1. SPAZI PROIETTIVI

1.1. La retta proiettiva.

Consideriamo nel piano due rette incidenti r e r', ed un punto Q esterno ad esse. Possiamo associare al generico punto P di r il punto P' ottenuto come intersezione di r' con la retta PQ. In realtà non si definisce in questo modo un'applicazione di r in r', poiché al particolare punto P che rende PQ parallela ad r' non resta associato alcun punto di r'.

Si ovvia a tale situazione "aggiungendo" alla retta r' un nuovo punto "ideale", detto punto "all'infinito", indicato con P'_∞, che viene appunto associato al punto P precedentemente descritto.

Si osservi anche che il punto d'intersezione della retta r' con la retta passante per Q e parallela a r non resta associato, con la costruzione precedente, ad alcun punto di r.

Se introduciamo anche su r il punto "all'infinito", che indichiamo con P_∞, e ad esso associamo proprio il punto precedente, cioé l'intersezione di r' con la retta passante per Q e parallela ad r, abbiamo infine definito una bigezione di r su r'.

Una retta estesa come in precedenza, con l'aggiunta cioè del punto all'infinito, si dice una retta proiettiva. Si osservi che si aggiunge un solo punto all'infinito: è come se si unissero, mediante tale punto, le due estremità della retta, che in questo modo acquista un ordinamento circolare del tutto simile a quello di una circonferenza.

Le bigezioni tra due rette proiettive definite come quella precedente tra r e r' si dicono prospettività.

Se in una retta è assegnato un sistema di riferimento, al punto all'infinito viene assegnata l'ascissa proiettiva ∞. Diremo allora che sulla retta proiettiva è assegnato un sistema di coordinate estese.

Consideriamo una retta r, su cui sia assegnato un sistema di riferimento, e su di essa quattro punti P_1, P_2, P_3, P_4 di cui almeno tre siano distinti, con ascisse rispettivamente x_1, x_2, x_3, x_4. Il numero

$$(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{(x_3 - x_1)\,(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)\,(x_4 - x_1)},$$

ovvero il rapporto, con segno, delle lunghezze dei segmenti corrispondenti, si dice il birapporto dei quattro punti (nell'ordine!). Nel caso che un punto considerato sia il punto all'infinito il risultato delle operazioni è definito in modo naturale, ponendo $\frac{1}{0} = \infty$, $\infty - \infty = 0$, $\infty - x = \infty$, $\frac{\infty}{\infty} = 1$ e così via.

Osserviamo subito che un qualsiasi cambiamento di coordinate sulla retta non altera il valore del birapporto di quattro punti assegnati. Potremo quindi sempre identificare, in quanto segue, ogni retta con l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.

Vediamo ora un modo differente di costruire la retta proiettiva.

Consideriamo $\mathbb{R}^2$ e identifichiamo $\mathbb{R}$ con la retta di equazione $y = 1$, facendo corrispondere al punto di ascissa x quello di coordinate $(x, 1)$. Indichiamo con $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ l'insieme delle rette di $\mathbb{R}^2$ passanti per l'origine. Al punto $(x, 1)$ facciamo corrispondere la retta di $\mathbb{R}^2$ passante per l'origine e per il punto stesso, che passa anche per tutti e soli i punti di coordinate (tx, t). Consideriamo dunque $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ed identifichiamo due elementi (x_1, y_1) e (x_2, y_2) di tale insieme quando esiste un numero reale (non nullo) t tale che $(x_2, y_2) = t\,(x_1, y_1)$. Il risultato finale di questa costruzione può essere identificato con $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ e si può anche verificare che si ottiene lo stesso risultato si si considera la circonferenza unitaria di $\mathbb{R}^2$, identificando tra loro i punti diametralmente opposti.

Diremo poi che un punto di $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ ha coordinate omogenee (x, y) se esso è la retta passante per l'origine e per il punto di coordinate (x, y). Ovviamente le coordinate omogenee sono definite a meno di un fattore moltiplicativo non nullo, e non possono essere entrambe nulle.

