Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra - anno accademico 2005/2006

SOLUZIONE della prova scritta del 18-1-2006

Esercizio 1. Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z+2i)^4 = -4 \\ e^{i\pi z} = -e^{\pi} \end{cases}$$

Soluzione .

I . Operiamo il cambiamento di variabile $w = z + 2i$.

Poichè $w = 0$ non è soluzione dell' equazione posssiamo esprimerlo nella forma esponenziale : $w = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$. Poichè $-1 = e^{i\pi}$ la prima equazione diventa

$$\varrho^4 \cdot e^{i4\vartheta} = 4e^{i\pi}$$

Uguagliando i moduli e gli argomenti otteniamo

$$\begin{cases} \varrho^4 = 4 \quad , \quad \varrho \in \mathbb{R}^+ \\ 4\vartheta = \pi + 2k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

e quindi le seguenti soluzioni distinte: $\begin{cases} \varrho = \sqrt{2} \\ \vartheta = \frac{\pi+2k\pi}{4}, \quad k = 0,1,2,3 \end{cases}$

Pertanto le soluzioni (nella variabile w) della prima equazione sono : $w = 1+i, -1+i, -1-i, 1-i$.

Sostituendo $z = w - 2i$, otteniamo infine le soluzioni

$$z = 1-i, -1-i, -1-3i, 1-3i$$

(ii) : Poichè $-1 = e^{i\pi}$ l' equazione $e^{i\pi z} = -e^{\pi}$ si scrive nella forma

$$e^{i\pi z} = e^{\pi + i\pi}$$

Per le proprietà dell' esponenziale nel campo complesso tale equazione è verificata se e solo se

$$i\pi z = \pi + i\pi + i2k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ponendo $z = x + iy$ si ha $i\pi z = -\pi y + i\pi x$, pertanto, uguagliando la parte reale e la parte immaginaria otteniamo:

$$\begin{cases} -\pi y = \pi \\ \pi x = \pi + 2k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Semplificando, la soluzione della seconda equazione è data da

$$z = (1+2k) - i \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

CONCLUSIONE: Ponendo la condizione $y = -1$ e cercando i valori di k che verificano il sistema le soluzioni del sistema sono $z = 1-i, -1-i$.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & x_2 & +x_3 \\ x_1 & & -x_3 \\ 2x_1 & -x_2 & -3x_3 \\ & 2x_2 & +2x_3 \end{pmatrix}$$

(i) Si determini una base di $Ker(f)$ e una base di $Im(f)$.

(ii) Si determini per quali valori del parametro reale t, esiste almeno una soluzione del sistema

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(iii) Sia $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, l' applicazione associata alla matrice trasposta, ovvero

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & +x_2 & +2x_3 & \\ x_1 & & -x_3 & +2x_4 \\ x_1 & -x_2 & -3x_3 & +2x_4 \end{pmatrix}$$

Si dica se $\mathbb{R}^3 = Ker(f) \bigoplus Im(g)$

Soluzione .

(i). Per determinare una base del nucleo e una dell' immagine è di fondamentale importanza determinare il rango dell' applicazione f.

Sia A la matrice associata ad f: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Notiamo che la IV riga = $2\cdot$ I riga. Quindi per determinare il rango è sufficiente considerare la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Tale matrice ha determinante nullo, quindi il rango è ≤ 2. Poichè i primi due vettori colonna sono lineramente indipendenti allora il rango è proprio =2.

Una base dell' immagine sarà data quindi proprio dai primi due vettori colonna della matrice A:

$$\text{Base di } Im(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per trovare una base del $Ker(f)$ occorre risolvere il sistema $f(X) = \mathbf{0_V}$, ovvero

$$\begin{cases} & x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & & -x_3 & = 0 \\ 2x_1 & -x_2 & -3x_3 & = 0 \\ & 2x_2 & +2x_3 & = 0 \end{cases}$$

Applicando l' algoritmo di Gauss otteniamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x_1 & & -x_3 & = 0 \\ & x_2 & +x_3 & = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione il seguente sottospazio vettorial espresso in forma parametrica

$$Ker(f) = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad : \quad t \in \mathbb{R} \right\}$$

Quindi

$$\text{Base di } Ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(ii) Per il teorema di Rouché-Capelli esiste almeno una soluzione $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}k(A) = \mathrm{r}k(A|b_t)$ dove $b_t = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

La matrice $(A|b_t)$ diventa quindi: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & t \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Notiamo subito che anche in questo caso la IV riga $= 2 \cdot$ I riga. Quindi il rango non potrà mai essere 4. Inoltre, dal punto (i) sappiamo che il rango di A è =2 .

