - 2ib \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$b = -2i\,a \rightsquigarrow 4a - 2i(-2i)a = 4a - 4a = 0$ ☺

$$\ker(A + 2i\,\mathrm{Id}) = \ker\begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 4 & 2i \end{pmatrix} = \mathrm{Span}((1, 2i))$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2i & 2i \end{pmatrix}$$

Verifica: $M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$

↑ M che diagonalizza su $\mathbb{C}$

Consideriamo ora $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ↙ M che jordanizza su $\mathbb{R}$

parte reale e immaginaria delle 2 colonne della M complessa

$$M^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

② $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ Forma canonica $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$Tr = 4$ $Det = 0$

Le due righe sono DIPENDENTI $\rightsquigarrow$ rango $=1$ $\rightsquigarrow$ dim Ker $=1$ $\rightsquigarrow$ c'è l'autovalore 0 $\rightsquigarrow$ l'altro è per forza la traccia

$\boxed{\lambda=4}$ $\ker\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}((1,-1))$ $\quad 1 \cdot C_1 - 1 \cdot C_2 = 0$

$\boxed{\lambda=0}$ $\ker\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}((3,1))$ $\quad 3C_1 + 1 \cdot C_2 = 0$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ Verifica: $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ oppure

$AM = M\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $Tr = 4$ $Det = 4$ Autov: 2, 2

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2 \leftarrow \text{m.alg.}$$

$$\overset{\shortparallel}{Det}\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Serve $mg(2) = Dim(\ker(A-2Id)) = 1$

$A - 2Id = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \ker(A-2Id) = \operatorname{Span}((1,1))$

$ma(2) = 2$, $mg(2) = 1$ ⤳ 1 blocco da 2

Quindi

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Come trovo la M jordanizzante?

Sia $\{v_1, v_2\}$ la relativa base (le colonne di M).

Cosa deve succedere?

$A v_1 = 2 v_1$ ⤳ v_1 = autovettore di A ⤳ $v_1 = (1,1)$

$A v_2 = 2 v_2 + v_1$

Vado di bovino $v_2 = (a,b)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{v_2} = \underbrace{2}_{2} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{v_2} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}$$

$$\begin{cases} a+b = 2a+1 \\ -a+3b = 2b+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -a+b = 1 \\ -a+b = 1 \end{cases} \qquad b = a+1 \qquad (a,b) = (0,1)$$

Conclusione: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \end{array}$$

Verifica: $M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ = Jordan prevista

④ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ Essendo triangolare superiore, gli autovalori sono $\lambda = 1$ e $\lambda = 3$

⤳ diagonalizzabile sui reali $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda = 1}$ $\ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{Span}((1,0))$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda = 3}$ $\ker \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Span}((1,2))$

[Verifica per esercizio]

⑤ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ Rango $= 1 \rightsquigarrow$ Dim (ker) $= 1 \rightsquigarrow$ c'è l'autovalore nullo $\rightsquigarrow$ somma autovalori $= 0$

$\rightsquigarrow$ autovalori : $0, 0$

$ma(0) = 2 \qquad mg(0) = 1 \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Bovino : $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Det} = (1-\lambda)(-1-\lambda)+1$

$= -1-\lambda+\lambda+\lambda^2+1 = \lambda^2$

$\lambda^2 = 0 \rightsquigarrow \lambda = 0, 0.$

Come trovo la M di passaggio ? $Av_1 = 0$

$\rightsquigarrow v_1 \in \ker A$ ad esempio $v_1 = (1, -1)$

$Av_2 = v_1 \qquad \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} \underset{v_2}{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} = \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \qquad \begin{matrix} a+b = 1 \\ -a-b = -1 \end{matrix}$

$b = 1-a$ ad esempio $v_2 = (3, -2)$ oppure $v_2 = (0, 1)$

Possibile M di passaggio : $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ [Verifica per esercizio]

—o—o—

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{Tr} = 5 \qquad \text{Det} = 10$

$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 10 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-40}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{15}\, i}{2}$$

Diagonalizzabile su $\mathbb{C}$, con i 2 autovalori sulla diagonale

La Jordan reale è $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{\sqrt{15}}{2} \\ \frac{\sqrt{15}}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad$ $Tr = 5$ $\quad$ $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$

$Det = -2$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+8}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$$

Diagonalizzabile su $\mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $Tr = 0$ $\quad$ $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 3 = 0$

$Det = -3$ $\quad$ $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}$

Diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ $\quad$ $D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda = \sqrt{3}}$ $\quad$ $\ker \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 3 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \text{Span}\left((\sqrt{3}, 1)\right)$

$\boxed{\lambda = -\sqrt{3}}$ $\quad$ $\ker \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 3 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \text{Span}\left((\sqrt{3}, -1)\right)$

$M = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ [Verifica]

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 41

Note Title 21/11/2023

2. Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{pmatrix}$
   (a) è diagonalizzabile sui reali,
   (b) è diagonalizzabile sui reali mediante una matrice ortogonale,
   (c) ha il ker non banale,
   (d) ammette l'autovalore $\lambda = 1$,
   (e) ammette l'autovalore $\lambda = 2 + i$,
   (f) ammette $(1, 5)$ come autovettore,
   (g) non è diagonalizzabile sui complessi.

(b) Teorema spettrale $\Leftrightarrow$ simmetrica $\Leftrightarrow a = 2$

(c) $\Leftrightarrow$ Det $= 0 \Leftrightarrow 3 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$

In questo caso

$$\ker \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} = \text{Span}((-2, 1))$$

(a) $\Leftrightarrow$ autovalori reali con $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$

$\text{Tr} = 4$ $\quad$ Det $= 3 - 2a$ $\qquad p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + (3 - 2a) = 0$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3 + 2a} = 2 \pm \sqrt{2a + 1}$$

- $2a + 1 > 0$, cioè $a > -\frac{1}{2}$, allora 2 radici reali distinte $\rightsquigarrow$ diagonalizzabile in $\mathbb{R}$
- $2a + 1 < 0$, cioè $a < -\frac{1}{2}$, allora 2 radici davvero complesse e distinte $\rightsquigarrow$ diagonalizzabile in $\mathbb{C}$ ma non in $\mathbb{R}$
- $2a + 1 = 0$ cioè $a = -\frac{1}{2}$, allora due radici reali coincidenti che per forza sono 2 (essendo $\text{Tr} = 4$)
  Dipende dalle molteplicità

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \qquad A - 2\text{Id} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad m_g(2) = 1 \rightsquigarrow J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Conclusione: diagonalizzabile in $\mathbb{R} \iff a > -\frac{1}{2}$

(g) Se $a \neq -\frac{1}{2}$ allora è diag. in $\mathbb{C}$ (autovalori distinti)

Se $a = -\frac{1}{2}$ allora non è diag. in $\mathbb{C}$

(d) Ammette autovalore $\lambda = 1 \iff A - Id$ ha ker non banale

$\iff \operatorname{Det}(A - Id) = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{pmatrix}$ $\quad A - Id = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{Det} = 0 \iff a = 0$

Verifica: per $a = 0$ diventa $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ che si vede avere autovalori 1 e 3, quindi forma canonica $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e volendo si trova la M di passaggio.

(e) Ammette autovalore $\lambda = 2 + i$ (l'altro sarà $\lambda = 2 - i$)

$\boxed{1° \text{ modo}}$ $\operatorname{Det}(A - (2+i) Id) = 0$

$A - (2+i)Id = \begin{pmatrix} -1-i & 2 \\ a & 1-i \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{Det} = (1-i)(-1-i) - 2a$

$= -1 - \cancel{i} + \cancel{i} - 1 - 2a = 0$

$\iff 2a = -2 \iff a = -1$

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Avevamo scoperto che $\lambda = 2 \pm \sqrt{2a+1}$ e questo diventa $2 \pm i$ se e solo se $2a + 1 = -1$, cioè $a = -1$ ☺

(f) Ammette $(1,5)$ come autovettore

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$11 = \lambda \nearrow$ l'altro sarà -7

$a + 15 = 5\lambda \rightsquigarrow a + 15 = 55$

$\rightsquigarrow a = 40$

[Verificare che per $a = 40$ la forma canonica sia $\begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ trovando anche la M di passaggio]

<u>Esercizio</u> Trovare la forma canonica di $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A$

[Per esercizio provare a calcolare bovinamente $p_A(\lambda)$]

<u>Più astuto</u>: rango = 2 $\Rightarrow$ Dim (ker) = 2

$\Rightarrow \lambda = 0$ è autovalore con $m_g(0) = 2$

(quella algebrica non la sappiamo)

Osservo che $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$

Questo ci dice che $\lambda = 8$ è un autovalore e $(1,1,1,1)$ sta nel suo autospazio.

In questo momento conosciamo gli autovalori $0, 0, 8$.

Per forza l'ultimo è -4 (perché $\mathrm{Tr}\, A = 4$)

[Il bovino avrebbe trovato $p_A(\lambda) = \lambda^2 (\lambda - 8)(\lambda + 4)$]

Ora sappiamo che A è diagonalizzabile poiché $m_g(0) = m_a(0)$ quindi la forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Resta da trovare la M di passaggio

→ La 3ª colonna è un autovettore di 8, cioè ad es $(1,1,1,1)$

→ Le prime due colonne sono una base di ker

→ La 4ª colonna è un autovettore di -4 oppure un qualunque vettore $\perp$ ai primi 3, ad esempio $(1,-1,1,-1)$

Posso rendere le colonne di M ortonormali prendendo

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

In questo modo $M^{-1} = M^t$

[Verifica: $M^t A M = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & 0 \\ & & 8 & \\ 0 & & & -4 \end{pmatrix}$]

— o — o —

<u>Esercizio</u> $\mathbb{R}_{\leq 3}[x] = V$ $p(x) \to p'(x)$

Trovare la forma canonica.

$\boxed{\text{Passo 1}}$ Scrivo la matrice dell'applic. usando in partenza ed arrivo la base $\{1, x, x^2, x^3\}$ di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$

$1 \longrightarrow 0$
$x \longrightarrow 1$
$x^2 \longrightarrow 2x$
$x^3 \longrightarrow 3x^2$

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & \\ \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \leftarrow 1 \\ \leftarrow x \\ \leftarrow x^2 \\ \leftarrow x^3 \end{matrix} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ (1)' & (x)' & (x^2)' & (x^3)' & \end{array}$$

$\boxed{\text{Passo 2}}$ Calcolo gli autovalori. Essendo triangolare superiore, $\lambda = 0$ è l'unico autovalore con $m_a(0) = 4$
$m_g(0) = \text{Dim}(\ker) = 1$ perché rango $= 3$.

Quindi la forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J$$

unico blocco da 4

Trovo base jordanizzante

$f(v_1) = 0 \rightsquigarrow v_1 = 1$ (o anche $v_1 = 7$)

$f(v_2) = v_1 \rightsquigarrow (v_2)' = 1 \rightsquigarrow v_2 = x$

$f(v_3) = v_2 \rightsquigarrow (v_3)' = x \rightsquigarrow v_3 = \frac{1}{2}x^2$

$f(v_4) = v_3 \rightsquigarrow (v_4)' = \frac{1}{2}x^2 \rightsquigarrow v_4 = \frac{1}{6}x^3$

Quindi la base jordanizzante è $\{1, x, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{6}x^3\}$

[Scrivere M di passaggio e fare la verifica].

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 42

Note Title 24/11/2023

Esercizio 1 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = A$ Trovare forma canonica e M di passaggio

$\boxed{1^\circ \text{ fatto}}$ Rango $= 1 \leadsto \text{Dim}(\ker) = 3 \leadsto \lambda = 0$ autovalore con $m_g(0) = 3$

$Tr = 7 \leadsto$ gli autovalori sono $\underbrace{0, 0, 0,}_{m_a(0) = m_g(0)} 7$

$\boxed{2^\circ \text{ fatto}}$ A è diag. sui reali e la sua forma canonica è $\begin{pmatrix} 7 & & & \\ & 0 & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} = D$

$\boxed{3^\circ \text{ fatto}}$ Osservo che $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$. Quindi una possibile M di passaggio è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = M$$

↑ autovettore di 7 ↑ base di ker A

Verifica: $M^{-1} A M = D$

oppure $AM = MD$

Potremmo trovare una M di passaggio ortogonale?

NO! Questo è possibile se e solo se A è simmetrica.

— o — o —

Esercizio 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A \qquad \text{solite domande}$$

Gli autovalori sono 2, 2, 2, quindi $m_a(2) = 3$ (triang. sup.)

Cerco $m_g(2)$

$$\text{Dim}(\ker(A - 2Id)) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow \ m_g(2) = 2$$

Quindi la forma canonica è

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Troviamo una M di passaggio. Cosa deve succedere?

$$Av_1 = 2v_1 \qquad Av_2 = 2v_2 + v_1 \qquad Av_3 = 2v_3$$

Quindi v_1 e v_3 sono autovettori di $\lambda = 2$.

Come faccio a sapere chi usare come v_1?

Prendiamo un blocco di Jordan con tutti 0 sulla diagonale

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J^2 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} = J^3$$

Più in generale, se io prendo $(J - \lambda Id)$ dove J è un blocco di Jordan con λ sulla diagonale, allora ad ogni potenza la dimensione del suo ker aumenta di 1.

Quindi

$$\dim\ker(A - \lambda Id)^2 - \dim\ker(A - \lambda Id) = \#\,\text{blocchi} \geq 2$$

$$(\qquad)^3 - (\qquad)^2 = \#\,\text{blocchi} \geq 3$$

e così via.

Nell' esempio sopra, v_4 è l'unico vettore che non va a finire in 0 quando calcoliamo J^3.

Nell' esempio iniziale v_2 è l'unico vettore che non va in 0 quando calcoliamo $(A-2Id)$

$$A=\begin{pmatrix}2&0&7\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix} \qquad A-2Id=\begin{pmatrix}0&0&7\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&7\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$(A-2Id)^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Quindi $v_2=(0,0,1)$

$$v_1=(A-2Id)\,v_2=\begin{pmatrix}0&0&7\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\1\\0\end{pmatrix}$$

$\ker(A-2Id)=\text{Span}\big((7,1,0),\underset{\substack{\uparrow\\ \text{posso mettere}\\ \text{quasi chi voglio}}}{(1,0,0)}\big)$

$$M=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}7&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ v_1&v_2&v_3\end{matrix}\end{array}$$

$$A=\begin{pmatrix}2&0&7\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix} \qquad Av_1=\begin{pmatrix}2&0&7\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\2\\0\end{pmatrix}=2v_1 \quad ☺$$

$$Av_2=\begin{pmatrix}2&0&7\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\1\\2\end{pmatrix}=2v_2+v_1 \quad ☺$$

$$Av_3=\begin{pmatrix}2&0&7\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=2v_3 \quad ☺$$

Oss. Questa complicazione c'è solo quando abbiamo + blocchi di Jordan con lo stesso autovalore

Esempio 3 $\quad f: \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \qquad p(x) \to p(x)+p(2x)$

Forma canonica e relativa base

Base canonica $\{1, x, x^2\}$ $p(x) = a+bx+cx^2$

$1 \longrightarrow 2$ $p(2x) = a+2bx+4cx^2$

$x \longrightarrow 3x$ $p(x)+p(2x) = 2a+3bx+5cx^2$

$x^2 \longrightarrow 5x^2$

Già in questa base la matrice viene diagonale ☺ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Esempio 4 Come sopra $p(x) = p(2)\,x$

$$a+bx+cx^2 \longrightarrow (a+2b+4c)\,x$$

$1 \longrightarrow x$

$x \longrightarrow 2x$ Matrice nella base canonica $A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \leftarrow x \\ \leftarrow x^2 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & x & x^2 \end{array} & \end{array}$

$x^2 \longrightarrow 4x$

Gli autovalori sono $0,0,2$, quindi è diagonalizzabile con forma canonica $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La base in cui succede questo avrà

$v_1 \rightsquigarrow$ autovettore di 2, ad esempio x

$v_2, v_3 \rightsquigarrow$ base di ker $\rightsquigarrow$ guardando la matrice $(2,-1,0)$
$(0,2,-1)$

$v_2 = 2-x$ $v_3 = 2x-x^2$

Verifica! $x \longrightarrow 2x$ ☺

$2-x \longrightarrow 0\cdot x = 0$ ☺

$2x-x^2 \longrightarrow 0\cdot x = 0$ ☺

Esempio 5 $p(x) \longrightarrow (x+3)\,p'(x)$

$1 \longrightarrow 0$

$x \longrightarrow x+3$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$x^2 \longrightarrow (x+3)\cdot 2x = 2x^2+6x$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Base in cui si realizza

$v_1 = 1$ $\quad \ker = \text{Span}(1)$

$v_2 \in \ker(A - Id)$ $\quad v_2 = 3 + x$ [Verifica a occhio]

$$A - Id = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \ker = \text{Span}\,(3+x) \rightsquigarrow (3,1,0)$$

$v_3 \in \ker(A - 2Id)$

$$A - 2Id = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (9,6,1)$$

$v_3 = 9 + 6x + x^2 = (x+3)^2$ [Verifica a occhio]

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 43

Note Title 24/11/2023

Esercizio 1 $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ $(x, y, z, w) \to (z, w, x, y).$

$f(x,y,z,w) = (z,w,x,y)$

Forma canonica e base

$(1,0,0,0) \to (0,0,1,0)$
$(0,1,0,0) \to (0,0,0,1)$
$(0,0,1,0) \to (1,0,0,0)$
$(0,0,0,1) \to (0,1,0,0)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↑ Se ad A diamo in pasto (x,y,z,w) questa sputa (z,w,x,y)

$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$Det = -\lambda \, Det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} + 1 \cdot Det \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

↑ Laplace 1ª riga

$$= -\lambda(-\lambda)[-\lambda(-\lambda)-1] - [-\lambda(-\lambda)-1]$$

$$= (\lambda^2-1)(\lambda^2-1) \quad \text{Autovalori} : \underbrace{1,1},-1,-1$$

Quindi $ma(1) = ma(-1) = 2$ Quanto sono le geometriche?

$$\boxed{A - Id} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$

Rango = 2 ⇝ Dim (ker) = 2
⇝ mg (1) = 2

Succederà la stessa cosa quando faccio $A + Id \rightsquigarrow m_g(-1) = 2$

$\rightsquigarrow$ Diagonalizzabile con $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

In quale base succede questo ?