Con il procedimento precedente abbiamo inoltre identificato il numero reale x con il punto di $\mathbb{R}^2$ di coordinate omogenee $(x, 1)$ o anche (x', y') con $\dfrac{x'}{y'} = x$. Nella costruzione di $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ abbiamo "aggiunto" ai numeri reali il solito "punto all'infinito", corrispondente alla retta "orizzontale" di equazione $y = 0$, che non interseca quella di equazione $y = 1$.

Diremo poi che un'applicazione bigettiva φ di una retta proiettiva r in un'altra retta proiettiva r' (eventualmente la stessa) è una proiettività se conserva il birapporto, cioè se

$$(\varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P_3), \varphi(P_4)) = (P_1, P_2, P_3, P_4) \qquad \forall P_1, P_2, P_3, P_4 \in r.$$

Si dimostra per prima cosa che ogni prospettività è una particolare proiettività.

Si vede facilmente che ogni applicazione lineare di $\mathbb{R}^2$ in sé induce un'applicazione di $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ in sé e quindi può essere rappresentata, in coordinate omogenee, da una matrice quadrata reale invertibile di ordine 2, diciamo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad (ad - bc \neq 0);$$

di conseguenza, essa può essere rappresentata in coordinate estese nel modo seguente:

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad \text{(sempre con } ad - bc \neq 0\text{)}.$$

È facile verificare che tale applicazione è una proiettività.

D'altra parte, si verifica anche che ogni proiettività si può rappresentare nel modo precedente.

Osservazione. È immediato verificare che due matrici invertibili $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$ rappresentano la stessa proiettività se, e soltanto se, sono tra loro proporzionali $(\mathbf{A}' = k\mathbf{A})$ e che ogni affinità della retta induce una proiettività.

Teorema. Data una retta proiettiva, ed assegnate su di esse due terne ordinate di punti distinti, esiste una, ed una sola, proiettività della retta in sé che mandi ordinatamente i tre punti della prima terna nei punti della seconda. In particolare, ogni proiettività di una retta che tenga fissi tre punti distinti è l'identità.

Dimostrazione. Si possono per prima cosa fissare i tre punti della prima terna. Siano essi, in coordinate omogenee, i punti $(0,1)$, $(1,0)$ e $(1,1)$, e supponiamo che le loro immagini siano i punti di coordinate omogenee (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Per quanto abbiamo visto, determinare una tale affinità è equivalente a determinare una matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

in modo tale che

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(non abbiamo inserito il fattore di proporzionalità nella terza uguaglianza poiché la matrice stessa è definita a meno di un fattore di proporzionalità).

Quanto sopra è equivalente a porre

$$\begin{cases} a = hx_1 \\ c = hy_1 \\ b = kx_2 \\ d = ky_2 \\ hx_1 + kx_2 = 1 \\ hy_1 + ky_2 = 1 \end{cases}.$$

Il sistema ammette allora una ed una sola soluzione, poiché le ultime due equazioni ammettono una ed una sola soluzione per il teorema di Cramer. Si osservi che, sempre per lo stesso teorema, sia h che k non sono nulli. ■

1.2. Il piano proiettivo.

Costruiamo ora il piano proiettivo. Consideriamo $\mathbb{R}^3$ ed in esso consideriamo le rette che passano per l'origine. Diremo che l'insieme di tali rette è il piano reale proiettivo e lo indicheremo con $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Poiché ogni elemento di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ è identificato in modo univoco da un qualsiasi punto di $\mathbb{R}^3$ distinto dall'origine, possiamo anche dire che $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ è l'insieme $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ in cui identifichiamo tra loro tutti i punti che giacciono su una stessa retta passante per l'origine, ovvero che hanno le stesse coordinate a meno di un fattore moltiplicativo (ovviamente non nullo). Dato un elemento di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ diremo che le coordinate di un suo punto qualsiasi, non coincidente con l'origine, sono le sue coordinate omogenee. Per quanto detto le coordinate omogenee sono definite a meno di un fattore moltiplicativo non nullo.

Ovviamente si può anche pensare $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ come l'insieme dei punti della sfera 2-dimensionale $\mathbb{S}_2$, in cui si identificano i punti diametralmente opposti.