Considerando il minore ottenuto eliminando la IV riga e la I colonna, $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & t \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, si ha $\det(M) = 2t - 2$, e quindi $\det(M) \neq 0 \iff t \neq 1$.

Allora possiamo concludere che per $t \neq 1$ il rango di $(A|b_t)$ è =3, e pertanto non ci sono soluzioni del sistema.

Analizziamo ora il caso $t = 1$. La matrice $(A|b_1)$ diventa: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Notiamo subito che la colonna b è = I colonna di A, quindi il rango è necessariamente lo stesso, cioè esiste almeno una soluzione del sistema se e soltanto se $t = 1$.

(iii) L' esercizio segue immediatamente da un "noto" teorema.

In alternativa: la matrice associata a g è data dalla trasposta $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

Sappiamo che il rango di A è uguale al rango di A^T (oppure si devono ripetere gli stessi ragionamentoi fatti al punto (i) operando sulle righe invece che sulle colonne).

Quindi il rango di $A^T = 2$; osservando che le prime due colonne sono linearmente indipendenti una base di $Im(g)$ è data dal seguente insieme:

$$\text{Base di } Im(g) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

La tesi allora segue osservando che i vettori $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di f.

(iii) Si determini, se esiste, un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ che è autovettore per f^2 ma non è autovettore per f.

Soluzione. (i) Posto $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id)$.
Sviluppando rispetto alla II colonna otteniamo:

$$\det(A - \lambda Id) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = ... = -\lambda^3$$

Abbiamo pertanto i seguenti autovalori di A:
$\lambda_1 = 0$ con molteplità algebrica $= 3$.

Per determinare la moteplicità geometrica occorre calcolare il rango di $(A - \lambda Id)$.

Per $\lambda_1 = 0$ analizziamo la matrice $(A - 0Id) = A$. Poichè il minore ottenuto eliminando l aI riga e la III colonna di A, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ha determinante non nullo , si ha $\mathrm{r}k(A) = 2$ e quindi $m.g.(0) = 3 - \mathrm{r}k(A) = 1$. In particolare la matrice non è diagonalizzabile.

(ii) Per determinare gli autovettori relativi $\lambda_1 = 0$ dobbiamo determinare il $Ker(f)$, ovvero risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 & = 0 \\ x_1 \qquad - x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo che gli autovettori per f relativi all'autovalore $\lambda_1 = 0$ sono:

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad : \quad t \neq 0 \right\}.$$

(iii) Per determinare gli autovalori di f^2 occorre studiare la matrice $A^2 = A \cdot A$:

$$A^2 = A \cdot A = ... = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

il polinomio caratteristico di A^2 è $p_{A^2}(\lambda) = \det(A^2 - \lambda Id)$. Sviluppando rispetto alla II colonna otteniamo:

$$\det(A - \lambda Id) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = ... = -\lambda^3$$

Abbiamo pertanto (come dovevamo aspettarci essendo 0 l'unico autovalore di A) i seguenti autovalori di A: $\lambda_1 = 0$ con molteplità algebrica = 3.

Notiamo subita che il rango di A^2 è 1 essendo la II colonna nulla e la III colonna = - I colonna. Quindi la molteplicità geometrica è = 2.

Per determinare gli autovettori relativi $\lambda_1 = 0$ dobbiamo determinare il $Ker(f^2)$, ovvero risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 & - x_3 & = 0 \\ & 0 & = 0 \\ x_1 & - x_3 & = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo che gli autovettori per f^2 relativi all'autovalore $\lambda_1 = 0$ sono:

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad : \quad (t, s) \neq (0, 0) \right\}.$$

Quindi un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ che è autovettore per f^2 ma non è autovettore per f è ad esempio il vettore $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.