$v_1 = (1,0,1,0)$ $\qquad v_3 = (1,0,-1,0)$

$v_2 = (0,1,0,1)$ $\qquad v_4 = (0,1,0,-1)$

La matrice iniziale era simmetrica, e infatti abbiamo ottenuto base ortogonale (se dividevo per $\sqrt{2}$ diventava ortonormale)

Se la uso come colonne di una M, allora $M^t A M = D$.

—o—o—

Esercizio 2 $\quad f : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$

$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} A.$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -a+4c & -b+4d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Quindi nella base canonica di $M_{2\times 2}$ la f è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = B$$

Forma canonica di B ?

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 1^a \text{ col}}}{\text{Det}} = (1-\lambda)\,\text{Det}\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} - 1 \cdot \text{Det}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(4-\lambda)^2 + 2(4-\lambda)\right] + (+4 + 2(1-\lambda)(4-\lambda))$$

$$= (1-\lambda)(4-\lambda)\left[(1-\lambda)(4-\lambda) + 2\right] + 4 + 2(1-\lambda)(4-\lambda)$$

$$[(1-\lambda)(4-\lambda)+2]\,[(1-\lambda)(4-\lambda)+2]$$
$$= \underbrace{(\lambda^2-5\lambda+6)}_{(\lambda-2)(\lambda-3)}\underbrace{(\lambda^2-5\lambda+6)}_{(\lambda-2)(\lambda-3)}$$

Gli autovalori sono $\lambda = 2, 2, 3, 3$

Calcoliamo $B - 2Id = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ rango $= 2$

Dim (ker) $= 2$

$$\ker = \mathrm{Span}\Big(\underset{\overset{\uparrow}{v_1}}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\overset{\uparrow}{v_2}}{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}\Big)$$

$$B - 3Id = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \ker = \mathrm{Span}\Big(\underset{\overset{\uparrow}{v_3}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\overset{\uparrow}{v_4}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}\Big)$$

Usando la base v_1, v_2, v_3, v_4 la matrice di f diventa

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -a+4c & -b+4d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad ☺ \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad ☺$$

Idem per gli altri due.

* * *

Teorema di Hamilton – Cayley Se $p_A(\lambda)$ è il polinomio caratteristico di A, allora

$$p_A(A) = 0 \leftarrow \text{matrice nulla}$$

Esempio $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ha autovalori $\lambda = 1$ e $\lambda = 5$

$A - Id = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ☺ $\qquad A - 5 Id = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ ☺

Il pol. caratteristico è $(\lambda - 1)(\lambda - 5)$, cioè $\lambda^2 - 6\lambda + 5$

Voglio calcolare $A^2 - 6A + 5 Id$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 24 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 6A + 5 Id = \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 24 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 24 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ☺

$A^2 - 6A + 5 Id = 0$ $\qquad$ Moltiplico per A^{-1}

$$A - 6 Id + 5 A^{-1} = 0 \quad \leadsto \quad A^{-1} = -\frac{1}{5} A + \frac{6}{5} Id$$

$$= -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \frac{6}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$ ☺

Con questo sistema si possono fare le inverse facendo solo potenze di A.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 44

Note Title 25/11/2023

FORME QUADRATICHE

$\boxed{d=2}$ $$q(x,y) = \underset{\uparrow}{a}\,x^2 + \underset{\uparrow}{b}\,y^2 + 2\underset{\uparrow}{c}\,xy$$

coeff.

$\boxed{d=3}$ $$q(x,y,z) = \underset{\uparrow}{a}\,x^2 + \underset{\uparrow}{b}\,y^2 + \underset{\uparrow}{c}\,z^2 + 2\underset{\uparrow}{d}\,xy + 2\underset{\uparrow}{e}\,yz + 2\underset{\uparrow}{f}\,xz$$

e così via con un maggior numero di variabili

Matrice associata ad una forma quadratica

$\boxed{d=2}$ $$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow x \\ \leftarrow y \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ x & y \end{matrix} & \end{array} \rightsquigarrow \text{Matrice simmetrica}$$

$$q(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax+cy \\ cx+by \end{pmatrix} = ax^2+cxy+cyx+by^2$$

$$= ax^2+by^2+2cxy$$

$\boxed{d=3}$ $$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow x \\ \leftarrow y \\ \leftarrow z \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{matrix} & \end{array} \qquad q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

In generale una forma quadratica si presenta come $q(v) = v^t \overset{\substack{\text{matrice } n\times n \\ \text{simmetrica} \\ \downarrow}}{A}\, v$

CLASSIFICAZIONE DELLE FORME QUADR. SECONDO IL SEGNO

Defn. Sia $q(v)$ una forma quadratica in n variabili

Questa si dice

- → **DEFINITA POSITIVA** se $q(v) > 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- → **DEFINITA NEGATIVA** " $q(v) < 0$ "
- → **SEMIDEFINITA POSITIVA** se $q(v) \geq 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$
- → **SEMIDEFINITA NEGATIVA** $q(v) \leq 0$ "
- → **INDEFINITA** se non rientra in nessuna delle categorie precedenti, cioè $\exists\, v \in \mathbb{R}^n$ t.c. $q(v) > 0$ ed $\exists\, w \in \mathbb{R}^n$ t.c. $q(w) < 0$

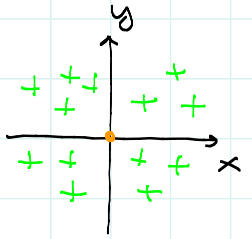
Oss. Una forma definita positiva è anche semidef. positiva

" negativa " negativa

Esempio 1 $q(x,y) = x^2 + 3y^2$ è definita positiva

(si annulla solo se $(x,y) = (0,0)$)

[è anche semidef. pos.]

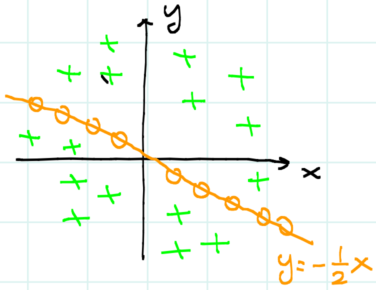


Esempio 2 $q(x,y) = x^2 + 4y^2 + 4xy$

$= (x+2y)^2 \geq 0$

e si annulla sulla retta $y = -\frac{1}{2}x$

È semidef. pos. ma non def. positiva

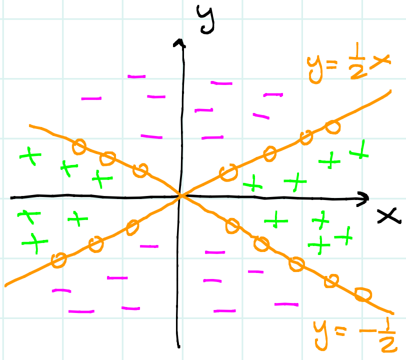


Esempio 3 $q(x,y) = x^2 - 4y^2$

Questa è indefinita

$$\left.\begin{array}{l} q(1,0) = 1 > 0 \\ q(0,1) = -4 < 0 \end{array}\right\}$$ questo basta per dire che è indefinita

$q(x,y) = (x+2y)(x-2y)$



SEGNATURA DI UNA FORMA QUADRATICA

Ad ogni forma quadratica è associata una terna di interi ≥ 0

$$\boxed{n_+, n_-, n_0}$$

con la proprietà che

$$\boxed{n_+ + n_- + n_0 = n}$$

dimensione dello spazio

Come sono definiti?

→ n_+ = massima dimensione di un s.spazio $V \subseteq \mathbb{R}^n$ su cui q è definita positiva (cioè $q(v) > 0$ per ogni $v \in V \setminus \{0\}$)

→ n_- = ... q è def. negativa (...)

→ n_0 è definito per differenza

Back to esempi precedenti

Esempio 1

$n_+ = 2$ (ci sono dei + su tutto il piano)

$n_- = 0$ (non ci sono −)

$n_0 = 0$ (la somma deve fare 2)

Esempio 2

$n_+ = 1$ (qualunque retta per l'origine che non sia quella $y = -\frac{1}{2}x$ va bene, ma tutto il piano non va bene)

$n_- = 0$ (non ci sono segni −)

$n_0 = 1$ (per differenza)

Esempio 3

$n_+ = 1$ (vanno bene tutte le rette nella zona +)

$n_- = 1$ (" " " −)

$n_0 = 0$ (per differenza)

Oss. Occhio che n_0 non è la max dim. di un s.sp. in cui $q(v) = 0$ (vedi esempio 3)

METODI PER CALCOLARE LA SEGNATURA

① Segno autovalori
② Somma di quadrati (SOS in inglese)
③ SYLVESTER
④ CARTESIO

$\boxed{1}$ Segno degli autovalori

La matrice associata a q è simmetrica, quindi in particolare ha n autovalori reali, se contati con la loro molteplicità. In tal caso

n_+ = # autovalori > 0
n_- = # autovalori < 0
n_0 = # autovalori $= 0$

(Teoricamente tutto facile, ma bisogna trovare le radici dei polinomi)

Soliti esempi di prima

Esempio 1 $\quad q(x,y) = x^2+3y^2 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Autovalori: 1, 3 quindi $++$

Esempio 2 $\quad q(x,y) = x^2+4y^2+4xy \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Tr} = 5 \quad \mathrm{Det} = 0 \qquad$ Autovalori: $\lambda = 0$ e $\lambda = 5 \qquad +0$

Esempio 3 $\quad q(x,y) = x^2-4y^2 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad +-$

Esempio 4 $\quad q(x,y) = 3x^2+8y^2-4xy \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Tr} = 11 \quad \mathrm{Det} = 20 \qquad \mathrm{Det} > 0$ ↗ $++ \Leftarrow$ Def. pos.
↘ $--$ (impossibile perché $\mathrm{Tr} > 0$)

— o — o —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 45

Note Title 25/11/2023

$\boxed{2}$ Completamento dei quadrati (SOS)

Fatto generale: ogni forma quadratica si può scrivere come somma / differenza di quadrati di espressioni di primo grado linearmente indipendenti.

A questo:
- → n_+ = # espressioni con il segno +
- → n_- = # " " " −
- → n_0 = ciò che resta per differenza

Esempio 1 $q(x,y) = x^2 + 3y^2 + 6xy$

$$q(x,y) = x^2 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{doppio prodotto} \\ \text{tra } x \text{ e } 3y}}{6xy} + 3y^2 = (x+3y)^2 - 9y^2 + 3y^2$$

$$= (x+3y)^2 - 6y^2 = (x+3y)^2 - (\sqrt{6}y)^2$$

In questo esempio $n_+ = 1$, $n_- = 1$, $n_0 = 0$

Segnatura = + − ⇝ forma è INDEFINITA

Potevo vederlo anche con la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

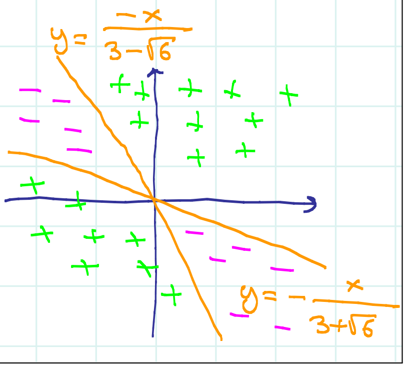
Det = −6 ⇝ Autovalori: + −

Dalla scrittura come SOS posso trovare esplicitamente la zona di + e la zona di −

$$q(x,y) = (x+3y)^2 - (\sqrt{6}y)^2$$

$$= \underset{\uparrow}{(x+3y+\sqrt{6}y)}\,\underset{\uparrow}{(x+3y-\sqrt{6}y)}$$

equazioni di due rette che separano la zona + dalla zona −



Domanda soft: trovare l'equazione di una retta contenuta
nella zona −

Impongo che faccia 0 il termine con il segno +, quindi

$x+3y=0 \qquad y=-\frac{1}{3}x \qquad V=\text{Span}((3,-1))$

Esempio 2 $\quad q(x,y)=3x^2+8y^2+10xy$

Domanda: trovare (x,y) t.c. $q(x,y)<0$.

Siamo sicuri che esista? Se la matrice avesse un autov. neg....

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{Det} = 24-25=-1 \qquad \text{Autov}: + \; -$$

Per trovarlo completiamo i quadrati

$$q(x,y) = 3x^2+10xy+8y^2$$

$$= \Big(\sqrt{3}x + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{crea il doppio} \\ \text{prodotto} \\ 10xy}}{\frac{5}{\sqrt{3}}}y\Big)^2 - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{compensa il } \square \\ \text{di } \frac{5}{\sqrt{3}}y}}{\frac{25}{3}}y^2 + 8y^2$$

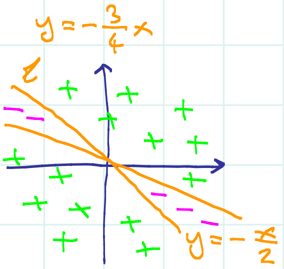
$$= \Big(\sqrt{3}x+\frac{5}{\sqrt{3}}y\Big)^2 - \frac{1}{3}y^2 = \Big(\sqrt{3}x+\frac{5}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}y\Big)\Big(\sqrt{3}x+\frac{5}{\sqrt{3}}y-\frac{1}{\sqrt{3}}y\Big)$$

Se voglio che $q(x,y)<0$ mi basta che $\sqrt{3}x+\frac{5}{\sqrt{3}}y=0$, cioè
$3x+5y=0$, ad esempio $(x,y)=(5,-3)$

$q(5,-3) = 75+72-150 = 147-150 = -3$ ☺

Come sono fatte le zone di + e di − ?

$$\underbrace{\Big(\sqrt{3}x+\frac{6}{\sqrt{3}}y\Big)}_{\frac{3x+6y}{\sqrt{3}}}\underbrace{\Big(\sqrt{3}x+\frac{4}{\sqrt{3}}y\Big)}_{\frac{3x+4y}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{3}(3x+6y)(3x+4y)$$



Piccola alternativa

$$q(x,y) = 3x^2 + 10xy + 8y^2$$

$$= 3\left(x^2 + \frac{10}{3}xy\right) + 8y^2$$

$$= 3\left\{\left(x + \frac{5}{3}y\right)^2 - \frac{25}{9}y^2\right\} + 8y^2$$

$$= 3\left(x + \frac{5}{3}y\right)^2 - \frac{1}{3}y^2$$ (stessa cosa senza radici)

Esempio 3 $q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 5yz + 6xz$

Completamento dei quadrati

$$q(x,y,z) = x^2 + 4xy + 6xz + 2y^2 + 3z^2 + 5yz$$ (per primi i termini con la x)

$$= (x + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{crea}\\ 4xy}}{2y} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{crea}\\ 6xz}}{3z})^2 \underbrace{- 4y^2 - 9z^2 - 12yz}_{\substack{\text{tolgo i termini}\\ \text{creati dal } \square}} + 2y^2 + 3z^2 + 5yz$$

$$= (x + 2y + 3z)^2 - 2y^2 - 7yz - 6z^2$$

$$= (x + 2y + 3z)^2 - 2\left\{y^2 + \frac{7}{2}yz + 3z^2\right\}$$

$$= (x + 2y + 3z)^2 - 2\left\{\left(y + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{crea } \frac{7}{2}yz}}{\frac{7}{4}}z\right)^2 - \frac{49}{16}z^2 + 3z^2\right\}$$

$$= (x + 2y + 3z)^2 - 2\left(y + \frac{7}{4}z\right)^2 + \frac{1}{8}z^2$$ [Verifica!]