Le rette del piano proiettivo non sono altro che i piani di $\mathbb{R}^3$ passanti per l'origine, visti come l'insieme delle sue rette passanti per l'origine. Ovviamente tali rette non sono altro che rette proiettive. Con queste definizioni $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ è un piano geometrico che non soddisfa gli assiomi della geometria euclidea, ma è un modello della geometria piana ellittica. Per esempio, è immediato che due rette di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ o sono coincidenti o hanno (in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$) esattamente un punto in comune.

Vediamo ora come si identifica $\mathbb{R}^2$ con un sottoinsieme di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, in quella che è detta la sua immersione canonica. Associamo al punto (x, y) di $\mathbb{R}^2$ il punto corrispondente di $\mathbb{R}^3$ posto alla quota 1, ovvero il punto $(x, y, 1)$, e gli facciamo corrispondere la retta, ovvero il punto di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, passante per esso e per l'origine, e quindi appunto di coordinate omogenee $(x, y, 1)$. I punti di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ che non corrispondono secondo l'immersione canonica ai punti di $\mathbb{R}^2$ si dicono punti impropri o punti "all'infinito". Le rette di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ non sono altro che le rette di $\mathbb{R}^2$ (ognuna con l'aggiunta del corrispondente punto improprio) ed una retta costituita da tutti e soli i punti impropri (la retta "all'infinito").

Si dice proiettività tra due piani proiettivi ogni applicazione bigettiva di un piano proiettivo in un altro che
a) mandi rette proiettive in rette proiettive;
b) come applicazione di ogni retta proiettiva nella corrispondente retta proiettiva sia una proiettività (nel senso del paragrafo precedente, e quindi conservi i birapporti).

Lemma. Ogni applicazione lineare invertibile di $\mathbb{R}^3$ induce una proiettività di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.
Dimostrazione. Deriva immediatamente dal fatto che ogni applicazione lineare invertibile di $\mathbb{R}^3$ induce una applicazione di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ che manda rette proiettive in rette proiettive e che, come applicazione di ogni retta proiettiva nella corrispondente retta proiettiva, è una proiettività, per quanto abbiamo visto nel paragrafo precedente, poiché è indotta da un'applicazione lineare bigettiva. ■

Teorema. Una proiettività di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ che tenga fissi quattro punti a tre a tre non allineati coincide con l'identità.
Dimostrazione. Ogni punto d'intersezione tra due coppie di rette passanti ognuna per due dei quattro punti deve restare fisso, e dunque se consideriamo una qualsiasi retta passante per due dei quattro punti assegnati essa ha tre punti fissi e quindi deve essere (vedi paragrafo precedente) tutta composta di punti fissi. A questo punto ogni retta interseca le sei rette che passano per due dei quattro punti assegnati in almeno tre punti distinti che sono fissi, e quindi ogni retta è composta da punti fissi. ■

Teorema. Ogni proiettività φ tra due piani proiettivi è indotta (nel senso ovvio) da una applicazione lineare invertibile e quindi può essere rappresentata da una matrice invertibile di ordine 3.
Dimostrazione. Per quanto visto basta verificare che, assegnate due quaterne ordinate di punti a tre a tre non allineati, esiste (ed è unica) una applicazione lineare che induce una proiettività che manda ordinatamente i primi quattro punti negli altri quattro punti. Possiamo vederlo scegliendo opportunamente i primi quattro punti, che supponiamo essere $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$. Supponiamo che le loro immagini siano (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3), (x_4,y_4,z_4). Si tratta allora di determinare la matrice $\mathbf{A}=(a_{ij})$ tale che

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(la mancanza del fattore moltiplicativo nell'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che la matrice stessa è individuata a meno di un fattore moltiplicativo), da cui si ricava

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \\ hx_1 + kx_2 + lx_3 = x_4 \\ hy_1 + ky_2 + ly_3 = y_4 \\ hz_1 + kz_2 + lz_3 = z_4 \end{cases}$$

che ammette una ed una sola soluzione per il teorema di Cramer. Lo stesso teorema garantisce che h, k, l non sono tutte nulle. ■

Consideriamo ora $\mathbb{R}^3$. Ad ogni retta passante per l'origine possiamo associare il piano, sempre passante per l'origine, ad essa ortogonale, e viceversa. In tal modo possiamo associare ad ogni punto di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ una retta e viceversa. Si osservi anche che se un punto appartiene ad una retta la retta associata al punto contiene il punto associato alla retta. Quanto detto permette di enunciare il cosiddetto principio di dualità, ovvero che ogniqualvolta siamo in grado di stabilire un risultato in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ possiamo automaticamente affermare la validità dello stesso enunciato, se facciamo corrispondere ai punti le rette, alla nozione di appartenente quella di contenuto e viceversa.

