Corso di Eccellenza - CURVE E SUPERFICI

anno accademico 2004/2005

ESERCITAZIONE su I e II forma fondamentale

- Si consideri la seguente superficie di $\mathbb{R}^3$, parametrizzata dalla funzione σ:

$$\sigma : \quad [0,2\pi] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u\ ,\ v) \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} (5+2\sin(u))\cdot\cos(v) \\ (5+2\sin(u))\cdot\sin(v) \\ 2\cos(u) \end{pmatrix}$$

(Si noti che la superficie è un Toro).

Per calcolare la I e II forma fondamentale dobbiamo prima di tutto individuare i vettori base del piano tangente nel punto $P = \sigma(u,v)$. Derivando si ha:

$$\sigma_u = \begin{pmatrix} 2\cos(u)\cdot\cos(v) \\ 2\cos(u)\cdot\sin(v) \\ -2\sin(u) \end{pmatrix} \qquad \sigma_v = \begin{pmatrix} (5+2\sin(u))\cdot(-\sin(v)) \\ (5+2\sin(u))\cdot\cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto una base del piano tangente nel punto $P = \sigma(u,v)$ è data dai vettori

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2\cos(u)\cdot\cos(v) \\ 2\cos(u)\cdot\sin(v) \\ -2\sin(u) \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} (5+2\sin(u))\cdot(-\sin(v)) \\ (5+2\sin(u))\cdot\cos(v) \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- Per determinare la prima forma fondamentale nel punto P è sufficiente fare i tre prodotti scalari tra i due vettori della base.

Si ottiene pertanto la matrice associata alla prima forma fondamentale: $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

dove:

$$E = \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle = 4,\ \ F = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle = 0,\ \ G = \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle = (5+2\sin(u))^2$$

- Per determinare la seconda forma fondamentale dobbiamo inanzitutto determinare Il versore normale N alla superficie nel punto P. N si ottiene mediante il prodotto vettoriale tra σ_u e σ_v.

$$N = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{||\sigma_u \wedge \sigma_v||}$$

Pertanto

$$\sigma_u \wedge \sigma_v = \begin{pmatrix} 2\sin(u)\cdot(-\cos(v))\cdot((5+2\sin(u)) \\ -2\sin(u)\cdot(\sin(v))\cdot((5+2\sin(u)) \\ -2\cos(u)\cdot(5+2\sin(u) \end{pmatrix}$$

e quindi

$$N = \begin{pmatrix} 2\sin(u)\cdot(-\cos(v)) \\ -2\sin(u)\cdot(\sin(v)) \\ -2\cos(u) \end{pmatrix}$$

Per calcolare la seconda forma fondamentale nel punto P dobbiamo calcolare i prodootti scalari delle derivate di σ_u e σ_v con N.

Abbiamo

$$\sigma_{uu} = \begin{pmatrix} -2\sin(u)\cdot\cos(v) \\ -2\sin(u)\cdot\sin(v) \\ -2\cos(u) \end{pmatrix} \quad \sigma_{uv} = \begin{pmatrix} -2\cos(u)\cdot\sin(v) \\ 2\cos(u)\cdot\cos(v) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_{vv} = \begin{pmatrix} -\cos(u)\cdot((5+2\sin(u)) \\ -\sin(u)\cdot((5+2\sin(u)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Allora otteniamo la matrice associata alla seconda forma fondamentale : $\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$

dove:

$$e = \langle \sigma_{uu}, N\rangle = 2, \qquad f = \langle \sigma_{uv}, N\rangle = 0, \qquad g = \langle \sigma_{vv}, N\rangle = 2(5+2\sin(u))\cdot\sin(v)$$

In conclusione il segno della curvatura nel punto $P = \sigma(u,v)$ è uguale al segno della funzione $\sin(v)$.