Segnatura : $++-$

Stessa cosa con la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & \frac{5}{2} \\ 3 & \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = 6 + \cancel{15} + \cancel{15} - \cancel{18} - \cancel{12} - \frac{25}{4} = 6 - \frac{25}{4} = -\frac{1}{4}$$

Autovalori: $\nearrow$ $- - -$ $\rightsquigarrow$ NO BUONO perché $Tr > 0$

$\searrow$ $\boxed{+ + -}$

Trovare un s.sp. di dim 2 su cui $q(x,y,z) > 0$

Basta imporre $y + \frac{7}{4} z = 0$ $\rightsquigarrow$ Span $((0,-7,4),(1,0,0))$

Trovare un s.sp. di dim 1 su cui $q(x,y,z) < 0$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \text{Span}((2,-1,0))$$

Esempio 4 $q(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 4xy + 2z^2$

$q(x,y,z) = (x+2y)^2 + 2z^2$ Segnatura: $+ + 0$

Occhio a non fare: $q(x,y,z) = (x+2y)^2 + z^2 + z^2$ Segnatura: ~~+++~~

Ho usato 2 volte la stessa espressione: NON sono lin. indip. !!!

Chi? $x+2y$ z z

Esempio 5 $q(x,y) = xy$

$$q(x,y) = xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2$$

I quadrati "puri" se ne vanno, ma i doppi prodotti si sommano.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 46

Note Title 25/11/2023

$\boxed{4}$ $\boxed{\text{Cartesio}}$

Teorema misterioso (di Analisi)

Sia $p(x)$ un polinomio di grado n.

Supponiamo di sapere che $p(x)$ ha n radici reali, se contate con molteplicità.

Allora

→ il numero di radici nulle è la più piccola potenza di x che compare nel polinomio (sostanzialmente ovvio)

→ il numero di radici positive è uguale al numero di variazioni di segno tra i coeff. di $p(x)$ (per nulla ovvio)

Esempio $p(x) = x^8 - x^6 + x^5 + 3x^3$

Supponiamo di sapere che ha 8 radici reali (non so se è vero)

Le radici nulle sono 3 perché la potenza + piccola è x^3

$$p(x) = x^3(x^5 - x + x^2 + 3)$$

(se c'è il termine noto la + piccola potenza e x^0 e non ci sono radici nulle)

Coeff. di $p(x)$ = $\underset{\vee}{+ \smile -} \underset{\vee}{\smile +} +$

Due variazioni di segno = 2 radici positive !!

— o — o —

Data una forma quadratica:

→ scrivo la matrice

→ scrivo il polinomio caratt. Det $(A - \lambda Id)$ e so dalla teoria che ha tutte radici reali

→ Cartesio mi dice subito n_0 e n_+

→ Trovo n_- per differenza

$\boxed{3}$ $\boxed{\text{SYLVESTER}}$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

① Calcolo i Determinanti lungo la diagonale da NW a SE ↘

$\text{Det}_{1\times1} = 2$

$\text{Det}_{2\times2} = -2$

$\text{Det}_{3\times3} = -6+4-2 = -4$

② Scrivo i segni dei determinanti e aggiungo d'ufficio un segno + a sinistra

$$+\quad \underset{\substack{\uparrow\\1\times1}}{+}\quad \underset{\substack{\uparrow\\2\times2}}{-}\quad \underset{\substack{\uparrow\\3\times3}}{-}$$

③ Come per miracolo

n_+ = numero di permanenze

n_- = numero di variazioni

$$+\underbrace{\ \ }_{P}+\underbrace{\ \ }_{V}-\underbrace{\ \ }_{P}-$$

Segnatura: $++-$

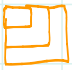
Oss. In questo caso era prevedibile guardando anche solo Tr e Det.

Oss. Come ricordo la regola? Pensiamo al caso in cui A è diagonale. Allora $\text{Det}_{i\times i}$ = prodotto primi i autovalori.
Ogni autovalore + produce una permanenza, ogni autovalore − produce una variazione.

Problema: se on the road mi viene un Det $= 0$, allora formalmente il metodo non si applica.

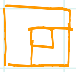
Sylvester procedendo in modo alternativo

Sylvester 1-2-3

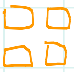


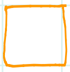
Sylvester 3-2-1

Sylvester 2-3-1



Sylvester 1-3-2





$$\begin{matrix} \boxed{\boxed{2}} & 0 & \boxed{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ \boxed{2} & 1 & \boxed{3} \end{matrix}$$

1-3 ⇝ la sottomatrice 2×2 ottenuta considerando gli elementi che stanno sulla 1ª e 3ª riga e 1ª e 3ª colonna

Idea: se procedo in maniera diversa ho + speranza di evitare di trovare Det $= 0$.

Esempio $q(x,y,z,w) = x^2+yz-w^2$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \leftarrow y \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z & w \end{matrix} & \end{array}$$

Sylvester 1-2-3-4 : ☹ al passo 2

Sylvester 4-3-2-1 : ☹ al passo 2

Sylvester 2-3-1-4 : ☹ al passo 1

Sylvester 1-4-2-3 : ☹ al passo 3

$\text{Det}_{1\times1} = 1$ $\quad$ $\text{Det}_{2\times2} = \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$ $\quad$ $\text{Det}_{3\times3} = \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$= ☹$

Apparentemente Sylvester va sempre male.

Det generale $\underset{\uparrow}{=}$ $1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \neq 0$

Laplace
riga 1

Possibilità per gli autovalori: $\left.\begin{matrix} ++++ \\ ---- \end{matrix}\right\}$ No perché $Tr = 0$

$++--$ ← segnatura

Potevo vederlo completando i quadrati?

$$\begin{aligned} q(x,y,z,w) &= x^2 + yz - w^2 \\ &= x^2 - w^2 + yz \\ &= x^2 - w^2 + \frac{1}{4}(y+z)^2 - \frac{1}{4}(y-z)^2 \end{aligned}$$ ☺

Trovare s.sp. di dim = 2 su cui è def. positiva

[Segui conetti dopo video]

$$\begin{cases} w = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \text{Span}((0,1,1,0),(1,0,0,0))$$

<u>Esempio</u>

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & a & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Determinare la segnatura al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Sylvester 1-3-2 (così la a me la trovo solo alla fine)

$Det_{1\times1} = 2$

$Det_{2\times2} = 1$

$Det_{3\times3} = 10a - 6 - 6 - 9a - 5 - 8 = a - 25$

- Se $a > 25$, allora $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ufficio}}}{+} \overset{p}{\frown} + \overset{p}{\frown} + \overset{p}{\frown} +$ $\rightsquigarrow$ segnatura $+++$ $\rightsquigarrow$ def. pos.
- Se $a < 25$, allora $+ \underset{p}{\smile} + \underset{p}{\smile} + \underset{v}{\smile} -$ $\rightsquigarrow$ segnatura $++-$
- Se $a = 25$, allora Det $A = 0$ $\rightsquigarrow$ almeno un autovalore nullo

D'altra parte traccia = 32, quindi c'è almeno un autovalore +

Possibilità rimaste
↗ ++0
↘ +0−
↘ +00

Considero la forma ristretta al piano $z=0$. La sua matrice è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 25 \end{pmatrix}$$

Questa ha $Tr>0$ e $Det>0$, quindi ++, quindi def. pos.

Ma allora quella originaria ha un s.sp. di dim 2 su cui è def. positiva. Quindi resta solo ++0.

[Per esercizio completare i quadrati]

—o —o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 47

Note Title 28/11/2023

PRODOTTI SCALARI IN GENERALE

Prodotto scalare Sia V uno sp. vettoriale

INPUT : 2 vettori $v \in V$ e $w \in V$

OUTPUT : numero $\langle v, w \rangle$

Proprietà : → simmetria $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

→ linearità rispetto alle due variabili

$$\langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$$

$$\langle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{numero}}}{\lambda} v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$$

Matrice associata ad un prodotto scalare

Sia V uno sp. vettoriale, sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e sia $\langle v, w \rangle$ un prodotto scalare in V.

Allora posso costruire la matrice $n \times n$ B definita da

$$B_{i,j} = \langle v_i, v_j \rangle$$

Si tratta di una matrice simmetrica

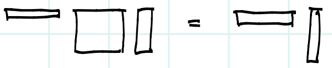
$$B_{i,j} = \langle v_i, v_j \rangle = \langle v_j, v_i \rangle = B_{j,i} \quad ☺$$

Esempio Se $V = \mathbb{R}^n$ e abbiamo il solito prodotto scalare con la solita base canonica, la matrice $B = Id$

Utilità della matrice : $\langle v, w \rangle = y^t B x$ dove

x pensato come colonna sono le componenti di v rispetto a $v_1, \dots, v_n$

y " " " " " w " "

Nota bene $y^t B x$ =  = numero

$$\langle v, w\rangle = y^tBx = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{trasposto di} \\ \text{un numero}}}{(y^tBx)^t} = x^tB^ty = x^tBy = \langle w, v\rangle$$

Domanda Se B rappresenta $\langle v, w\rangle$ nella base $v_1, \dots, v_n$. Se cambio base e uso $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n$, quale sarà la nuova matrice?

Risposta: M^tBM dove M è il cambio di base dalla $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$ alla $\{v_1, \dots, v_n\}$ quindi la matrice che ha come prima colonna le componenti di $\hat{v}_1$ rispetto a $v_1, \dots, v_n$, e così via

Idea: siano x e y le componenti di v e w rispetto alla base nuova. Allora le componenti di v e w rispetto alla vecchia sono Mx e My. Ma allora

$$\langle v, w\rangle = (My)^tB(Mx) = y^t\underbrace{M^tBM}_{\hat{B}}x$$

Domanda finale. Se scelgo bene la base, quanto può diventare bella la matrice B?

Può diventare diagonale con solo 0, 1, −1 sulla diagonale (Sylvestrizzazione)

Achtung! Abbiamo affrontato 2 problemi diversi

→ Matrici simili A e $M^{-1}AM$ ⇝ diagon., Jordan

→ Matrici congruenti B e M^tAM ⇝ Sylvestrizzazione

— o — o —

1. Consideriamo i prodotti scalari in $\mathbb{R}^2$ rappresentati, rispetto alla base canonica, dalle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Per ciascuno di essi si richiede di

(a) determinare se è definito positivo oppure no,

(b) determinare il prodotto scalare tra i vettori $(1, 2)$ e $(3, -1)$,

(c) determinare la matrice che lo rappresenta rispetto alla base $\{(-1, 2), (3, -2)\}$ (si consiglia per le prime volte di svolgere questo punto sia direttamente con la definizione, sia con il cambio di base),

(d) determinare l'equazione cartesiana del sottospazio ortogonale al vettore $(-1, 1)$,

(e) determinare un vettore ortogonale al sottospazio di equazione cartesiana $x + 2y = 0$,

(f) determinare una base "Sylvesterizzante".

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ Tr = 6

Det = -1 $\rightsquigarrow$ Autov $+\ -$ $\rightsquigarrow$ NO Def. pos.

(b) Prod. scalare tra $(1,2)$ e $(3,-1)$ Uso $y^t B x$

$$(1\ \ 2)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = (1\ \ 2)\begin{pmatrix} 9 \\ -13 \end{pmatrix} = 9-26 = -17$$

$$(3,-1)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (3\ \ -1)\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} = -17$$ ☺

(c) Consideriamo la nuova base $\underset{\hat{v}_1}{\underset{\shortparallel}{(-1,2)}}$ e $\underset{\hat{v}_2}{\underset{\shortparallel}{(3,-2)}}$. Determinare la nuova matrice.

$\boxed{1° \text{ modo}}$ BOVINO

$$<\hat{v}_1, \hat{v}_1> = (-1\ \ 2)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1\ \ 2)\begin{pmatrix} -8 \\ 11 \end{pmatrix} = 30$$

$$<\hat{v}_2, \hat{v}_2> = (3\ \ -2)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = (3\ \ -2)\begin{pmatrix} 12 \\ -17 \end{pmatrix} = 70$$

$$<\hat{v}_1, \hat{v}_2> = (-1\ \ 2)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = (-1\ \ 2)\begin{pmatrix} 12 \\ -17 \end{pmatrix} = -46$$

La nuova matrice è

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 30 & -46 \\ -46 & 70 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \hat{v}_1 & \quad \hat{v}_2 \end{array} & \end{array} = \hat{B}$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Uso cambio base $\hat{B} = M^t B M$ dove

$M = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ Input: componenti risp. a $\{\hat{v}_1, \hat{v}_2\}$
Output: " " alla canonica

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & 12 \\ 11 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -46 \\ -46 & 70 \end{pmatrix}$$ ☺

(d) Equazione del sottospazio ortogonale al vettore $(1,-1)$

Sono tutti gli (x,y) che hanno prod. scalare nullo con $(1,-1)$

$$(x \ y)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (x \ y)\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} = \boxed{5x - 7y = 0}$$

eq. cartesiana

↗ potevo anche metterlo a dx

Lo stesso sottospazio lo posso descrivere come
Span $((7,5))$

(e) Trovare un vettore ⊥ al s.sp. di equazione $y + 2x = 0$

Lo scrivo intanto come Span $((1,-2))$

e ora trovo un vettore ortogonale a $(1,-2)$:

$$(x \ y)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (2x - 3y \quad -3x + 4y)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= 2x - 3y + 6x - 8y = 8x - 11y$$

Una possibilità è $(11, 8)$

Verifica: $(1 \ -2)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$

$(1 \ -2)\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 + 2 = 0$ ☺

(f) Sylvesterizzare la matrice

Devo trovare matrice M invertibile tale che

$$M^t B M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sulla diagonale avremo
$n_+ \rightsquigarrow +1$
$n_- \rightsquigarrow -1$
$n_0 \rightsquigarrow 0$

Poniamo $v_1 = (1,-1)$. Quanto fa $\langle v_1, v_1 \rangle$?

$$(1 \ -1) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1 \ -1) \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} = 12$$ (segno +)

Poniamo $v_2 = (7,5)$. Sappiamo dal conto precedente che

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

Quanto fa $\langle v_2, v_2 \rangle$?

$$(7 \ \ 5) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = (7 \ 5) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -12$$

Se uso come base $(1,-1)$ e $(7,5)$ la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Basta dividere v_1 e v_2 per $\sqrt{12}$, quindi

$$\left(\frac{1}{\sqrt{12}}, -\frac{1}{\sqrt{12}}\right) \qquad \left(\frac{7}{\sqrt{12}} \ \frac{5}{\sqrt{12}}\right)$$

e volendo

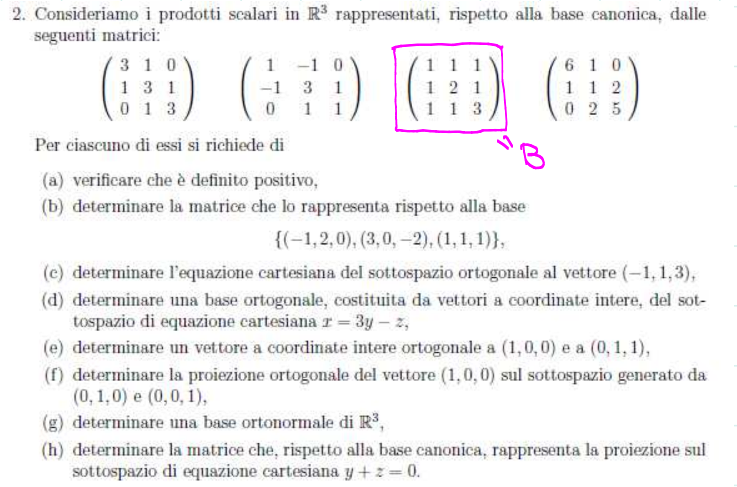
$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{7}{\sqrt{12}} \\ -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{5}{\sqrt{12}} \end{pmatrix}$$

Verifica: $M^t B M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 48

Note Title 28/11/2023



2. Consideriamo i prodotti scalari in $\mathbb{R}^3$ rappresentati, rispetto alla base canonica, dalle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}} \quad \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

B

Per ciascuno di essi si richiede di

(a) verificare che è definito positivo,

(b) determinare la matrice che lo rappresenta rispetto alla base

$$\{(-1,2,0),(3,0,-2),(1,1,1)\},$$

(c) determinare l'equazione cartesiana del sottospazio ortogonale al vettore $(-1,1,3)$,

(d) determinare una base ortogonale, costituita da vettori a coordinate intere, del sottospazio di equazione cartesiana $x = 3y - z$,

(e) determinare un vettore a coordinate intere ortogonale a $(1,0,0)$ e a $(0,1,1)$,

(f) determinare la proiezione ortogonale del vettore $(1,0,0)$ sul sottospazio generato da $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$,

(g) determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$,

(h) determinare la matrice che, rispetto alla base canonica, rappresenta la proiezione sul sottospazio di equazione cartesiana $y + z = 0$.