Un cambiamento di coordinate lineari su $\mathbb{R}^3$ è rappresentato da una matrice invertibile e induce pertanto una proiettività di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Ne segue che esso determina un cambiamento di coordinate omogenee che non cambia la struttura proiettiva di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

1.3. Lo spazio proiettivo.

Con una costruzione simile alle precedenti indichiamo con $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ l'insieme delle rette di $\mathbb{R}^4$ passanti per l'origine. Tale insieme costituisce quello che chiamiamo lo spazio proiettivo, in cui diremo retta proiettiva ogni insieme composto da tutte e sole le rette precedenti che giacciono in un sottospazio di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$, e piano proiettivo ogni insieme composto da tutte e sole le rette precedenti che giacciono in sottospazio di dimensione 3 di $\mathbb{R}^4$.

Diremo che un punto dello spazio proiettivo, che possiamo considerare in modo analogo a quanto visto precedentemente come l'insieme $\mathbb{R}^4 \setminus \{(0,0,0,0)\}$ in cui identifichiamo le quaterne di numeri reali le cui coordinate sono legate da un fattore (non nullo) di proporzionalità, o anche come l'usuale sfera $\mathbb{S}_3$ in cui identifichiamo i punti diametralmente opposti, ha coordinate omogenee (x, y, z, t) se come retta di $\mathbb{R}^4$ passa per tale punto. Ovviamente le coordinate omogenee non possono essere tutte nulle e sono definite a meno di un fattore di proporzionalità non nullo. Esiste poi un modo canonico di identificare $\mathbb{R}^3$ con un sottoinsieme di $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, identificando il punto di coordinate (x, y, z) con quello di coordinate omogenee $(x, y, z, 1)$. I punti corrispondenti a quelli di $\mathbb{R}^3$ si diranno propri, gli altri si diranno punti impropri o "all'infinito". I punti impropri costituiscono un piano proiettivo.

Se ad ogni sottospazio vettoriale non nullo di $\mathbb{R}^4$ associamo il suo ortogonale induciamo una corrispondenza che associa ad ogni punto di $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ un piano proiettivo, ad ogni retta proiettiva un'altra retta proiettiva, e ad ogni piano proiettivo un punto, invertendo la relazione di appartenenza. Dunque anche per $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ possiamo enunciare un principio di dualità.

Si dice poi proiettività di $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ ogni applicazione biunivoca di $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ in sé che mandi rette proiettive in rette proiettive e che, come applicazione di ogni retta proiettiva nella sua corrispondente, conservi il birapporto. Si può allora dimostrare, in modo analogo a quello del piano proiettivo, che ogni proiettività di $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ si rappresenta, in coordinate omogenee, mediante una matrice invertibile di ordine 4 (individuata a meno di un fattore moltiplicativo non nullo) e che ogni proiettività è individuata dall'immagine di 5 punti di $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ a 4 a 4 non complanari.

Anche i cambiamenti di coordinate lineari su $\mathbb{R}^4$ sono rappresentati da matrici invertibili e inducono delle proiettività di $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$. Ne segue che essi determinano dei cambiamenti di coordinate omogenee che non cambiano la struttura proiettiva di $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

In modo perfettamente analogo si costruisce lo spazio proiettivo n-dimensionale $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, in cui si può identificare $\mathbb{R}^n$ con l'"iperpiano" $x_{n+1} = 1$.

