ESERCIZI

① Determinare le coordinate dei punti impropri delle seguenti curve.
↳ Basta farle intersecare con la retta impropria $u=0$

* $\begin{cases} x^2-y^2-u^2=0 \\ u=0 \end{cases}$

$x^2-y^2=0 \qquad (x-y)(x+y)=0$

I punti $P_\infty \quad (1,-1,0) \quad (1,1,0)$

* $\begin{cases} x^3-yu^2=0 \\ u=0 \end{cases}$

$x^3=0 \qquad (0,1,0)$

* $\begin{cases} x^4-x^2y^2+xyu^2=0 \\ u=0 \end{cases}$

$x^4-x^2y^2=0$

$x^2(x^2-y^2)=0$

$x^2(x-y)(x+y)=0 \qquad \begin{pmatrix} x=0 \\ y=R \\ u=0 \end{pmatrix} (\times 2) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

② Determinare se le seguenti coniche sono degeneri o non

* $x^2-3xy+2y^2-4yu+u^2=0$

$$A=\begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

* I termini misti vanno sempre divisi per due

Calcolo il determinante

$\det A = (2-16)+\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)$

$=-14-\frac{9}{4} \neq 0$ non è degenere

* $2x^2 - 3xy - 2y^2 + 2xu - 3yu + u^2 = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & -2 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} = -2 - \left(\frac{9}{4}\right) \neq 0 \quad \text{non degenere}$$

* $2x^2 + xy - y^2 - 3xu + 3yu - 2u^2 = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & +\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & +\frac{3}{2} & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & +\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -2 \end{vmatrix} = \frac{5}{2}\left(2 - \frac{9}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{9}{4}\right)$$

$$\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\right) - 2\left(-\frac{5}{2} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{15}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)\right) - 2\left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{\cancel{12}\,3}{\cancel{4}\,1}\right) - \cancel{2}\left(\frac{-10+1}{\cancel{4}\,2}\right)$$

$$-\frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 0 \quad \text{conica degenere}$$

(3) Riconoscere le coniche dell'esercizio precedente

* $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 - 4yu + u^2 = 0 \\ u = 0 \end{cases}$

si fa l'intersezione con la retta impropria

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & +2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \to \text{calcolo}$$

$A_{33} = 2 - \left(\frac{9}{4}\right) = \frac{8-9}{4} = -\frac{1}{4} < 0$ conica di tipo iperbolico

* $\begin{cases} 2x^2 - 3xy - 2y^2 + 2xu - 3yu + u^2 = 0 \\ u = 0 \end{cases}$

$\to 2x^2 - 3xy - 2y^2$ $\begin{vmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ $A_{33} = -4 - \frac{9}{4} = \frac{16-9}{4} \neq 0$ è un'iperbole

$$\ast \begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 \cancel{- 3xu} \cancel{+ 3yu} \cancel{- 2u^2} = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

$$2x^2 + xy - y^2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & +\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad A_{33} = \left(-2 - \frac{1}{4}\right) < 0 \qquad r = 2$$

La conica si spezza in due rette reali e distinte o immaginarie coniugate

iperbole degenere

(4) $x^2 - 2xy + 8y^2 - 2xu - u^2 = 0$

Dire se degenere o non degenere classificarla

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1(-1) \neq 0 \quad \text{non degenere}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 8y^2 \cancel{- 2xu} \cancel{- u^2} = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2xy + 8y^2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad A_{33} = 8 - 1 = 7 > 0 \quad \text{ellisse}$$

Se interseco l'ellisse con l'asse y

$$\begin{cases} \cancel{x^2} \cancel{- 2xy} + 8y^2 \cancel{- 2xu} - u^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$8y^2 - u^2 = 0 \qquad \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2}$$

$u^2 = 8y^2 \qquad u = \pm 2\sqrt{2}\, y$

se $y = 1$

$(0, 1, +2\sqrt{2}) \qquad (0, 1, -2\sqrt{2})$ sono punti reali

ELLISSE REALE

⑤ Classificare la quadrica

$$x^2 - z^2 + 2x - 2y + 4z = 0$$

$x = \frac{x_1}{x_4}$ $y = \frac{x_2}{x_4}$ $z = \frac{x_3}{x_4}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{x_1^2}{x_4^2} - \frac{x_3^2}{x_4^2} + 2\frac{x_1}{x_4} - 2\frac{x_2}{x_4} + 4\frac{x_3}{x_4} = 0$$

$$x_1^2 - x_3^2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_4 + 4x_3x_4 = 0$$

$$\det = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2(-2) = -4 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -2(-2) = +4$$