(a) Dim. che è def. pos.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}$$

d'ufficio
↓
+ + + +
P P P

Sylvester 1-2-3: $\text{Det}_{1\times1} = 1$

$\text{Det}_{2\times2} = 1$

$\text{Det}_{3\times3} = 6+1+1-2-3-1 = 1$

Segnatura: $+++$

(b) Matrice rispetto alla base $\underset{v_1}{(-1,2,0)}, \underset{v_2}{(3,0,-2)}, \underset{v_3}{(1,1,1)}$

Metodo bovino: calcolare 6 prodotti scalari

$\langle v_1, v_1\rangle_B \quad \langle v_2, v_2\rangle_B \quad \langle v_3, v_3\rangle_B$

$\langle v_1, v_2\rangle_B \quad \langle v_1, v_3\rangle_B \quad \langle v_2, v_3\rangle_B$

Metodo più astuto

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificare che venga uguale nei due casi

(c) Sottospazio ortogonale a $(-1\ 1\ 3)$

Basta imporre $\langle (-1,1,3), (x,y,z) \rangle_B = 0$

$$(-1\ \ 1\ \ 3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (3,4,9)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\boxed{3x+4y+9z=0}$$

(d) Sottospazio $x = 3y - z$

Vogliamo una base ortogonale

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Prendo un vettore qualunque del s.sp., ad esempio $(3,1,0)$. Questo è il primo elemento della base. Come cerco il secondo? Lo chiamo (x,y,z) e impongo che stia nel s.sp. e sia ⊥ al precedente

$$(3\ \ 1\ \ 0)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (4\ \ 5\ \ 4)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x-3y+z=0 & \longrightarrow \text{stare nel sottospazio} \\ 4x+5y+4z=0 & \longrightarrow \text{essere } \perp \text{ a } (3,1,0) \end{cases}$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Prendo una base qualunque del s.sp., ad esempio $v_1 = (3,1,0)$ $\quad v_2 = (1,0,-1)$

Ora applico GS rispetto al prodotto scalare definito da B

<u>Achtung!</u> GS si può fare rispetto ai prod. scalari DEF. POSITIVI (o def. neg.) per non rischiare di avere degli 0 al denominatore.

$$\hat{v}_1 = v_1 = (3,1,0)$$

$$\hat{v}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, \hat{v}_1 \rangle_B}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle_B}\,\hat{v}_1 = \text{conto che si fa}$$

[Deve venire lo stesso nei due modi]

(e) determinare un vettore a coordinate intere ortogonale a $(1,0,0)$ e a $(0,1,1)$,

Rispetto al prodotto strano non c'è una formula misteriosa immediata

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Lo chiamo (x,y,z) e impongo le condizioni

$$(1\ 0\ 0)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad \boxed{x+y+z=0}$$

$$(0\ 1\ 1)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (2\ 3\ 4)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad \boxed{2x+3y+4z=0}$$

Non resta che risolvere il sistema

$$\begin{cases} x+y+z=0 & \rightsquigarrow \text{perpendicolare a } (1,0,0) \\ 2x+3y+4z=0 & \rightsquigarrow \quad '' \quad '' \quad (0,1,1) \end{cases}$$

Le soluzioni hanno un grado di liberta

Quella che si ottiene è la retta ortogonale (rispetto al nuovo prodotto scalare) al piano Span((1,0,0), (0,1,1))

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Considero la base di $\mathbb{R}^3$

$(1,0,0)$ $(0,1,1)$ $(0,1,0)$ (verificare che siano una base)

Applico GS e la faccio diventare ortogonale.

A quel p.to il 3° è $\perp$ allo Span dei primi due.

(f) determinare la proiezione ortogonale del vettore $(1,0,0)$ sul sottospazio generato da $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$,

Cosa vuol dire? Considero $W = \underbrace{\text{Span}((0,1,0),(0,0,1))}_{\text{piano}}$

Considero $W^\perp \to$ retta Ovviamente $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^3$

$(1,0,0)$ si scrive in modo unico come $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{in } W}}{w_1} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in } W^\perp}}{w_2}$

La proiezione richiesta è w_1

Chiamiamo $w_1 = (0,1,0)$

$w_2 = (0,0,1)$

Sono una base di W

$\boxed{1^\circ \text{modo}}$ Trovo w_3 ortogonale a w_1 e w_2 (sistema di 2 equ. come prima). A quel punto

$$W^\perp = \mathrm{Span}(w_3)$$

Poi risolvo

$$(1,0,0) = \underbrace{a w_1 + b w_2}_{\substack{\text{proiezione} \\ \text{su } W}} + \underbrace{c w_3}_{\substack{\text{proiezione} \\ \text{su } W^\perp}} \quad \text{(solito sistema)}$$

$\boxed{2^\circ \text{modo}}$ Applico GS a w_1 e w_2 e ottengo una base ortogonale, e se voglio anche ortonormale, di W

A quel p.to dovrei risolvere

$$(1,0,0) = a\hat{w}_1 + b\hat{w}_2 + c\hat{w}_3$$

Se ho a che fare con una base ortonormale, allora di sicuro so che

$$a = \langle (1,0,0), \hat{w}_1 \rangle_B$$

$$b = \langle (1,0,0), \hat{w}_2 \rangle_B$$

In tutto questo non serve nemmeno calcolare $\hat{w}_3$.

Quindi l'unica cosa da calcolare è $\hat{w}_2$.

(g) determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$,

Parto da una base qualunque, ad esempio la canonica, e poi faccio G.S.

Questa base è la base Sylvesterizzante (la matrice diventa l'identità)

(h) determinare la matrice che, rispetto alla base canonica, rappresenta la $\underset{\text{proiezione ortogonale}}{\text{proiezione}}$ sul $\underset{W}{\text{sottospazio}}$ di equazione cartesiana $y + z = 0$.

Osservo che $W = \text{Span}\left(\overset{w_1}{(1,0,0)}, \overset{w_2}{(0,1,-1)}\right)$

Cerchiamo una base di $W^\perp$, cioè un vettore ⊥ ad entrambi

$$(1\ 0\ 0)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad x+y+z=0$$

$$(0\ 1\ -1)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (0,1,-2)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \qquad z=1 \quad y=2 \quad x=-3$$

$$\underset{w_3}{(-3,2,1)}$$

Quindi stiamo cercando l'applicazione lineare $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ t.c.

$w_1 \longrightarrow w_1$

$w_2 \longrightarrow w_2$

$w_3 \longrightarrow 0$

e questa la sappiamo fare in tanti modi, ad esempio

$$\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&2\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&2\\0&-1&1\end{pmatrix}^{-1}$$

— 0 — 0 —

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 49

Note Title 28/11/2023

Come sono fatti tutti i prod. scalari in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$?

Sono in corrispondenza con le matrici simmetrica

$\mathbb{R}^2$

$$<(x_1,y_1),(x_2,y_2)> = (x_1\ y_1)\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1\ y_1)\begin{pmatrix} ax_2+cy_2 \\ cx_2+by_2 \end{pmatrix}$$

$$= ax_1x_2 + by_1y_2 + c\,x_1y_2 + c\,x_2y_1$$

$\mathbb{R}^3$

$$<(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)> = (x_1\ y_1\ z_1)\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a x_1x_2 + b y_1y_2 + c z_1z_2 \\ &+ d x_1y_2 + d x_2y_1 \\ &+ e x_1z_2 + e x_2z_1 \\ &+ f y_1z_2 + f z_1y_2 \end{aligned}$$

NO SIMMETRICO ↑

è simmetrico, ma non è lineare

$\boxed{x_1y_1,}$ $x_1x_2,$ $\boxed{x_1y_2,}$ $x_1y_2+x_2y_1,$ $x_1x_2+y_1y_2,$ $\boxed{x_1y_1+x_2y_2,}$

① Quali sono prod. scalari

② Quando lo sono, matrice risp. base canonica

③ Quando lo sono, trovare base Sylvesterizzante

$\boxed{x_1y_1}$ NON è un prodotto scalare

↑ prodotto delle prime due componenti del primo vettore

(non dipende dal secondo, non è simmetrico, non è lineare ...)

Esaminiamo $\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1 y_2 + x_2 y_1$

Calcoliamo la matrice rispetto alla base canonica

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} e_1 = (1,0,0) \\ e_2 = (0,1,0) \\ e_3 = (0,0,1) \end{array}$$

$\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = \langle e_3, e_3 \rangle = 0$

$\langle e_1, e_3 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle = 0$

$\langle e_1, e_2 \rangle = 1$

Calcoliamo la segnatura:

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Con gli autovalori

$$\text{Det}\,(B - \lambda Id) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda = -\lambda(\lambda^2 - 1)$$

$\lambda = 0, 1, -1$

Segnatura $= + - 0$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Det $B = 0$ (riga di tutti zeri)

Quindi almeno un autovalore è nullo.

$Tr = 0$

Quindi le possibilità sono: $\rightarrow + - 0$

$\rightarrow 0\,0\,0$, ma allora sarebbe la matrice nulla (perchè sarebbe dim Ker $= m_g(0) = m_a(0) = 3$)

Ora sappiamo che in una base opportuna il prodotto scalare ha come matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Come trovo la base?

Come v_3 uso una base del ker della matrice, ad esempio

$$v_3 = (0,0,1)$$

Come v_1 cerco un vettore che abbia prodotto scalare positivo con se stesso, ad esempio

$$v_1 = (1,1,0) \qquad \langle v_1, v_1 \rangle_B = 2$$

Ora come v_2 mi serve un vettore che sia $\perp$ a v_1 e a v_3

Impongo le condizioni

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x+y=0 \rightsquigarrow (1,-1,0) = v_2$$

Essere $\perp$ a v_3 è gratis ☺

Osservo che $\langle v_2, v_2 \rangle_B = -2$.

A questo punto la base Sylvesterizzante è

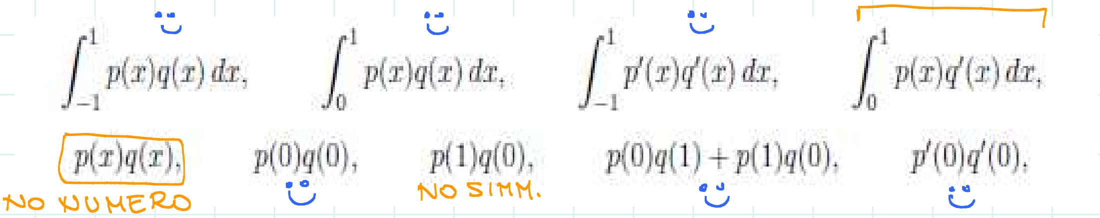
UNA

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \qquad v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \qquad v_3 = (0,0,1)$$

La verifica da fare sarebbe che

$$M^t B M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad M = (v_1 | v_2 | v_3)$$

—o—o—



☺ $\int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$, ☺ $\int_{0}^{1} p(x)q(x)\,dx$, ☺ $\int_{-1}^{1} p'(x)q'(x)\,dx$, NO SIMM $\int_{0}^{1} p(x)q'(x)\,dx$,

$\boxed{p(x)q(x)}$, NO NUMERO; $p(0)q(0)$, ☺; $p(1)q(0)$, NO SIMM.; $p(0)q(1)+p(1)q(0)$, ☺; $p'(0)q'(0)$. ☺

$p(x)$ e $q(x)$ sono in $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

$$\langle p,q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

☺

→ INPUT 2 pol. OUTPUT numero

→ $\langle p,q \rangle = \langle q,p \rangle$

→ $\langle \lambda p,q \rangle = \lambda \langle p,q \rangle$

→ $\langle p_1+p_2,q \rangle = \langle p_1,q \rangle + \langle p_2,q \rangle$

Consideriamo $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$

Matrice rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$

$\langle 1, 1 \rangle = 1$ $\quad \langle x, x \rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ $\quad \langle x^2, x^2 \rangle = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$

$\langle 1, x \rangle = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}$ $\quad \langle 1, x^2 \rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ $\quad \langle x, x^2 \rangle = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$

Matrice rispetto alla base canonica è

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = B$$

Se volessi fare $\langle 1+x-2x^2, 3+4x+7x^2 \rangle$ cosa dovrei fare?

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Moltiplico e integro

$\boxed{2° \text{ modo}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

Qual è la segnatura?

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Sylvester, ad esempio 1-2-3, e viene + + +

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Dico che il prod. scalare è def. positivo, cioè

$$\langle p, p \rangle = \int_0^1 p(x)^2 dx \underset{\uparrow \text{è un quadrato}}{>} 0 \quad \text{se} \quad p(x) \not\equiv 0$$

In una opportuna base la matrice diventa $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Una base Sylvesterizzante si può costruire a partire dalla canonica con GS

$v_1 = 1 \qquad v_2 = x \qquad v_3 = x^2$

$\hat{v}_1 = 1$

$$\hat{v}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, \hat{v}_1 \rangle_B}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle_B} \hat{v}_1 = x - \frac{\overset{\frac{1}{2}}{\nearrow}\langle x, 1 \rangle_B}{\underset{1}{\downarrow}\langle 1, 1 \rangle_B} \cdot 1 = x - \frac{1}{2}$$

Verifica : $\langle 1, x - \frac{1}{2} \rangle_B = 0$

$$\hat{v}_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_1 \rangle_B}{\langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle_B} \hat{v}_1 - \frac{\langle v_3, \hat{v}_2 \rangle_B}{\langle \hat{v}_2, \hat{v}_2 \rangle_B} \hat{v}_2 = \ldots$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 50

Note Title 01/12/2023

Esercizio 1 $q(x,y,z) = 2xy + 3xz + 4yz$

$\boxed{1}$ Calcolare la segnatura

Matrice associata $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 0 \end{pmatrix} = A$ Non c'è modo di partire con Sylvester :(

Det $A = 3+3 = 6 > 0$ Quindi ci sono due possibilità

$+++$ ⇝ Se fosse così, allora $\mathrm{Tr}(A) > 0$ e non è vero

$\boxed{+--}$ ← quella buona

Border line: considero la forma quadratica ristretta a

$\mathrm{Span}((1,0,0),(0,1,0))$ ← piano $z=0$

Questa forma ha come matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Questa ha Det $= -1$, quindi segnatura $+-$

Quindi esistono

$\left.\begin{array}{l} \to \text{una retta su cui è } + \text{ (def. pos.)} \\ \to \text{una retta su cui è } - \text{ (def. neg.)} \end{array}\right\}$ rette contenute nel piano $z=0$

Questo ci dice che la forma su tutto $\mathbb{R}^3$ ha $n_+ \geq 1$ e $n_- \geq 1$, il che basta per escludere che sia $+++$

$\boxed{2}$ Trovare un s.sp. di dim 2 su cui è def. negativa

Sarebbe bello completare i quadrati

$$2xy+3xz+4yz = (x+ay+bz)^2 - (x-ay+cz)^2$$

$$= \cancel{x^2} + \cancel{a^2y^2} + \cancel{b^2z^2} + \cancel{2axy} + \cancel{2bxz} + 2ab\,yz$$

$$- \cancel{x^2} - \cancel{a^2y^2} - \cancel{c^2z^2} + \cancel{2axy} - \cancel{2cxz} + 2ac\,yz$$

$$= (b^2-c^2)z^2 + 4axy + 2(b-c)xz + 2a(b+c)yz$$

Ora scegliamo

$a = \frac{1}{2}$ così sistemiamo xy e poi imponiamo $\begin{cases} b-c = \frac{3}{2} & \rightsquigarrow xz \\ b+c = 4 & \rightsquigarrow yz \end{cases}$

$\rightsquigarrow 2b = \frac{3}{2}+4 = \frac{11}{2} \rightsquigarrow b = \frac{11}{4} \rightsquigarrow c = 4-b = \frac{5}{4}$

Quindi $2xy+3xz+4yz = \left(x+\frac{1}{2}y+\frac{11}{4}z\right)^2 - \left(x-\frac{1}{2}y+\frac{5}{4}z\right)^2 - 6z^2$

Un s.sp. di dim 2 su cui è def. negativa è il piano

$x+\frac{1}{2}y+\frac{11}{4}z = 0$ cioè Span $((1,-2,0),(11,0,-4))$

$\boxed{3}$ Sylvesterizzare la matrice A, cioè trovare M matrice 3×3 invertibile tale che

$$M^t A M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le colonne di M siano v_1, v_2, v_3.