1.4. Due teoremi importanti.

Teorema di Desargues. Siano LMN e $L'M'N'$ due triangoli di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, non aventi né lati nè vertici in comune. Le tre rette LL', MM' e NN' passano per uno stesso punto se, e solo se, posto $l = MN$, $m = LN$, $n = LM$, $l' = M'N'$, $m' = L'N'$, $n' = L'M'$, i tre punti $l \cap l'$, $m \cap m'$, $n \cap n'$ sono allineati.
Dimostrazione. Supponiamo che i tre punti suddetti siano allineati e dimostriamo che le tre rette sono concorrenti. Siano
$\lambda = a_l x + b_l y + c_l z = 0,$
$\mu = a_m x + b_m y + c_m z = 0,$
$\nu = a_n x + b_n y + c_n z = 0$
le tre equazioni, in coordinate omogenee, delle rette l, m, n, e sia $\varphi = 0$ l'equazione della retta r che unisce i tre punti.
Poiché l, l' e r sono concorrenti, l'equazione di l' sarà della forma $\varphi + l_0\lambda = 0$. Analogamente l'equazione di m' sarà della forma $\varphi + m_0\mu = 0$ e quella di n' della forma $\varphi + n_0\nu = 0$.
Ne segue che $(\varphi + m_0\mu) - (\varphi + n_0\nu) = 0$ è l'equazione di una retta passante per il punto comune a m' e n', che è L'. Ma tale equazione è uguale a $m_0\mu - n_0\nu = 0$, e dunque tale retta passa anche per il punto comune a m e n, che è L. Analogamente $(\varphi + n_0\nu) - (\varphi + l_0\lambda) = n_0\nu - l_0\lambda = 0$ è l'equazione della retta passante per MM', e $(\varphi + l_0\lambda) - (\varphi + m_0\mu) = l_0\lambda - m_0\mu = 0$ è l'equazione della retta NN'.
Poiché $(m_0\mu - n_0\nu) + (l_0\lambda - m_0\mu) + n_0\nu - l_0\lambda = 0$ è identicamente nulla, le tre rette appartengono ad un medesimo fascio e sono dunque concorrenti.
L'altra parte della dimostrazione segue dal principio di dualità. ■

Teorema di Pappo. Siano l_1 e l_2 due rette distinte di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, e siano A_1, B_1, C_1 e A_2, B_2, C_2 tre punti distinti di l_1 e l_2 rispettivamente. Supponiamo che A_1, B_1 e A_2, B_2 siano a 3 a 3 non allineati. Allora i punti $A_3 = B_1C_2 \cap B_2C_1$, $B_3 = A_1C_2 \cap A_2C_1$, $C_3 = A_1B_2 \cap A_2B_1$ sono allineati.
Dimostrazione. Poiché A_1, B_1 e A_2, B_2 non sono allineati in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, possiamo effettuare un cambiamento di coordinate in $\mathbb{R}^4$ che induce una proiettività in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ in modo tale che rispetto a questo nuovo riferimento le coordinate omogenee di A_1, B_1 e A_2, B_2 siano rispettivamente $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ $(1,1,1)$. La retta A_1B_1 ha allora equazione (in coordinate omogenee) $z = 0$. Ne segue che C_1 ha coordinate omogenee $(\overline{x}, 1, 0)$. Analogamente la retta A_2B_2 ha equazione $x - y = 0$ e dunque il punto C_2 ha coordinate omogenee $(1, 1, \overline{z})$.

Le rette B_1C_2 e B_2C_1 hanno equazione $\overline{z}x - z = 0$ e $x - \overline{x}y + (\overline{x} - 1)\, z = 0$ e dunque il punto A_3 ha coordinate $\left(1, \overline{x}^{-1} + \overline{z}\left(1 - \overline{x}^{-1}\right), \overline{z}\right)$.
Le rette A_1C_2 e A_2C_1 hanno equazione $\overline{z}y - z = 0$ e $x - \overline{x}y = 0$ e dunque il punto B_3 ha coordinate $(\overline{x}, 1, \overline{z})$.
Le rette A_1B_2 e A_2B_1 hanno equazione $y - z = 0$ e $x = 0$ e dunque il punto C_3 ha coordinate $(0, 1, 1)$.
La retta B_3C_3 ha dunque equazione $\overline{x}^{-1}\,(1 - \overline{z})\, x - y + z = 0$ e si verifica che le coordinate di A_3 verificano questa equazione. ■

Esercizio. Si enunci il teorema duale.

