Perpendicolarità e Parallelismo

CONDIZIONE DI PARALLELISMO
→ terne proporzionali
CONDIZIONE DI ORTOGONALITÀ
→ il prodotto canonico = 0

CONDIZIONE DI // TRA RETTE

Le due rette hanno vettori v_0, v_1
Sono parallele se i due vettori sono proporzionali (linearmente dipendenti)
cioè

$$r\begin{vmatrix} v_0 & v_1 \end{vmatrix} = 1$$ cioè quando il rango è = 1

			Nel piano	Nello spazio
Se $r_{inc} = r_{com}$	sono	COINCIDENTI	1 = 1	2 = 2
Se $r_{inc} < r_{com}$	sono	PARALLELE	1 = 2	2 = 3
		IMPOSSIBILE	1 = 3	2 = 4
$r_{inc} > r_{com}$		"	2 = 1	3 = 2
$r_{inc} = r_{com}$		INCIDENTI	2 = 2	3 = 3
" < "		SGHEMBE	2 = 3	3 = 4

Se ho le rette in forma cartesiana
ho due rette distinte ~~[illegible]~~ si intersecano

$$\begin{cases} a_0 x + b_0 y = c_0 \\ a_1 x + b_1 y = c_1 \end{cases} \rightarrow \det\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Dunque due rette sono parallele o coincidenti se e solo se

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = 0$$

Infine le due rette sono coincidenti se e solo se sono parallele e si intersecano e accade quando

$$r\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 1$$

ESEMPIO

Date le rette r_0 e r_1 di equazione cartesiana

$$r_0 \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \qquad r_1 \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + y + z = 2 \end{cases}$$

Le metto in un unico indice

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} r_{inc} = 3 \\ r_{com} = 3 \end{array}\right\} \text{sono due rette incidenti}$$

CONDIZIONE DI ORTOGONALITÀ

Due rette sono $\perp$ se

$$l_0 l_1 + m_0 m_1 + n_0 n_1 = 0$$

cioè se il prodotto scalare delle loro componenti è = 0

$$v_0 \begin{pmatrix} l_0 \\ m_0 \\ n_0 \end{pmatrix} \qquad v_1 \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$$

* L'equazione del piano ortogonale a r_0 e passante per il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ è

$$l_0(x - x_0) + m_0(y - y_0) + n_0(z - z_0) = 0$$

Due piani sono $\perp$ se

$$a_0 a_1 + b_0 b_1 + c_0 c_1 = 0$$

* Dato un piano π di equazione cartesiana $ax + by + cz = d$ ed un punto P_0 esiste un unica retta passante per P_0, che ha eq. parametrica

$$P = P_0 + v t \qquad \text{dove } v\ (a, b, c)$$

Quindi le componenti dell'equazione di un piano rappresentano le componenti di un vettore $\perp$ a esso.

ESEMPIO

① Voglio trovare una retta r passante per $P_0 = (1, 0, -1)$ ortogonale e incidente alla retta s di equazione cartesiana

$$s \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{in parametriche} \quad s \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$$

$$s \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

Voglio trovare le equazioni parametriche di r del tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} s$

le condizioni di ortogonalità sono

$$2l - 2m + n = 0$$

In particolare $r\ |v_0 v_1| = 2$

$$0 = \det \left| v_0 \; v_1 \; P_0 - P_1 \right| = \det \begin{vmatrix} \ell & 2 & 0 \\ m & -2 & 0 \\ n & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\ell + 2m$$

Risolvendo il sistema dato da

$$\begin{cases} 2\ell + 2m + n = 0 \\ 2\ell + 2m = 0 \end{cases}$$

trovo che $P = P_0 + s v_0 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} + s \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{vmatrix}$