Come v_3 posso usare $(1,-2,0)$

Come v_2 uso $(11,0,-4)$ corretto con GS, cioè

$$v_2 = (11,0,-4) - \frac{\langle (11,0,-4),(1,-2,0)\rangle_A}{\langle (1,-2,0),(1,-2,0)\rangle_A}(1,-2,0)$$

Infine v_1 lo cerco bovinamente imponendo

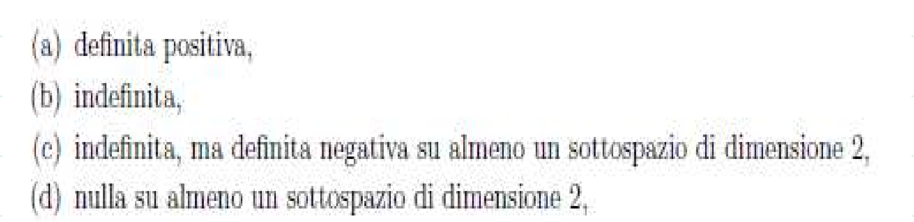
$$\begin{cases} \langle v_1, v_2\rangle_A = 0 \\ \langle v_1, v_3\rangle_A = 0 \end{cases}$$

Così v_1, v_2, v_3 sono A-ortogonali fra di loro.

A quel p.to basta dividerli per la cosa giusta.

— o — o —

Esercizio 2 $x^2+ay^2+4yz+6xz$



(a) definita positiva,

(b) indefinita,

(c) indefinita, ma definita negativa su almeno un sottospazio di dimensione 2,

(d) nulla su almeno un sottospazio di dimensione 2,

Per quali valori di a succedono queste cose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & a & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) La forma quadratica non è mai definita positiva

Basta osservare che $q(0,0,1) = 0$ per colpa dello 0 in fondo

(b) Deve esserci almeno un + e almeno un −.

Cerchiamo di capire la segnatura al variare di a

Sylvester 1−3−2

$\text{Det}_{1\times1} = 1$

$\text{Det}_{2\times2} = -9$

$\text{Det}_{3\times3} = -9a-4$

- Se $-9a-4 > 0$, cioè $a < -\frac{4}{9}$, allora $+\underset{P}{\smile}+\underset{V}{\smile}-\underset{V}{\smile}+$ ⇝ segn. $+--$
- Se $-9a-4 < 0$, cioè $a > -\frac{4}{9}$, allora $+\underset{P}{\smile}+\underset{V}{\smile}-\underset{P}{\smile}-$ ⇝ segn. $++-$
- Se $a = -\frac{4}{9}$, allora Det $= 0$ Tr $= 1-\frac{4}{9} = \frac{5}{9}$, quindi le possibilità sono $++0$ oppure $+-0$.

  Basta però osservare che

  $$q(0,1,0) = -\frac{4}{9}$$

  quindi una retta di negatività c'è, quindi $+-0$

Conclusione: la forma è sempre indefinita.

(c) Deve essere $--+$, quindi $a < -\frac{4}{9}$

(d) Nulla su almeno un s.sp. di dim 2.

Nei casi $++-$ e $+--$ questo non può succedere!

Consideriamo il caso $++-$. Qui esiste un s.sp. di dim 2 su cui è definita positiva. Chiamiamolo W_1.

Supponiamo ora che esista W_2 di dim 2 su cui $q \equiv 0$.

Ora W_1 e W_2 si intersecano per forza (per GRASSMANN) e sull'intersezione q deve essere nello stesso tempo $=0$ e >0.

Quindi l'unico caso in cui è possibile è quando $a = -\frac{4}{9}$.

In quel caso si trova esplicitamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -\frac{4}{9} & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Per esercizio completiamo i quadrati

$$x^2 - \frac{4}{9}y^2 + 6xz + 4yz = x^2 + 6xz - \frac{4}{9}y^2 + 4yz$$

$$= (x+3z)^2 - 9z^2 - \frac{4}{9}y^2 + 4yz$$

$$= (x+3z)^2 - \left(3z + \frac{2}{3}y\right)^2$$

Cerchiamo un elemento del $\ker = \text{Span}\left(\left(3, -\frac{9}{2}, -1\right)\right)$

$$= \text{Span}((+6, -9, -2))$$

Il sottospazio cercato è $x + 3z = 3z + \frac{2}{3}y$ oppure

$$x + 3z = -3z - \frac{2}{3}y$$

(Il ker non serviva).

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 51

Note Title 01/12/2023

(e) nulla sul sottospazio generato da (1, 2, 3),
(f) definita positiva su almeno un sottospazio di dimensione 2,
(g) definita negativa su almeno un sottospazio di dimensione 1,
(h) definita positiva sul sottospazio generato da (1, 1, 3) e (0, 2, 1).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & a & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(f) $a > -\frac{4}{9}$, cioè quando segnatura $++-$

(g) serve almeno un segno $-$ e questo è vero $\forall a$

(e) Basta imporre $q(1,2,3) = 0$

$$1 + a \cdot 4 + \underset{\overset{\uparrow}{6xz}}{18} + \underset{\overset{\uparrow}{4yz}}{24} = 0 \rightsquigarrow \text{Trovo } a$$

(Achtung! Per venire 0 da qualche parte, non serve che ci sia l'autovalore nullo. Basta che le parti con il + si semplifichino con quelle con il −)

(h) Span$\left(\overset{v_1}{\overset{\shortparallel}{(1,1,3)}}, \overset{v_2}{\overset{\shortparallel}{(0,2,1)}}\right)$ vogliamo che in questo s.sp. sia definita positiva.

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Mi scrivo la matrice della forma ristretta al sottospazio

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle_A & \langle v_1, v_2 \rangle_A \\ \langle v_1, v_2 \rangle_A & \langle v_2, v_2 \rangle_A \end{pmatrix}$$

Impongo che la matrice sia def. pos. cioè (essendo 2×2)

$\mathrm{Tr} > 0$ e $\mathrm{Det} > 0$

$\boxed{2° \text{ modo}}$ I punti dello span si scrivono come

$$t\,(1,1,3) + s\,(0,2,1) = (t, t+2s, 3t+s)$$

Adesso calcolo

$q(t, t+s, 3t+s)$ = forma quadratica nelle variabili (t, s)

e impongo che questa sia def. pos. (provare a trovare la matrice)

$\boxed{3° \text{ modo}}$ Scrivo il piano in cartesiana

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \rightsquigarrow (-5,-1,2) \rightsquigarrow 5x+y-2z=0$$

cioè volendo $y = 2z-5x$

Adesso calcolo $q(x, 2z-5x, z)$ e impongo che sia >0 tranne che per $x=0=z$

$$q(x, 2z-5x, z) = x^2 + a(2z-5x) + 6xz + 4(2z-5x)z$$

$=$ forma in x e z che posso studiare.

— o — o —

Esercizio 2 Siamo in $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$

$$(p(0)+2p(1))(q(0)+2q(1)),$$

L'espressione definisce un prodotto scalare?

① Coppia di pol. $p(x)$ e $q(x)$ → numero ☺
② Simmetrica ? ☺
③ Se al posto di p metto λp ☺
④ Se al posto di p metto p_1+p_2 ☺

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ $\qquad$ $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$

$$\langle p, q \rangle = (3a_0+2a_1+2a_2)(3b_0+2b_1+2b_2)$$
$$= \underline{9a_0b_0} + 6(a_0b_1 + b_0a_1) + 6(a_0b_2 + b_0a_2)$$
$$+ \underline{4a_1b_1} + \underline{4a_2b_2} + 4(a_1b_2 + a_2b_1)$$

La matrice associata al prodotto scalare è

$$\begin{array}{cccc} 9 & 6 & 6 & \leftarrow 1 \\ 6 & 4 & 4 & \leftarrow x \\ 6 & 4 & 4 & \leftarrow x^2 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ 1 & x & x^2 & \end{array}$$

Alternativa bovina (di più)

$< x, x > = (0+2)(0+2) = 4$ ☺

$< x^2, 1 > = (0+2)(1+2) = 6$ ☺

Analogamente trovo tutto il resto

Stabilire se è def. positivo

Sylvester 1-2-3 ☹ 2-3-1 ☹ Va sempre male al 2x2

Questo comunque ci dice che non può essere positivo ovunque (già solo ristretto a Span (1, x) si può annullare)

$$\begin{aligned} \text{Det} &= 36\cdot 4 + 36\cdot 4 + 36\cdot 4 \\ &\quad - 36\cdot 4 - 36\cdot 4 - 36\cdot 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(c'erano due righe uguali ☺)

Sicuramente c'è uno 0. Le possibilità sono

$+ + 0$ $\quad \boxed{+ - 0}$ $\quad \underset{\text{Tr} > 0}{\boxed{- - 0}}$ $\quad \boxed{\text{0 ancora più zeri}}$

No: perché il rango dovrebbe essere 1

$$<p, p> = (p(0) + 2p(1))^2 \geq 0$$

quindi non possiamo avere una direzione di negatività

L'unica possibilità è $+ + 0$.

Alternativa: la forma quadratica associata è

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= 9x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12xy + 12xz + 8yz \\ &= (3x + 2y + 2z)^2 \end{aligned}$$

il che dice che la segnatura è $+ 0 0$

Quindi: era sbagliato dire che il rango non è 1

(è 1 perché le colonne sono tutte multiple di (3, 2, 2))

La Sylvester è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Una base Sylvesterizzante è

$v_2 = \overset{x - x^2}{(0, 1, -1)}$ $\quad v_3 = (2, -3, 0)$ $\quad 2 - 3x$

base di ker

$v_1 = \overset{1}{(1, 0, 0)}$ se è indip. dagli altri, diviso per la costante giusta

Esercizio DIVERSO

Forma canonica di $\longrightarrow \begin{pmatrix} 9 & 6 & 6 \\ 6 & 4 & 4 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} = A$

$$\begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M^{-1} A M$$

Come trovo la M di passaggio?

Seconda e terza colonna sono autovettori di $\lambda = 0$ ⇝ base di ker

Prima colonna = autovettore di $\lambda = 17$

$$\begin{pmatrix} -8 & 6 & 6 \\ 6 & -13 & 4 \\ 6 & 4 & -13 \end{pmatrix}$$

Con un po' di pazienza trovo un elemento del ker

Se voglio posso fare la M ortogonale

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 52

Note Title 05/12/2023

AFFINITÀ Un'affinità è una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che si scrive nella forma

$$f(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{vettore} \\ n \text{ dim}}}{x}) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice} \\ n \times n}}{A}x + \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{vettore} \\ n\text{-dim}}}{b}$$

ISOMETRIA È un'affinità in cui la matrice A è ortogonale

Teorema di struttura delle isometrie

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che

$$\boxed{\operatorname{dist}(f(x), f(y)) = \operatorname{dist}(x,y) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall y \in \mathbb{R}^n}$$

funzione che conserva le distanze

Allora per forza $f(x) = Ax + b$ con A matrice ortogonale

Parte facile Se $f(x) = Ax + b$, con A ortogonale, allora f conserva le distanze

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(f(x), f(y))^2 &= \| f(x) - f(y) \|^2 \\
&= \| Ax + b - Ay - b \|^2 \\
&= \| Ax - Ay \|^2 \\
&= \| A(x-y) \|^2 \\
&\overset{?}{=} \| x - y \|^2
\end{aligned}$$

Si tratta di dimostrare che

$$\| Av \|^2 = \| v \|^2 \qquad \text{per ogni } v \in \mathbb{R}^n$$

$$\| Av \|^2 = \langle Av, Av \rangle = (Av)^t Av = v^t \underbrace{A^t A}_{Id} v = v^t v = \langle v, v \rangle = \| v \|^2$$

In $\mathbb{R}^2$ un'affinità dipende da 6 parametri

$$f(x,y) = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{x}} \underbrace{+}_{+} \underbrace{\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}}_{b} = \begin{pmatrix} ax+by+e \\ cx+dy+f \end{pmatrix}$$

<u>Esercizio 1</u> Trovare l'affinità tale che

$f(1,0) = (-1,1)$ $\qquad f(1,2) = (1,3)$ $\qquad f(0,4) = (2,1)$

$\boxed{\text{BOVINO}}$ Devo trovare a, b, c, d, e, f

$$\begin{cases} a+e = -1 \\ c+f = 1 \end{cases} \quad f(1,0) = (-1,1)$$
$$\begin{cases} a+2b+e = 1 \\ c+2d+f = 3 \end{cases} \quad f(1,2) = (1,3)$$
$$\begin{cases} 4b+e = 2 \\ 4d+f = 1 \end{cases} \quad f(0,4) = (2,1)$$

Risolvo il sistema e trovo i parametri

(osservo che a, c, e compaiono nelle eq. $1, 3, 5$
$\qquad\qquad\quad b, d, f \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2, 4, 6$)

$\boxed{\text{ALTERNATIVA PIÙ ASTUTA}}$

$f(\overset{v_1}{(1,0)}) = \overset{w_1}{(-1,1)}$ $\qquad f(\overset{v_2}{(1,2)}) = \overset{w_2}{(1,3)}$ $\qquad f(\overset{v_3}{(0,4)}) = \overset{w_3}{(2,1)}$

Noi sappiamo che $f(x) = Ax+b$.

Allora

$$w_1 - w_3 = f(v_1) - f(v_3) = Av_1 + b - Av_3 - b = Av_1 - Av_3 = A(v_1 - v_3)$$
$$w_2 - w_3 = f(v_2) - f(v_3) = Av_2 + b - Av_3 - b = Av_2 - Av_3 = A(v_2 - v_3)$$

In conclusione

$A(v_1 - v_3) = w_1 - w_3 \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A(v_2 - v_3) = w_2 - w_3 \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

da qui trovo A con i soliti metodi

Una volta che conosco A, poi trovo b.

— o — o —

Esercizio 2 Consideriamo l'affinità

$$f(x,y) = (2x+3y-1,\ x-y+6)$$

Troviamo A e b

$$f(x,y) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}}_{b}$$

① Determinare l'immagine della retta $y = 2x-3$

② Determinare la controimmagine della retta $y = 3x+4$

BOVINO PURO

① Scelgo 2 p.ti a caso della retta, ad esempio $(0,-3)$ e $(2,1)$

Calcolo dove vanno a finire

$f(0,-3) = (-10,9)$ $f(2,1) = (6,7)$

L'immagine sarà la retta che passa per le 2 immagini

$$(-10,9)+t(16,-2) \rightsquigarrow (-10,9)+t(8,-1) = (\underset{x}{\overset{\shortparallel}{-10+8t}}, \underset{y}{\overset{\shortparallel}{9-t}})$$

$$t = 9-y \rightsquigarrow x = -10+8t = -10+72-8y$$

$$\boxed{x+8y=62}$$

② Scelgo 2 p.ti a caso della retta, ad esempio $(0,4)$ e $(-1,1)$.