2. LE CONICHE E LE QUADRICHE NEGLI SPAZI PROIETTIVI

2.1. Il prolungamento delle quadriche.

Consideriamo una quadrica in $\mathbb{R}^n$ di equazione

$\mathbf{A}\mathbf{x} \bullet \mathbf{x} + 2\mathbf{b} \bullet \mathbf{x} + c = 0$

e consideriamo in $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ l'equazione corrispondente della forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ {}^t\mathbf{b} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix} = \widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{x}} \bullet \widetilde{\mathbf{x}} = 0,$$

dove con

$$\widetilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix}$$

abbiamo indicato il generico elemento di $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

I punti "al finito" di $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ che verificano tale equazione sono tutti e soli i punti di $\mathbb{R}^n$ che appartengono alla conica di partenza. Ad essi si aggiungono gli eventuali punti all'infinito che verificano l'ultima espressione, quelli cioè della forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

per cui vale

$$\widetilde{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ {}^t\mathbf{b} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} \bullet \mathbf{x} = 0.$$

Noi siamo interessati allo studio geometrico delle quadriche, e quindi studieremo le quadriche negli spazi proiettivi reali; si tenga però presente che l'ambiente "naturale" per lo studio delle quadriche è quello degli spazi proiettivi complessi.

Esercizio. Determinare, per le coniche e le quadriche propriamente dette, soprattutto per le non degeneri, ma anche per le degeneri, la natura dei "punti all'infinito", nel prolungamento all'infinito che abbiamo appena considerato.

Esercizio. Determinare, sempre per le coniche e le quadriche propriamente dette, quali tra esse si possono identificare quando, dopo averle prolungate al corrispondente spazio proiettivo, si "dimentica" la loro origine, ovvero si tratta l'ultima coordinata proiettiva come tutte le altre, e dunque le si classificano "a meno di trasformazioni proiettive".

2.2. Le rette tangenti ad una conica.

Consideriamo una conica di equazione

$$\widetilde{\mathbf{A}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = 0,$$

e consideriamo una retta di equazione parametriche (proiettive)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ t_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ t_2 \end{pmatrix}.$$

Con ovvie notazioni l'intersezione della retta con la conica si ottiene per i valori di λ_1 e λ_2 per cui

$$\widetilde{\mathbf{A}}\,(\lambda_1\widetilde{\mathbf{x}}_1 + \lambda_2\widetilde{\mathbf{x}}_2) \bullet (\lambda_1\widetilde{\mathbf{x}}_1 + \lambda_2\widetilde{\mathbf{x}}_2) = 0.$$

Questa è una equazione di secondo grado nel rapporto $\lambda_1 : \lambda_2$, ed ha due soluzioni coincidenti (il che significa che la retta corrispondente è tangente alla conica) quando il suo discriminante è nullo.

Nel caso particolare che la retta considerata sia la retta impropria, essa ha equazioni parametriche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e per l'intersezione si ottiene

$$a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2 = 0;$$

dunque la retta impropria è tangente alla conica se è

$$\det(\mathbf{A}) = 0.$$

Le coniche che verificano tale condizione si dicono di tipo parabolico.

2.3. La polarità.

Consideriamo una conica **non degenere** di equazione

$$\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{x}} \bullet \widetilde{\mathbf{x}} = 0.$$

Sia $\widetilde{\mathbf{y}}$ un punto di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. La retta di equazione

$$\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{y}} \bullet \widetilde{\mathbf{x}} = 0$$

si dice la polare del punto rispetto alla conica.

Data una retta di equazioni

$$\widetilde{\mathbf{a}} \bullet \widetilde{\mathbf{x}} = 0,$$

esiste (univocamente determinato) un punto di cui essa è la polare. Le sue coordinate omogenee si ottengono osservando che si deve avere

$$\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{y}} \bullet \widetilde{\mathbf{x}} = 0$$

e quindi $\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{y}}$ e $\widetilde{\mathbf{a}}$ devono essere uguali (meglio, proporzionali) e dunque deve essere

$$\widetilde{\mathbf{y}} = \rho\widetilde{\mathbf{A}}^{-1}\widetilde{\mathbf{a}}.$$