$+1(+4)$ $\det A \neq 0$ quadriche non degeneri

$$\begin{cases} x_1^2 - x_3^2 - \cancel{2x_1x_4} - \cancel{2x_2x_4} + \cancel{4x_3x_4} = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x_1^2 - x_3^2 = 0 \longrightarrow (x_1 - x_3)(x_1 + x_3) = 0 \quad \text{paraboloide}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$r = 2$ è spezzato C_∞ ⇒ include une reali e distinte

~~ $\Delta_3 = 0$ iperb parabolico ~~

Γ è un paraboloide iperbolico

⑥ Classifico la quadrica

* $x_1^2 + x_2^2 - x_4^2 = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$\det A = 0$ quadrica degenere

$$A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1(0-0) = 0$$

$\tau = 2$ è spezzata in due piani distinti → piani o paralleli o distinti

Come vedo che è un cilindro? viene $\tau = 3$

C_∞

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$ → sono due rette improprie immaginarie

C_∞ è spezzata → CILINDRO

* $x_1^2 - x_2^2 = 4x_4^2$

$x_1^2 - x_2^2 - 4x_4^2 = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -4$$

$\det A = 0$

$\tau = 2$

$C_\infty = x_1^2 - x_2^2 = 0$ → si spezza in due rette reali e distinte

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$ det $= 0$ spezzata, conica degenere

CILINDRO

* $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\det A = 0$

$\det A_{44} < 0$

$\tau = 3$ → cono o cilindro

C_∞ non si spezza CONO

7) Classificare la quadrica

* $x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$

la trasformo con $x = \frac{x_1}{x_4}$ $y = \frac{x_2}{x_4}$ $z = \frac{x_3}{x_4}$

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1x_4 - 3x_2x_4 + 2x_4^2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

det A = 0 quadrica degenere

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} = 2 - \left(\frac{9}{4}\right) = -\frac{1}{4} \neq 0$$

$r = 2$

si spezza in due rette piani distinte o incidenti o parallele

Devo vedere la C_∞

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

→ non avete punti reali

La quadrica è spezzata in due ~~rette~~ piani parallele

* $x^2 + y^2 - 2z^2 + 4x - 2 = 0$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_4 - 2x_4^2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 3\left[-1(+4)\right] = -12$$

det A < 0 ≠ 0 quadrica non degenere

Calcolo C_∞ $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ non è spezzata, è reale

iperboloide ellittico / iperboloide iperbolico → studio la natura dei punti

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

det = -2

se per le coniche usavo A_{33} per le quadriche uso A_{44} in questo caso è < 0 iperbolico → ho un IPERBOLOIDE IPERBOLICO

(10) Classifica la Quadrica

$2x^2 - 2y^2 + 2yz - 2z^2 + 3 = 0$

in coord. omogenee

$2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_2x_3 - 2x_3^2 + 3x_4^2 = 0$

la matrice associata è

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\left[3(+4-1)\right] = +18 \neq 0$$

Quadrica non degenere

intersezione con $x_4 = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\left[4-1\right] = 6 \qquad A_{44} \neq 0$$

la conica all'infinito non è spezzata → paraboloide

Per vedere il tipo di punti guardo A_{33}

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = \det = -4 < 0 \quad \text{a punti iperbolici} \rightarrow$$

PERBOLOIDE IPERBOLICO

(11) Determinare le coordinate dei punti di intersezione della conica con la retta

$$r \begin{cases} \rho x = 1+t \\ \rho y = 1-t \\ \rho u = t \end{cases} \qquad e \quad \gamma) \ x^2 - 4y^2 + 2xu + 16u^2$$

$(1+t)^2 - 4(1-t)^2 + 2(1+t)(t) + 16t^2$

$1 + t^2 + 2t - 4(1+t^2-2t) + 2t + 2t^2 + 16t^2$

$1 + t^2 + 2t - 4 - 4t^2 + 8t + 2t + 2t^2 + 16t^2$

$15t^2 + 12t - 3 = 0$

$5t^2 + 4t - 1 = 0 \qquad t = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(-4 \cdot 5)}}{10} = \dfrac{-4 \pm 6}{10}$

$t' = -1$

$t'' = \frac{1}{5}$

che riportato nell'equazione della retta mi dà i punti

(11) Classifico la conica

$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 + 5 = 0$

la matrice è

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -2(+2) + 5(0) = -4 \quad \text{è degenere} \quad < 0$$

è un iperbole

(12) Classifico la conica

$x^2 + xy - 2y^2 - 2x - 2y = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$-\left(-\frac{1}{2} - 2\right) + 1\left(-1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$+\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad > 0 \quad \text{è un ellisse}$$