Calcolo le loro controimmagini risolvendo

$$\begin{cases} 2x+3y-1 = 0 \\ x-y+6 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+3y-1 = -1 \\ x-y+6 = 1 \end{cases}$$

Faccio la retta per i due p.ti trovati.

ASTUTA SLOGAN

→ le parametriche vanno bene avanti

→ le cartesiane vanno bene indietro

① Scrivo $y = 2x-3$ in parametrica

$$(x,y) = (0,-3) + t\,(1,2) = (t,-3+2t)$$

Sostituisco la parametrica nell'espressione dell'affinità

$$f(x,y) = (2x+3y-1,\ x-y+6)$$

$$f(t,-3+2t) = (2t-9+6t-1,\ t+3-2t+6)$$

$$= (8t-10,\ -t+9)$$

Questa è l'immagine che se voglio passo in cartesiana.

Oss. Questo funziona anche in $\mathbb{R}^n$.

Se $f(x) = Ax+b$, e la retta è x_0+tv, allora l'immagine è

$$f(x_0+tv) = A(x_0+tv)+b$$

$$= Ax_0+tAv+b = \underbrace{(Ax_0+b)}_{\text{nuovo p.to base}}+t\underbrace{Av}_{\text{nuova direzione}}$$

② Voglio fare la controimmagine di $y=3x+4$

Ricordiamo che $f(x,y) = (\underbrace{2x+3y-1}_{\text{nuovo } x},\ \underbrace{x-y+6}_{\text{nuovo } y})$

Li sostituisco nella cartesiana

$$x-y+6 = 3(2x+3y-1)+4$$

Svolgo i calcoli

$$x-y+6 = 6x+9y-3+4 \leadsto 5x+10y-5=0$$

$$\leadsto x+2y-1=0$$

[Controllare che con il bovino venisse uguale].

— o — o —

OMOTETIE Dilatazioni / Contrazioni

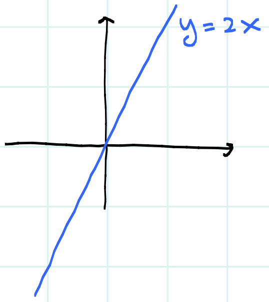
Sono particolari affinità in cui $A = \lambda\, Id$

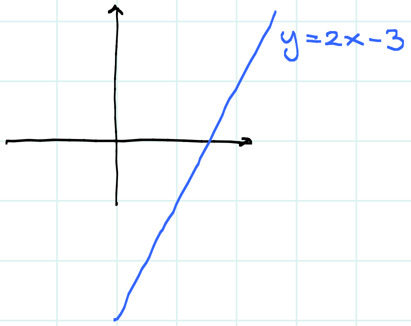
$$f(x) = \lambda x + b$$

Esempio Omotetia di fattore 3 rispetto all'origine

$f(x,y) = (3x,3y)$

① Calcolare l'immagine delle rette $y = 2x$ $y = 2x-3$





Le parametriche vanno bene avanti!

$y = 2x$

$(x,y) = (t,2t)$

$y = 2x-3$

$(x,y) = (0,-3)+t(1,2)$

$= (t,2t-3)$

Applico $f(x,y)$

$(3t,6t) = t(3,6)$

$= t(1,2)$

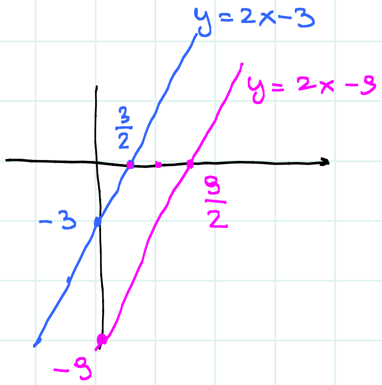
quindi è rimasta la stessa retta

$(3t, 6t-9) = (0,-9)+t(3,6)$

$= (0,-9)+t(1,2)$

$= (t,-9+2t)$

$y = 2x-9$



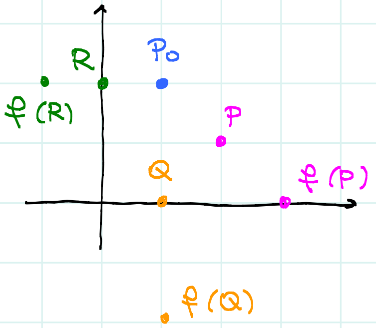
— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 53

Note Title 05/12/2023

Esercizio 1 Scrivere l'espressione dell'omotetia con centro in $(1,2)$ e fattore di dilatazione 2

Strategia generale



$$P \rightsquigarrow P-P_0 \rightsquigarrow 2\,(P-P_0) \rightsquigarrow 2\,(P-P_0)+P_0$$

↑ porto l'origine in Po

↑ dilato di fattore 2

↑ riporto l'origine al suo posto

$$(x,y) \rightsquigarrow (x-1,\,y-2) \rightsquigarrow (2x-2,\,2y-4) \rightsquigarrow (2x-1,\,2y-2)$$

L'omotetia cercata è $f(x,y) = (2x-1,\,2y-2)$

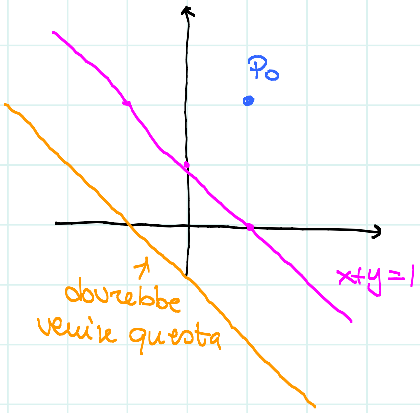
Facciamo qualche verifica

$f(1,2) = (1,2)$ ☺

$f(2,1) = (3,0)$ ☺ P f(P)

$f(0,2) = (-1,2)$ ☺ R f(R)

Calcolare l'immagine della retta $x+y=1$



dovrebbe venire questa

Parametrica $(0,1)+t\,(1,-1) = (t,\,1-t)$

Sostituisco in f :

$$(2t-1,\; 2(1-t)-2) = (2t-1,\,-2t)$$
$$= (-1,0)+t\,(2,-2)$$
$$= (-1,0)+t\,(1,-1)$$

Volendo torno in cartesiana e ottengo $x+y=-1$

—o—o—

ISOMETRIE DEL PIANO

$f(x) = \underset{\uparrow}{A}x + b$

matrice 2x2 ortogonale

Le matrici 2x2 ortogonali sono solo di due tipi

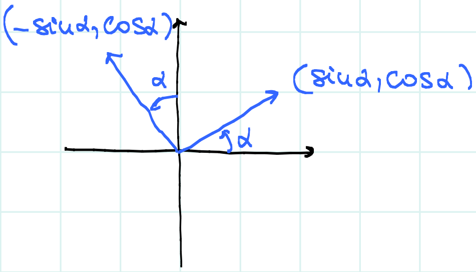
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

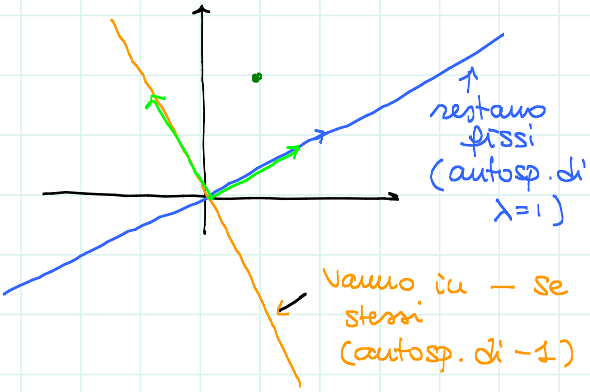
$\mathrm{Det} = 1$	$\mathrm{Det} = -1$
$\mathrm{Tr} = 2\cos\alpha$	$\mathrm{Tr} = 0$
Autovalori $\cos\alpha \pm i\sin\alpha$	Autovalori : ± 1

(verificare somma e prodotto)

Questa è la JORDAN REALE di se stessa

La matrice è simmetrica, quindi gli autovettori sono ortogonali





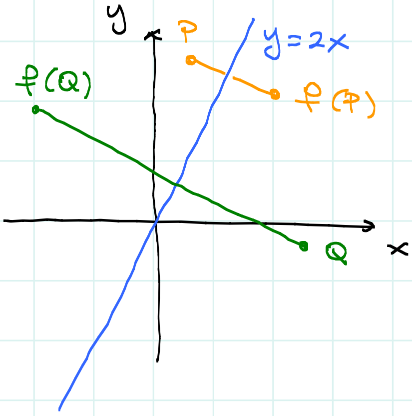
$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$

Questa è la SIMMETRIA rispetto all'autospazio di 1

Questa è la ROTAZIONE risp. all'origine di un angolo α in verso ANTIORARIO.

Esercizio 2 Scrivere la simmetria rispetto alla retta $y = 2x$



La retta passa per l'origine, quindi $b=0$

Cosa deve fare questa applicazione?

Prendiamo una base ortonormale

con v_1 sulla retta

$(1,2)$ e $(2,-1)$

Ora vogliamo

$f(1,2) = (1,2)$ (sta sulla retta, quindi resta fisso)

$f(2,-1) = (-2,1)$ (è ⊥ alla retta, quindi va in − se stesso)

Questo è un problema risolto tante volte

$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ $\qquad v_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ Base ortonormale

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} & -\frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} & -\frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix}^{-1}$$

simmetria
dalla $\{v_1, v_2\}$
alla $\{v_1, v_2\}$

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Conclusione $A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ ← è una matrice di simmetria

Quindi

$$\boxed{f(x,y) = \left(-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y\right)}$$

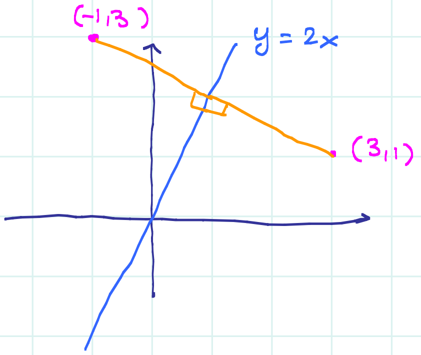
Facciamo qualche verifica

Quali sono i p.ti fissi di $f(x,y)$

Risolvo $f(x,y) = (x,y)$

$$\begin{cases} -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = x \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y = y \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x+4y = 5x \\ 4x+3y = 5y \end{cases} \qquad \begin{cases} -8x+4y = 0 \\ 4x-2y = 0 \end{cases}$$

Viene $y = 2x$ ☺ è la retta rispetto alla quale stiamo facendo la simmetria



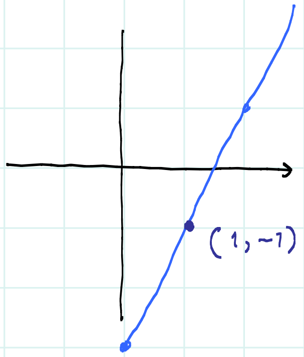
Altra verifica: $f(3,1) = (-1,3)$

Oss. Con lo stesso metodo si può costruire più in generale la simmetria rispetto alla retta $ax+by = 0$

Basta partire con $v_1 = \left(\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$

$$v_2 = \left(\frac{a}{\sqrt{\cdots}}, \frac{b}{\sqrt{\cdots}} \right)$$

Esercizio 3 Scrivere la simmetria rispetto alla retta $y = 2x-3$



Ora la retta non passa più per l'origine

Scelgo un p.to della retta, ad esempio $P_0 = (1,-1)$.

Faccio il solito giochino

$$P \rightsquigarrow P-P_0 \rightsquigarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{simmetria} \\ \text{di prima}}}{S}(P-P_0) \rightsquigarrow S(P-P_0)+P_0$$

$$(x,y) \rightsquigarrow (x-1,y+1) \rightsquigarrow \frac{1}{5}\left(-3(x-1)+4(y+1),\ 4(x-1)+3(y+1)\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(-3x+4y+7,\ 4x+3y-1\right) = \left(-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+\frac{7}{5},\ \frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{1}{5}\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{aggiungo}\\ (1,-1)}}{\rightsquigarrow} \boxed{\left(-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+\frac{12}{5},\ \frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{6}{5}\right)}$$

Se risolvo $f(x,y) = (x,y)$ DEVE venire la retta $y=2x-3$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 54

Note Title 05/12/2023

CLASSIFICAZIONE DELLE ISOMETRIE DEL PIANO

Si guarda l'insieme dei p.ti fissi (cioè le sol. di $f(x,y)=(x,y)$)

Ci sono varie possibilità

① Fix = tutto $\mathbb{R}^2$ ⇝ f è l'identità

② Fix = una retta ⇝ f è la simmetria rispetto a quella retta

③ Fix = singolo punto ⇝ f è una rotazione di un certo angolo intorno a quel punto (l'angolo lo deduco dalla matrice)

④ Fix = ∅, cioè non ci sono p.ti fissi. Allora ci sono 2 possib.

$\boxed{4.1}$ f è una traslazione $f(x) = x+b$ $(A = Id,\ b \neq 0)$

$\boxed{4.2}$ f è una simmetria rispetto ad una retta, seguita da una traslazione parallela alla retta

<u>Esempi</u> ① $f(x,y) = (2x+4,\ 2y-6)$

$$f(x,y) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Non è ortogonale, quindi non è una isometria}}}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Matrice $A = 2Id$ ⇝ f è una dilatazione di fattore 2 rispetto ad un p.to.

Quale punto? Quello che resta fisso, cioè

$$\begin{cases} 2x+4 = x \\ 2y-6 = y \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = -4 \\ y = 6 \end{matrix}$$

②
$$\frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y + 5, x + \sqrt{3}y + 7),$$

$$f(x,y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}, \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{7}{2}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

↑
Non è una matrice ortogonale,
quindi non è isometria

③
$$\frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y + 5, x + \sqrt{3}y + 7),$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

↑
ortogonale
Det = 1 ⇝ matrice di rotazione

Quindi f è una rotazione rispetto ad un pto che posso trovare risolvendo $f(x,y) = (x,y)$.

Di quale angolo ruotiamo?

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow \alpha = 30° \text{ antiorario}$$

④
$$\left(\frac{-3x + 4y + 1}{5}, \frac{4x + 3y - 2}{5}\right),$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

↑
Matrice ortogonale, quindi è una isometria
Det = −1, quindi è una matrice di simmetria

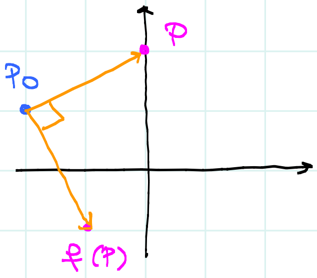
Vediamo chi sono i p.ti fissi

$f(x,y) = (x,y)$ $\qquad \begin{cases} \dfrac{-3x+4y+1}{5} = x \\ \dfrac{4x+3y-2}{5} = y \end{cases}$

$\begin{cases} -3x+4y+1 = 5x \\ 4x+3y-2 = 5y \end{cases} \qquad \begin{cases} -8x+4y = -1 \\ 4x-2y = 2 \end{cases} \rightsquigarrow 2x-y=1 \rightsquigarrow y=2x-1$

Quindi f è la simmetria rispetto alla retta $y=2x-1$.