Supponiamo ora che $\widetilde{\mathbf{y}}$ sia un punto per cui passano due tangenti alla conica. Indichiamo con $\widetilde{\mathbf{x}}_1$ e con $\widetilde{\mathbf{x}}_2$ i relativi punti di tangenza.
La retta passante per $\widetilde{\mathbf{y}}$ e per $\widetilde{\mathbf{x}}_1$ e tangente alla conica deve verificare l'equazione parametrica

$$\widetilde{\mathbf{A}}\left(\lambda_1\widetilde{\mathbf{x}}_1 + \lambda_2\widetilde{\mathbf{y}}\right) \bullet \left(\lambda_1\widetilde{\mathbf{x}}_1 + \lambda_2\widetilde{\mathbf{y}}\right) = 0,$$

ovvero

$$\lambda_1^2\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{x}}_1 \bullet \widetilde{\mathbf{x}}_1 + 2\lambda_1\lambda_2\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{x}}_1 \bullet \widetilde{\mathbf{y}} + \lambda_2^2\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{y}} \bullet \widetilde{\mathbf{y}} = 2\lambda_1\lambda_2\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{x}}_1 \bullet \widetilde{\mathbf{y}} + \lambda_2^2\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{y}} \bullet \widetilde{\mathbf{y}} = 0.$$

D'altra parte tale equazione deve avere due soluzioni coincidenti, e quindi deve essere $\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{x}}_1 \bullet \widetilde{\mathbf{y}} = 0$, ovvero $\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{y}} \bullet \widetilde{\mathbf{x}}_1 = 0$, cioè $\widetilde{\mathbf{x}}_1$ appartiene alla polare di $\mathbf{y}$.

Si osservi che abbiamo anche visto che ogni punto della conica ha come polare la relativa tangente, e che se per un punto non passano tangenti alla conica allora la sua polare non interseca la conica.

È anche ovvio che se un punto appartiene a una retta allora la sua polare contiene il punto di cui quella retta è la polare. Infatti

$$\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{y}} \bullet \widetilde{\mathbf{x}} = 0 \Longleftrightarrow \widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{x}} \bullet \widetilde{\mathbf{y}} = 0.$$

Se il punto $\widetilde{\mathbf{y}}$ è un punto improprio, la sua polare si dice un diametro della conica. Tutti i diametri della conica passano per il polo della retta impropria.

Se la conica è una parabola, il suo polo è il suo punto all'infinito, e tutti i suoi diametri sono paralleli. Se la conica non è una parabola il suo polo è il centro di simmetria della parabola.

2.4. Il piano tangente a una quadrica.

Consideriamo ora una quadrica propriamente detta (cioè, una quadrica dello spazio proiettivo $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$. Se la quadrica di equazione

$$\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{x}} \bullet \widetilde{\mathbf{x}} = 0$$

è degenere, esistono punti $\widetilde{\mathbf{y}}$ tali che l$'$equazione

$$\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{y}} \bullet \widetilde{\mathbf{x}} = 0$$

è verificata per ogni $\widetilde{\mathbf{x}}$. Tali punti si dicono i punti singolari della quadrica. Essi si ottengono risolvendo il sistema

$$\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{y}} = \mathbf{0}.$$

Se il punto $\widetilde{\mathbf{y}}$ è un punto non singolare della quadrica, l'equazione

$$\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{y}} \bullet \widetilde{\mathbf{x}} = 0$$

determina un piano, il piano tangente della quadrica nel punto $\widetilde{\mathbf{y}}$.

2.5. La polarità per le quadriche.

Data una quadrica non degenere di equazione

$$\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{x}} \bullet \widetilde{\mathbf{x}} = 0,$$

ed un punto $\widetilde{\mathbf{y}}$, il piano di equazione si dice il piano polare del punto (che a sua volta si dica il polo del piano).

Si verifica, fra l'altro, che:
1. il punto appartiene al piano se, e solo se, appartiene alla quadrica, ed allora il piano è il piano tangente;
2. se il punto Q appartiene al piano polare del punto P, allora P appartiene al piano polare del punto Q;
3. ogni piano è il piano polare di un unico punto.

Per quanto detto al punto 2., resta definita la polare anche di una retta (che è una retta); se la retta r' è la polare della retta r, allora r è la polare di r'.

I piani polari di un punto improprio si dicono piani diametrali. Tutti i piani diametrali passano per un punto che si dice il centro della quadrica.

I piani diametrali perpendicolari alla direzione del proprio polo sono piani di simmetria per la quadrica.