Esercizio 2 Scrivere la rotazione di 90° in verso orario rispetto al punto $(-2,1)$



Se fosse rispetto all'origine userei la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{con } \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché è} \\ \text{oraria}}}{\alpha = -90°}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = R$$

Non essendo rispetto all'origine, facciamo la solita storia

$$P \rightsquigarrow P-P_0 \rightsquigarrow R(P-P_0) \rightsquigarrow R(P-P_0)+P_0$$

$$(x,y) \rightsquigarrow (x+2,y-1) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-1 \\ -x-2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} y-3 \\ -x-1 \end{pmatrix}$$

Conclusione $f(x,y) = (y-3, -x-1)$

Qualche verifica: $f(-2,1) = (-2,1)$ ☺
$f(0,2) = (-1,-1)$ ☺

P.ti fissi $\begin{cases} y-3 = x \\ -x-1 = y \end{cases} \quad \begin{cases} x-y = -3 \\ x+y = -1 \end{cases} \quad 2x=-4 \quad x=-2 \quad y=1$ ☺

Composizione di affinità e/o isometrie

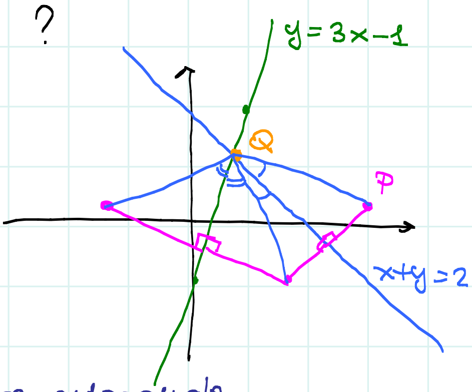
$f_1(x) = A_1 x + b_1$ $\qquad$ $f_2(x) = A_2 x + b_2$

$$f_2(f_1(x)) = A_2(f_1(x)) + b_2 = A_2(A_1 x + b_1) + b_2$$
$$= \underbrace{A_2 A_1}_{\text{nuova } A} x + \underbrace{A_2 b_1 + b_2}_{\text{nuovo } b}$$

↑ prima f_1, poi f_2

= prodotto delle A precedenti

Domanda: cosa succede se faccio prima la simmetria rispetto alla retta $x+y=2$ e poi la simmetria rispetto alla retta $y=3x-1$?



La prima è $f(x) = A_1 x + b_1$
seconda $f(x) = A_2 x + b_2$

La composizione avrà come matrice
$A_2 A_1$

Il prodotto di matrici ortogonali è ancora ortogonale, quindi è ancora una isometria.

Ma A_1 e A_2 hanno Det $= -1$ perché sono simmetrie, quindi $A_1 A_2$ ha Det $= +1$, quindi è una rotazione!

Rispetto all'unico p.to che resta fisso?

Questo p.to è l'intersezione delle 2 rette!

Di quale angolo stiamo ruotando?

Del doppio dell'angolo compreso fra le due rette.

Analogamente: se faccio la simmetria rispetto a 2023 rette che cosa posso ottenere?

Il Det finale è -1, quindi sarà una simmetria, eventualmente seguita da una traslazione.

Oss. Quando si compongono due matrici di rotazione, si ottiene una rotazione pari alla somma degli angoli

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

Cosa succede se faccio

→ prima rot. oraria di 26° intorno a (5, −11)

→ poi rot. antioraria di 26° intorno a (7, −43)

La composizione delle due matrici è l'identità, quindi ottengo una traslazione !!

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 55

Note Title 12/12/2023

ISOMETRIE DELLO SPAZIO

$$f(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice } 3\times 3 \text{ ortogonale}}}{A}x + b$$

Problemi:

① Data una descrizione geom., trovare l'espressione di f

② Data un'espressione, capire se è un'isometria e se sì di cosa si tratta

③ Determinare immagine e controimmagine di p.ti, rette, piani.

Come sono fatte le matrici 3x3 ortogonali

(Caso con $b=0$)

Sono di 3 famiglie

1 Simmetrie rispetto a piani

La forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Autovalori: $+1, +1, -1$

$\det = -1$

(un piano va in se stesso, l'ortogonale in meno se stesso)

2 Rotazioni rispetto a rette

rotazione nel piano ⊥ alla direzione fissa

La forma canonica è

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Direzione che va in se stessa}}}{1} \end{array}\right)$$

$\det = 1$

Autovalori: $+1$, $\cos\theta \pm i\sin\theta$

3 Rotazione seguita da simmetria

La forma canonica è

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Direzione che va in} \\ -\text{ se stessa}}}{-1} \end{array}\right)$$

rotazione

$\det = -1$

Autovalori: -1, $\cos\theta \pm i\sin\theta$

Oss. La matrice identica rientra nel $\boxed{2}$ quando $\theta = 0°$
La matrice $-Id$ rientra nel $\boxed{3}$ quando $\theta = 180°$

CLASSIFICAZIONE COMPLETA DELLE ISOMETRIE

Si guarda l'insieme dei p.ti fissi, cioè si risolve il sistema lin.

$$f(x) = x$$

$\boxed{1}$ Fix = tutto $\mathbb{R}^3$ ⤳ $f(x)$ = Identità ($A = Id$, $b = 0$) Det = 1

$\boxed{2}$ Fix = piano ⤳ $f(x)$ = simmetria risp. a quel piano
(A = matrice di simmetria) Det = −1

$\boxed{3}$ Fix = retta ⤳ $f(x)$ = rotazione di angolo θ intorno alla retta
(A = matrice di rotazione) Det = 1

$\boxed{4}$ Fix = singolo p.to ⤳ $f(x)$ = rotazione risp. retta passante per il p.to seguita da simmetria rispetto al piano per il p.to $\perp$ alla retta stessa
(A = matrice ortogonale di tipo 3)

$\boxed{5}$ Fix = $\emptyset$ Allora si aprono 3 sottocasi

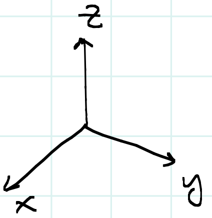
$\boxed{5.1}$ $f(x)$ = traslazione ($A = Id$)

$\boxed{5.2}$ $f(x)$ = simmetria risp. ad un piano seguita da traslazione di un vettore parallelo al piano
(A = matrice di simmetria)

$\boxed{5.3}$ $f(x)$ = rotazione intorno ad una retta seguita da traslazione nella direzione della retta.
(A = matrice di rotazione)

— o — o —

Esempio 1 Scrivere la simmetria rispetto al piano $xy = \mathrm{Span}((1,0,0),(0,1,0))$ $[z=0]$



Si tratta dell'applicazione lineare t.c.

$$\begin{aligned}(1,0,0)&\to(1,0,0)\\(0,1,0)&\to(0,1,0)\\(0,0,1)&\to(0,0,-1)\end{aligned}\qquad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Esempio 2 Simmetria rispetto al piano yz $[x=0]$
$= \mathrm{Span}((0,1,0),(0,0,1))$

$$\begin{aligned}(1,0,0)&\to(-1,0,0)\\(0,1,0)&\to(0,1,0)\\(0,0,1)&\to(0,0,1)\end{aligned}\qquad\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Esempio 3 Simmetria rispetto al piano $x=5$
(occhio: il piano non passa per l'origine)

$$P \to P-P_0 \to \mathrm{Simm}(P-P_0) \to \mathrm{Simm}(P-P_0)+P_0$$

P_0 = p.to qualunque del piano $=(5,0,0)$

$$(x,y,z)\to(x-5,y,z)\to\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-5\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow (10-x,y,z)$

L'espressione finale è $\boxed{(x,y,z)\to(10-x,y,z)}$

Potevo scegliere $P_0=(5,1,-3)$ ☺

$$\underset{P}{(x,y,z)} \rightsquigarrow \underset{P-P_0}{(x-5,y-1,z+3)} \rightsquigarrow \underset{\mathrm{Simm}(P-P_0)}{(5-x,y-1,z+3)} \underset{\text{aggiungo } P_0}{\rightsquigarrow} (10-x,y,z)$$

Esempio 4 Simmetria rispetto al piano

$$x-2y+5z=0 \leftarrow \text{passa per l'origine}$$

Slogan: il piano resta fisso, la retta ⊥ va in − se stessa

Scrivo il piano come

$$\mathrm{Span}\big(\underset{v_1}{(2,1,0)},\ \underset{v_2}{(5,0,-1)}\big)$$

La retta perpendicolare è $\mathrm{Span}\big(\underset{v_3}{(1,-2,5)}\big)$

Stiamo cercando l'appl. lin. t.c.

$$v_1 \to v_1 \qquad v_2 \to v_2 \qquad v_3 \to -v_3$$

$$\underset{C \longleftarrow \underset{\{v_1,v_2,v_3\}}{\overset{\shortparallel}{B}}}{\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}} \underset{\longleftarrow B}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \underset{\longleftarrow C}{\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}^{-1}}$$

Per semplificare il calcolo dell'inversa potevamo usare una base ortonormale $\{w_1, w_2, w_3\}$ con $\mathrm{Span}(w_1, w_2)$ = piano dato

Come la posso costruire?

$\boxed{1° \text{ modo}}$ GS a partire da v_1, v_2, v_3

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Costruisco un nuovo v_2 a partire da v_1 e v_3 mediante la formula misteriosa (oppure un nuovo v_1 a partire da v_2 e v_3)

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (5,-10,-5) \rightsquigarrow (1,-2,-1) \quad ☺$$

Basta dividere per le radici delle norme e abbiamo base ortonormale.

Esempio 4 bis Scrivere la simmetria rispetto al piano

$$x - 2y + 5z = 7 \leftarrow \text{non passa per l'origine}$$

Prendo P_0 nel piano, ad esempio $P_0 = (7,0,0)$ e procedo al solito modo

$$(x,y,z) \rightsquigarrow (x-7,y,z) \rightsquigarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice} \\ \text{dell'esempio 4}}}{A}(x-7,y,z)$$

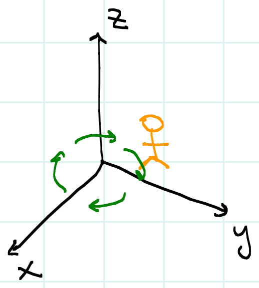
$$\rightsquigarrow A(x-7,y,z) + (7,0,0)$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 56

Note Title 12/12/2023

Esempio 1 Rotazione di 90° intorno all'asse z in verso giudicato ORARIO da un omino in piedi lungo il semiasse delle z positive

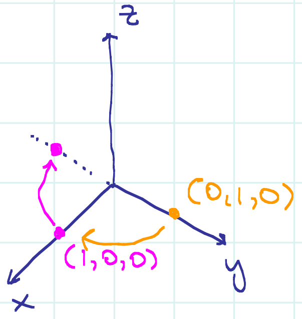


$$\boxed{\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

Rotazione di θ antioraria di angolo θ

Nel nostro caso dobbiamo prendere $\theta = -90°$

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \text{rotazione richiesta}$$



Verifica: $(1,0,0) \to (0,-1,0)$ ☺

$(0,1,0) \to (1,0,0)$ ☺

Determinare l'immagine del piano $x-2y+5z=7$

Slogan: le parametriche vanno bene avanti!

Parametrica del piano

$$(7,0,0)+t\,(2,1,0)+s\,(5,0,-1) = (7+2t+5s,\ t,\ -s)$$

La trasformazione era

$$(x,y,z) \to (y,-x,z) \quad \left(\text{matrice}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)$$

volendo posso cambiare segno

$$(7+2t+5s,\ t,\ -s) \to (t,\ -7-2t-5s,\ -s)$$

$$= (0,-7,0)+t\,(1,-2,0)+s\,\overline{(0,-5,-1)}$$

Nuovo piano, che se serve passo in cartesiana

Determinare l'immagine della retta

$(1,2,3) + t\ (1,-1,1)$

Stessa cosa $(1+t, 2-t, 3+t) \longrightarrow (2-t, -1-t, 3+t)$

$= (2,-1,3) + t\,(-1,-1,1)$

Determinare la controimmagine del piano

$2x+3y+5z = 8$

Slogan: le cartesiane vanno bene indietro

Al posto di (x,y,z) metto $(y,-x,z)$ e trovo

$\boxed{2y-3x+5z = 8}$

Determinare la controimmagine della retta

$(1,0,1) + t\ (2,1,6)$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Mi scrivo la retta data in cartesiana, cioè come intersezione di due piani, e poi porto indietro le cartesiane dei due piani

$$\begin{cases} x-2y = 1 \\ 3x - z = 2 \end{cases}$$

i due piani passano per $(1,0,1)$

gli (a,b,c) dei due piani sono $\perp$ alla direzione della retta

Tiro indietro i due piani (metto $(y,-x,z)$ al posto di (x,y,z))

$$\begin{cases} y+2x = 1 \\ 3y - z = 2 \end{cases}$$

Risolvo e trovo la parametrica della retta richiesta

$\boxed{2^o \text{ modo}}$ BOVINO

Prendo P e Q sulla retta, ad esempio

$P = (1,0,1) \qquad Q = (3,1,7) \leftarrow t=1$

Calcolo che controimmagini

$(y,-x,z) = (1,0,1) \qquad (y,-x,z) = (3,1,7)$

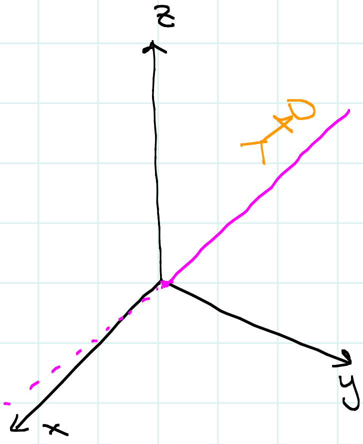
$f^{-1}(P) = (0,1,1) \qquad f^{-1}(Q) = (-1,3,7)$

Faccio la retta per i due nuovi p.ti

$(0,1,1) + t(-1,2,6)$

[Verificare che venga lo stesso nei 2 modi]

Esempio 2 Rotazione di 90° in verso antiorario rispetto alla retta $t(1,2,3)$ (retta che passa per l'origine) per un omino in piedi nella direzione $(1,2,3)$



Ci procuriamo una base ORTONORMALE di $\mathbb{R}^3$ che contiene (un multiplo) del vettore $(1,2,3)$

$v_1 = (1,2,3)$

$v_2 = (2,-1,0)$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (+3,6,-5) = v_3$$

Li normalizzo

$$\hat{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right) \quad \hat{v}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) \quad \hat{v}_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{6}{\sqrt{70}}, \frac{-5}{\sqrt{70}}\right)$$

$\uparrow$
faccio in maniera che l'asse di rotazione sia su $\hat{v}_3$

In questa base la rotazione sarebbe

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

↑ $\hat{v}_3$ resta fisso e il ⊥ ruota

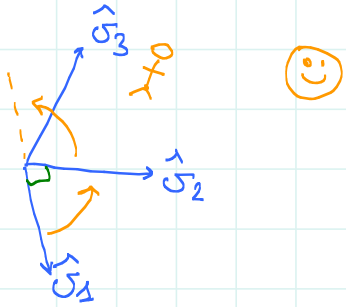
Mettendo $\theta = 90°$ troviamo la matrice

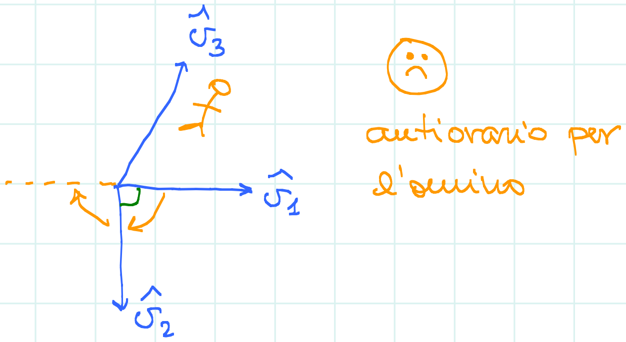
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R$$

Ora basta prendere $M = \left(\hat{v}_1 \middle| \hat{v}_2 \middle| \hat{v}_3\right)$ e calcolare

MRM^{-1} che coincide con MRM^t.

In realtà NON basta





ORIENTAZIONE

Una base ortonormale $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ è GIUSTA se un omino in piedi lungo v_3 vede che v_1 diventa v_2 con una rotazione di 90° ANTIORARIA

La base è sbagliata se la rotazione serve ORARIA

Come la riconosco? Guardo il Det della matrice cambio base

Det = 1 ⇝ giusta Det = −1 ⇝ sbagliata

Conclusione :

→ il procedimento MRM^t funziona se M è giusta

→ se la base è sbagliata, basta scambiare v_1 e v_2 e diventa giusta.

(In alternativa uso la base "sbagliata" e metto un segno – rispetto all'angolo di rotazione)

— o — o —

Oss. Se uso la formula misteriosa per produrre v_3 a partire da v_1 e v_2 (v_1 sopra e v_2 sotto), allora la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ che ottengo è giusta.

— o — o —

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 57

Note Title 12/12/2023

① $(x,-y,z)$ ② $(y,-z,x)$ ③ $(y,-x,z)$

Classificare le trasformazioni

① $(x,y,z) \to (x,-y,z)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$

Matrice ortogonale, $b=0$ ⇝ isometria

Autovalori: $+1, +1, -1$, quindi è una una matrice di simmetria

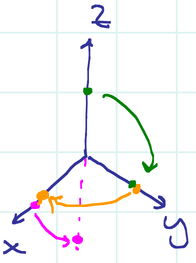
La simmetria è rispetto all'autospazio di 1, cioè $\text{Span}((1,0,0),(0,0,1))$

cioè rispetto al piano $\boxed{y=0}$

Se volevo calcolare i pti fissi

$(x,-y,z) = (x,y,z)$ $\begin{cases} x = x \\ -y = y \\ z = z \end{cases}$ $\begin{cases} 0 = 0 \\ \boxed{y=0} \leftarrow \\ 0 = 0 \end{cases}$

② $(x,y,z) \to (y,-z,x)$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$



Matrice ortogonale ⇝ isometria (con $b=0$, quindi lineare)

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Studio i pti fissi

$\begin{cases} x = y \\ y = -z \\ z = x \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$

l'unica soluzione è $(0,0,0)$

$\rightsquigarrow$ rotazione intorno ad un asse seguita da simmetria rispetto al piano ⊥ all'asse e passante per l'origine

Domanda: chi è l'asse? Quanto è l'angolo?

↑ Quello che va in − se stesso, cioè l'autospazio di −1

Gli autovalori saranno -1 e $\cos\theta \pm i \sin\theta$

$\boxed{2^\circ \text{modo}}$ Calcolo autovalori e autovettori

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad p_A(\lambda) = -\lambda^3 - 1 = -(\lambda^3+1) = -(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1)$$

Autovalori: $\lambda = -1$ $\qquad \lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Autospazio di -1

$$A + Id = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \ker = \text{Span}((1,-1,-1))$$

↑ asse di rotazione

Sto ruotando di un angolo θ con

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ $\qquad \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\rightsquigarrow$ $\theta = 60°$

— o — o —

③ $(x,y,z) \to (y,-x,z)$ $\qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Volendo posso calcolare autovalori e autovettori, però è già la Jordan reale di se stessa

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } \theta = -90°$$

⇝ Rotazione oraria di 90° rispetto ad omino in piedi lungo semiasse z positivo.

— o — o —

$(3-x, 5-z, 7-y)$ ④ $(3+y, 5+z, 7+x)$ ⑤ $(3+y, 5-z, 7+x)$ ⑥

④ Scriviamola come $f(x) = Ax + b$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\uparrow\ A \text{ matrice ortogonale}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\uparrow\ b}$$

⇝ ISOMETRIA

Cerco i p.ti fissi

$$\begin{cases} 3 - x = x \\ 5 - z = y \\ 7 - y = z \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = 3 \\ y + z = 5 \\ y + z = 7 \end{cases}$$

} il sistema è impossibile ⇝ Nessun p.to fisso

Restano 2 possibilità: $\boxed{5.2}$ Simmetria + traslazione //

$\boxed{5.3}$ Rotazione + traslazione lungo asse

$\det A = +1$ ⇝ Matrice di rotazione!

Come posso trovare angolo di rotazione e direzione della retta di rotazione?

↑ autovalori $\cos\theta \pm i \sin\theta$

↑ autospazio di 1

Direzione retta

$$A - Id = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Ker} = \mathrm{Span}((0,1,-1))$$

Se voglio davvero la retta intorno alla quale stiamo ruotando, sappiamo che sarà del tipo

$$(a,b,c) + t\,(0,1,-1) = (a, b+t, c-t)$$

e sappiamo che la sua immagine coincide con se stessa (perché lungo la retta stiamo solo traslando).

Quindi basta imporre

$(3-x, 5-z, 7-y)$

$$(a, b+t, c-t) \to (3-a, 5-c+t, 7-b-t)$$
$$= (3-a, 5-c, 7-b) + t\,\underset{\text{direzione giusta}}{\underset{\uparrow}{(0,1,-1)}}$$

Come faccio a capire se è la stessa retta ?

Fatto generale : se ho $P_0 + t v_0$ e $Q_0 + t v_0$

Come capisco se sono la stessa retta ?

Basta imporre che $P_0 - Q_0$ sia multiplo di v_0.

Nel nostro caso

$P_0 = (a,b,c) \qquad Q_0 = (3-a, 5-c, 7-b)$

Quindi

$(2a-3, 5-c-b, 7-b-c)$ deve essere multiplo di $(0,1,-1)$, cioè

$$\begin{cases} 2a-3 = 0 \\ 5-c-b+7-b-c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b+c = 6 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix} a = \frac{3}{2} & \\ b = 4 & c = 2 \end{matrix}$$

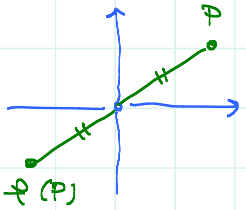
Per sapere di quanto traslo, basta vedere dove va $(\frac{3}{2}, 4, 2)$.

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 58

Note Title 15/12/2023

Simmetria centrale

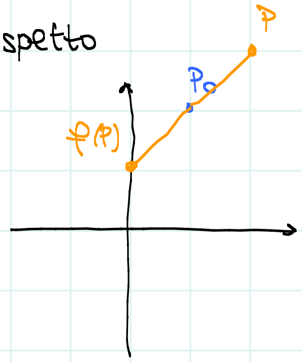
Rispetto all'origine In $\mathbb{R}^2$ $(x,y) \to (-x,-y)$



in $\mathbb{R}^3$ $(x,y,z) \to (-x,-y,-z)$

In $\mathbb{R}^2$ equivale a ruotare di 180° intorno all'origine (il verso non importa)

Esempio 1 Scrivere in $\mathbb{R}^2$ la simmetria centrale rispetto al pto $\underset{P_0}{\underset{\shortparallel}{(1,2)}}$



$P \rightsquigarrow P-P_0 \rightsquigarrow \text{Simm}(P-P_0) \rightsquigarrow \text{Simm}(P-P_0)+P_0$

$(x,y) \rightsquigarrow (x-1,y-2) \rightsquigarrow (1-x,2-y) \rightsquigarrow (2-x,4-y)$

Verifica: $(1,2) \to (1,2)$ ☺

$(2,3) \to (0,1)$ ☺

Esempio 2 Scrivere in $\mathbb{R}^3$ la simm. centrale rispetto a $\underset{P_0}{\underset{\shortparallel}{(5,-2,3)}}$

$(x,y,z) \rightsquigarrow (x-5,y+2,z-3) \rightsquigarrow (5-x,-2-y,3-z) \rightsquigarrow (10-x,-4-y,6-z)$

Esempio 3 Cosa succede se faccio prima simm. centrale rispetto a $(5,-2,3)$ e poi la simm. centrale risp. a $(7,1,2)$?

$S_1(x,y,z) = (10-x,-4-y,6-z)$ $\quad S_2(x,y,z) = (14-x,2-y,4-z)$

$$S_2(S_1(x,y,z)) = S_2(10-x,-4-y,6-z)$$
$$= (14-10+x, 2+4+y, 4-6+z) = (4+x,6+y,-2+z)$$
$$= (x,y,z)+(4,6,-2) \leftarrow \text{Traslazione di } (4,6,-2)$$

Era prevedibile che sarebbe venuta una traslazione ?

Sì! Perché quando compongo più in generale due affinità sto componendo le due matrici

$$\Big(f_1(x) = A_1x+b_1\ ,\ f_2(x) = A_2x+b_2$$

$$f_2(f_1(x)) = A_2(A_1x+b_1)+b_2 = A_1A_2x + Ab_1+b_2 \ \Big)$$

Ora le simmetrie centrali hanno matrice = − Id, che moltiplicata per se stessa viene l'identità.

— o — o —

Distanza tra 2 rette sghembe

Calcolare la distanza tra le rette

$$(1,2,3)+t\,(2,1,0) \qquad\qquad (1,-1,2)+t\,(1,3,1)$$

Le direzioni non sono multiple, quindi sono sghembe o incidenti. Cerco le eventuali intersezioni

$$\begin{array}{rcl} 1+2t &=& 1+s \\ 2+t &=& -1+3s \\ 3 &=& 2+s \quad \leadsto s=1 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} 2t=1 \\ t=0 \end{array}\right\}$$

incompatibili, quindi nessuna inters.
⇝ sono sghembe

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Cerco P ∈ prima retta, Q ∈ seconda retta tali che P − Q ⊥ alle direzioni delle due rette

$$P = (1+2t,\ 2+t,\ 3) \qquad Q = (1+s,\ -1+3s,\ 2+s)$$

$$P-Q = (2t-s,\ 3+t-3s,\ 1-s)$$

$$\begin{cases} 2(2t-s)+(3+t-3s)=0 & P-Q \perp (2,1,0) \\ (2t-s)+3(3+t-3s)+(1-s)=0 & P-Q \perp (1,3,1) \end{cases}$$

⇝ risolvo ⇝ trovo P e Q e ho i due p.ti che minimizzano la distanza

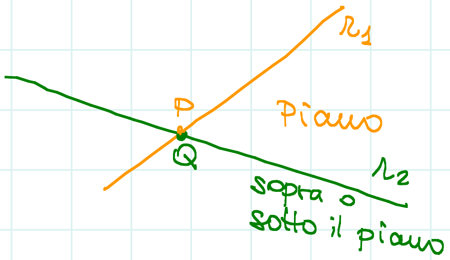
$\boxed{2° \text{ modo}}$ Scrivo il piano che contiene la prima retta ma non interseca la seconda

In parametrica

$$\underbrace{(1,2,3)+t(2,1,0)}_{\text{prima retta}}+s\underbrace{(1,3,1)}_{\text{dir. seconda retta}}$$

Volendo lo passo in cartesiana [Verifica che non interseca la retta]

La distanza tra le due rette è uguale alla distanza tra il piano e un qualunque p.to della retta r_2, ad esempio $(1,-1,2)$. Per calcolarla uso la formula per la distanza p.to/piano.



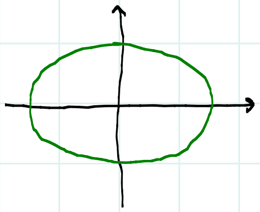
Occhio: il secondo modo non trova i p.ti P e Q.

Ci sarebbe anche un terzo modo (vedi anni precedenti).

Esercizio Allenamento. (Precorso)

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x^2+3y^2=5\}$$

Ellisse $(\sqrt{2}x)^2+(\sqrt{3}y)^2=5$

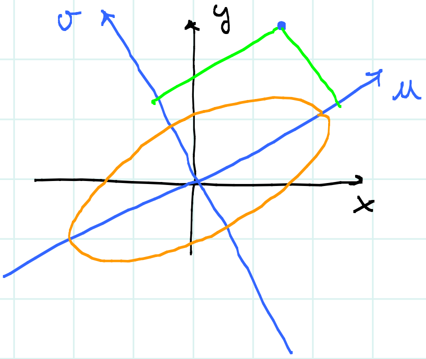


$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \underbrace{2x^2+13y^2+10xy}_{\text{forma quadratica}}=5\} \quad ?$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Det} = 1 \\ \text{Tr} = 15 \end{matrix} \quad \text{Segnatura } ++$$

Teoria: esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ in cui la forma avrà una matrice diagonale con due numeri positivi sulla diagonale

Esistono dei nuovi assi $\perp$, rispetto ai quali posso calcolare delle nuove componenti (u, v) mediante le quali l'eq. diventa



$$\underset{\uparrow}{\lambda_1} u^2 + \underset{\uparrow}{\lambda_2} v^2 = 5$$

autovalori positivi

— o — o —

Seno / coseno / esponenziale di una matrice :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

$$\sin A = A - \frac{1}{6} A^3 + \frac{1}{120} A^5 - \dots$$

Se per caso A fosse diagonale, allora sin A sarebbe anche lei diagonale con sulla diagonale il seno degli autovalori di A.

Se $\quad M A M^{-1} = D$

allora $\quad A = M^{-1} D M$

e quando faccio il sin ottengo

$$\sin A = M^{-1} \underbrace{\sin D}_{\text{la so fare}} M$$

— o — o —

ALGEBRA LINEARE – LEZIONE 59

Note Title 15/12/2023

$\boxed{\text{ALGORITMO JPEG}}$ (vedi WIKI in inglese)

Immagine : matrice $m \times n$ di numeri (vero se è in bianco/nero)

Se è a colori è la stessa cosa, solo che le matrici sono 3.

HD = 1024×768

Un' immagine a colori $\sim 2M$

Come avviene la compressione

$\boxed{1^a \text{ fase}}$ La matrice viene divisa in sottomatrici 8×8. Ciascuno dei 64 elementi è un numero in $\{0, 1, \ldots, 255\}$

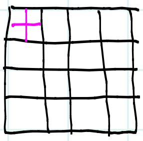
A priori occorre trasmettere / salvare 64 numeri da 0 a 255.

Come posso risparmiare?

→ Riduco la precisione $\left.\begin{array}{l} 0, \ldots, 15 \to 0 \\ 16, \ldots, 31 \to 1 \\ \vdots \\ 240 .. 255 \to 15 \end{array}\right\}$ ho risparmiato un fattore 16

→ Riduco la risoluzione

(tipo trasformo 8×8 in un 4×4)



Nessuna delle due produce buoni risultati ☹

Nuovo inizio : che cos'erano i 64 numeri che volevo trasmettere?

Le 64 componenti della matrice risp. alla base canonica dello spazio delle matrici.

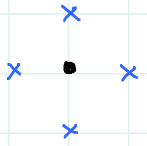
Idea: usare una base ortogonale diversa nello spazio delle matrici 8×8.

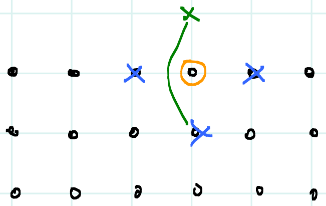
Chi produce basi ortogonali strane? Il TEOREMA SPETTRALE!!
Serve una bella applicazione simmetrica dalle matrici in sé.
Come è fatta l'applicazione?

f : Matrici $\longrightarrow$ Matrici

f sostituisce ogni elemento con la somma dei 4 vicini

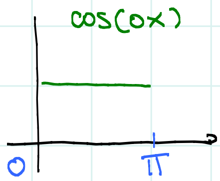
(agli angoli si aggiusta per riflessione

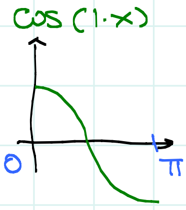


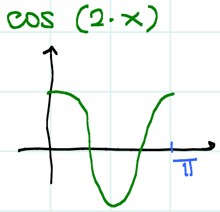


f è rappresentata da una matrice 64×64 simmetrica, quindi diagonalizzabile, quindi ammette base ortonormale di autovettori

La base ortonormale che viene fuori è fatta da specie di coseni







La matrice $B_{i,j}$ è del tipo $\cos(ix)\cdot\cos(jy)$

Come viene in mente che siano coseni?

Passiamo in dimensione 1, cioè vettori invece di matrici

V = vettori lunghi 8 ∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘

Considero $f: \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ che sostituisce ogni componente con la somma delle 2 vicine.

Trovare autovalori autovettori

$$(a,b,c,d,e,f,g,h) \xrightarrow{f} (2b, \underbrace{a+c}_{}, \underbrace{b+d}_{}, \underbrace{c+e}_{}, \dots, 2g)$$

Derivata di un vettore $(a,b,c,d,e,\dots) \rightsquigarrow (b-a, c-b, d-c, \dots)$

Derivata seconda $\rightsquigarrow (\underbrace{c+a}_{}-2b, \underbrace{d+b}_{}-2c, \underbrace{e+c}_{}-2d, \dots$

Quando cerco gli autovalori dell'applicazione f, moralmente sto cercando autovalori /autovettori della derivata seconda.

Quali funzioni derivate due volte, diventano multiple di se stesse?

$e^{\lambda x}$ $\cos(\lambda x)$ $\sin(\lambda x)$

↑ questo è "simmetrico al bordo"